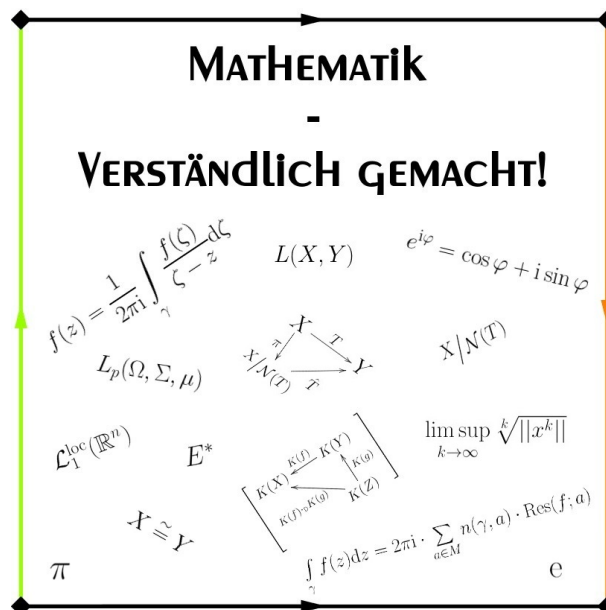


# Approximation mit Fourierreihen

---

M.Sc. Matthias Schulte<sup>2</sup>



<sup>1</sup>Version vom 8. Januar 2024.

<sup>2</sup>[kontakt@mschulte-mathematik.ruhr](mailto:kontakt@mschulte-mathematik.ruhr).



# Inhaltsverzeichnis

<b>Motivation</b>	<b>5</b>
<b>1 Fourierreihen</b>	<b>7</b>
<b>2 Dirichlet- und Fejérkerne</b>	<b>11</b>
<b>3 Gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen</b>	<b>15</b>
<b>4 Diracfolgen und Faltung</b>	<b>17</b>
<b>5 Der Weierstraßsche Approximationssatz</b>	<b>21</b>
<b>6 Bernsteinpolynome</b>	<b>25</b>
<b>7 Punktweise Konvergenz von Fourierreihen</b>	<b>29</b>
<b>8 Anwendung funktionalanalytischer Methoden auf Fourierreihen</b>	<b>33</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>35</b>
<b>Epilog</b>	<b>37</b>



---

## Motivation

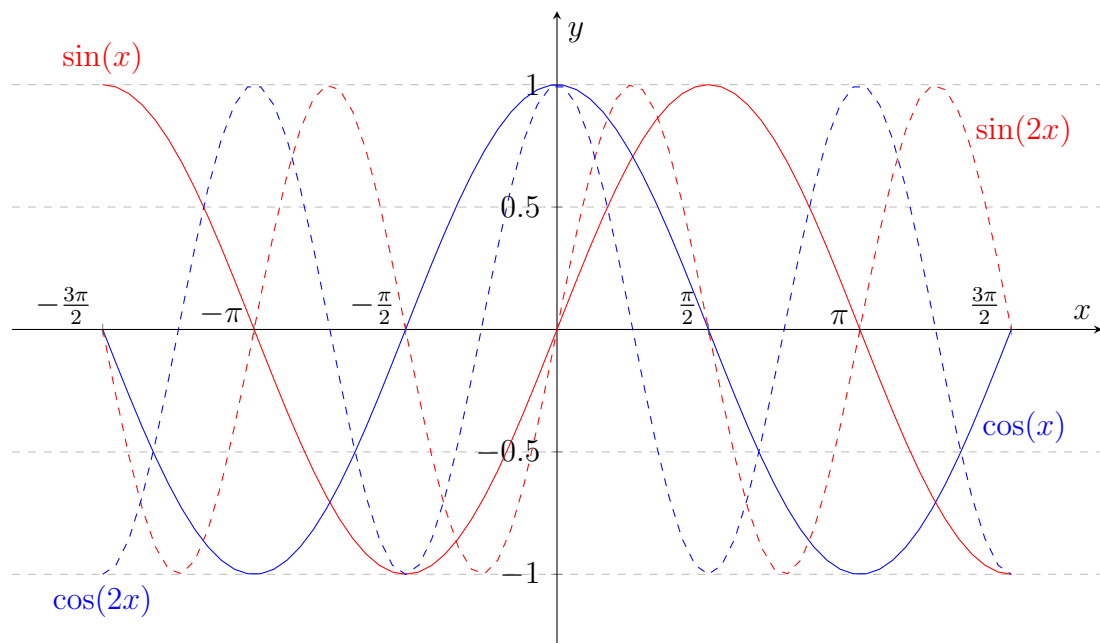
Wir wollen zunächst die Idee hinter Fourierreihen erklären. Dies basiert auf folgender *Aufgabenstellung*:

Zerlege ein gegebenes periodisches Signal bestmöglich in harmonische Schwingungen.

Dies klingt im ersten Moment relativ uninteressant, hat aber eine ganze Reihe von Anwendungen:

- Datenanalyse und Mustererkennung.
- Datenkompression.
- Digitalisierung von Ton- und Bilddaten.
- Digitale Bildverarbeitung. (uvm)

Im Prinzip geht es also um die Approximation von komplizierten Funktionen durch (relativ) einfache „Basisfunktionen“. In unserem Fall handelt es sich um Sinus- und Kosinus-schwingungen.



Dazu führen wir zunächst formal Fourierreihen ein ( $\rightarrow$  Kapitel 1) und studieren ihre gleichmäßigen Konvergenzeigenschaften ( $\rightarrow$  Kapitel 3). Anschließend verallgemeinern wir die erzielten Resultate ( $\rightarrow$  Kapitel 4) und beweisen als wichtige Anwendung den *Weierstraßschen Approximationssatz* ( $\rightarrow$  Kapitel 5). Zur praktischen Illustration des Weierstraßschen Approximationssatzes betrachten wir im Anschluss *Bernsteinpolynome* ( $\rightarrow$

Kapitel 6), bevor wir uns dann den punktweisen Konvergenzeigenschaften von Fourierreihen zuwenden ( $\rightarrow$  Kapitel 7). Wir schließen den Kurs mit einigen funktionalanalytischen Betrachtungen zu Fourierreihen ( $\rightarrow$  Kapitel 8), die insbesondere die Brücke zu [\[Sch19\]](#) schlagen.

---

# 1 Fourierreihen

Wir beginnen mit der formalen Definition einer Fourierreihe.

**Definition 1.1.**

Eine Funktionenreihe der Form

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)), a_k, b_k \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

heißt **Fourierreihe**.

.....  
Solche Summen von Sinus und Kosinus erinnern sofort an die *Eulersche Formel*

$$e^{iy} = \cos(y) + i \cdot \sin(y).$$

In der Tat finden wir hier eine einfache Beziehung.

**Satz 1.2.**

Es gilt

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j e^{ijt}, t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

mit

$$\mathbb{C} \ni c_j := \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot (a_j - ib_j) & : j > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot a_0 & : j = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_{-j} + ib_{-j}) & : j < 0 \end{cases}$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 1

**Folgerung 1.3.**

Aus Formel (1.2) erhalten wir folgende Umrechnungsformel:

$$a_k = c_k + c_{-k}, k \geq 0; b_k = i \cdot (c_k - c_{-k}), k \geq 1. \quad (1.3)$$

.....  
Wir können daher ohne Mehraufwand mit der komplexen Reihe arbeiten.

Wir treffen nun zunächst die *Annahme*, dass die Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt}$$

auf  $\mathbb{R}$  gleichmäßig konvergent ist. Dann ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, f(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

stetig und  $2\pi$ -periodisch. Wir schreiben hierfür  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

Durch (geeignete) Restriktion und Fortsetzung können wir für festes  $\tau \in \mathbb{R}$  den Raum  $C_{2\pi}$  mit dem Unterraum

$$C_{2\pi}[\tau - \pi, \tau + \pi] := \{f \in C_{[\tau - \pi, \tau + \pi]} : f(t - \pi) = f(t + \pi)\} \quad (1.4)$$

von  $C_{[\tau - \pi, \tau + \pi]}$  identifizieren. Ohne Einschränkung können wir uns daher für die weitere Entwicklung der Theorie und für das Rechnen von Beispielen auf das Intervall  $[-\pi, \pi]$  zurückziehen.

Nun wollen wir einsehen, dass wir aus gegebenem  $f$  die Koeffizienten zurückgewinnen können. Dazu benötigen wir folgendes Resultat.

**Satz 1.4.**

Für alle  $n, m \in \mathbb{N}$  gilt  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} e^{-imt} dt = \delta_{nm}$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

**Folgerung 1.5.**

Es gilt  $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot e^{-imt} dt = c_m$  für alle  $m \in \mathbb{Z}$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Erheben wir Folgerung 1.5 zur Definition, so können wir versuchen, für beliebiges  $f$  eine Reihe der Form (1.2) zuzuordnen – solange das Integral existiert. Diese Beobachtung wollen wir nun systematisieren.

**Definition 1.6.**

Es sei  $f \in L^1[-\pi, \pi]$ . Wir definieren

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cdot e^{-iks} ds, k \in \mathbb{Z}, \quad (1.5)$$

und schreiben

$$f(t) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt}. \quad (1.6)$$

Die Zahl  $\hat{f}(k)$  heißt  **$k$ -ter Fourierkoeffizient von  $f$**  und die Reihe (1.6) die **zu  $f$  assoziierte Fourierreihe**.

Ein Wort zur Existenz der Integrale:



---

**Bemerkung 1.7.**

Die Bedingung „ $f \in L^1[-\pi, \pi]$ “ sichert wegen  $\|f\|_{L^1} < \infty$ , die Existenz von (1.5):

$$|\hat{f}(k)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(s)| \cdot \underbrace{|e^{iks}|}_{=1} ds = \frac{1}{2\pi} \|f\|_{L^1} < \infty.$$

---

ENDE – FOLGE 2

Wir sammeln nun einige Anmerkungen zu dieser Definition.

**Bemerkung 1.8.**

1. Wir können die Fourierreihe (1.6) auch für Funktionen  $f$  definieren, die auf einem Intervall der Länge  $2\pi$  Lebesgue-integrierbar sind. Mit  $\tilde{f}$  bezeichnen wir die resultierende  $2\pi$ -periodische Fortsetzung von  $f$  auf  $\mathbb{R}$ .
2. Das Symbol „ $\sim$ “ in (1.6) trifft **keine** Aussage über die Konvergenz der assoziierten Fourierreihe. *Aber:* Konvergiert die Reihe auf einem halboffenen Intervall der Länge  $2\pi$ , so konvergiert sie auf ganz  $\mathbb{R}$  gegen eine  $2\pi$ -periodische Funktion.
3. Für gerade bzw. ungerade Funktionen  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  berechnen wir die Fourierkoeffizienten wie in (1.1), da dort die  $b_k$  bzw. die  $a_k$  verschwinden. Aus (1.3) und (1.5) erhalten wir ferner die Formeln

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cos(ks) ds, \quad k \in \mathbb{N}_0, \quad (1.7)$$

und

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \sin(ks) ds, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (1.8)$$

---

**Bemerkung 1.9.**

Es kann manchmal nützlich sein, die Integration von 0 bis  $2\pi$  durchzuführen. Hierfür benötigen wir kein neues Formelwerk, sondern können die Formeln (1.7) bzw. (1.8) mit den geänderten Grenzen benutzen. Hintergrund ist hier, dass wir Fourierkoeffizienten für die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung berechnen, und diese ist in beiden Fällen die gleiche Funktion. Formal verändern wir hier aber  $f$ ! Wir werden dies erstmalig in Beispiel 3.5 benutzen.

---

Wir beenden dieses Kapitel mit einem

**Beispiel 1.10.**

Im Videokurs berechnen wir an dieser Stelle die assoziierte Fourierreihe der  $C_{2\pi}$ -Funktion

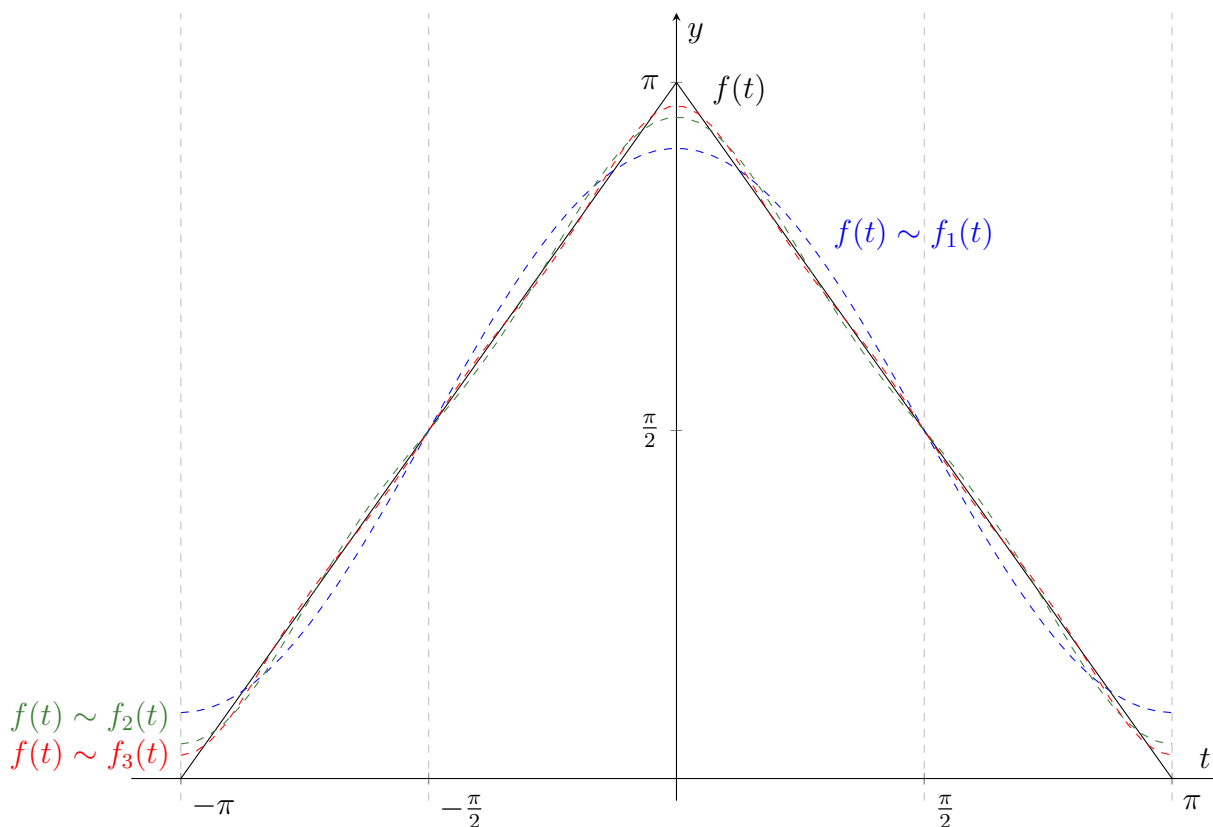
$$f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = \begin{cases} t + \pi & : \quad t \in [-\pi, 0) \\ \pi - t & : \quad t \in [0, \pi] \end{cases}.$$

Als Ergebnis erhalten wir

$$f(t) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{2 \cdot (1 - (-1)^k)}{\pi \cdot k^2} \cdot \cos(kt) \right].$$

Die Rechnung selbst zu probieren ist im Vorfeld eine gute Übung. In der nachstehenden Grafik ist die Funktion  $f$  mit den ersten drei *Fouriersummen*  $f_1$ ,  $f_3$  und  $f_5$  dargestellt (gerade Werte von  $k$  bringen keine neue Information!). Diese berechnen sich wie folgt:

- $f_1(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^1 \left[ \frac{2 \cdot (1 - (-1)^k)}{\pi \cdot k^2} \cdot \cos(kt) \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(t).$
- $f_2(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^2 \left[ \frac{2 \cdot (1 - (-1)^k)}{\pi \cdot k^2} \cdot \cos(kt) \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(t) + \frac{4}{9\pi} \cdot \cos(3t).$
- $f_3(t) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{2 \cdot (1 - (-1)^k)}{\pi \cdot k^2} \cdot \cos(kt) \right] = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \cdot \cos(t) + \frac{4}{9\pi} \cdot \cos(3t) + \frac{4}{25\pi} \cdot \cos(5t).$



Die Fouriersummen  $f_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 50\}$ , können [hier](#) in einem interaktiven Geogebra-Applet visualisiert werden.

ENDE – FOLGE 3

ENDE – FOLGE 4

---

## 2 Dirichlet- und Fejérkerne

Wir wollen uns nun der Frage widmen, wann die assoziierte Fourierreihe gegen die Funktion  $f$  konvergiert. Zunächst betrachten wir hier gleichmäßige Konvergenz, diese ist für den Anfang leichter verdaulich. In diesem Kapitel stellen wir die dazu nötigen technischen Hilfsmittel zusammen.

### Definition 2.1.

Für  $u \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir die **Dirichletkerne** durch

$$D_n(u) := \frac{\sin\left((2n+1)\frac{u}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)}, \quad D_n(2k\pi) := 2n+1. \quad (2.1)$$

Die Graphen der Dirichletkerne können für  $n \in \{1, \dots, 10\}$  [hier](#) als interaktives Geogebra-Applet visualisiert werden.

Wir sammeln als erstes einfache Eigenschaften.

### Satz 2.2.

Die Dirichletkerne sind gerade,  $2\pi$ -periodische und stetige Funktionen.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 5

Manchmal sind andere Darstellungen als (2.1) nützlich. Diese sammeln wir in folgendem

### Lemma 2.3.

Für  $t \in \mathbb{R}$  gilt

$$D_n(u) = 1 + 2 \cdot \sum_{k=1}^n \cos(ku) = \sum_{k=-n}^n e^{iku}. \quad (2.2)$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 6

Nun setzen wir die Dirichletkerne und Fourierreihen in Verbindung.

### Definition 2.4.

Es sei  $f \in L^1[-\pi, \pi]$ . Zu  $n \in \mathbb{N}$  definieren wir

$$s_n(f; t) := \sum_{k=-n}^n \hat{f}(k) e^{ikt}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Die  $s_n$  heißen  **$n$ -te partielle Fouriersumme**.

**Satz 2.5.**

Für  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  gilt

$$s_n(f; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-s)f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Mittels (2.4) haben wir also die Dirichletkerne mit den Fourierreihen verheiratet. Nun werden wir ein Resultat beweisen, das deutlich macht, dass die Konvergenzanalyse mittels Dirichletkernen schwierig ist.

ENDE – FOLGE 7

**Satz 2.6.**

1. Es gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = 1. \quad (2.5)$$

2. Die  $D_n$  nehmen sowohl positive als auch negative Werte an.

3. Es gilt  $\|D_n\|_{L^1[-\pi, \pi]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 8

Wir sehen also, dass Dirichletkerne zwar mit Fourierreihen verbunden, aber nur bedingt zu gebrauchen sind, da sie für  $n \rightarrow \infty$  „schlecht“ skalieren. Der Grund hierfür ist vorrangig, dass die  $D_n$  auch negative Werte annehmen. Wir versuchen daher, dies zu unterbinden, indem wir arithmetische Mittel der Partialsummen der Fourierreihen betrachten. Dies führt auf das Konzept der *Cesàro-Konvergenz*.

**Definition 2.7.**

Eine Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt **Cesàro-konvergent**, falls die Folge  $(\sigma_n)$  mit

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{j=0}^n s_j, \quad s_j := \sum_{l=0}^j a_l,$$

konvergiert. In diesem Fall heißt

$$C\text{-}\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n \quad (2.6)$$

die **Cesàrosumme** der Reihe  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ .

---

Es gilt folgendes elementares Resultat:

**Satz 2.8.**

Eine konvergente Reihe ist auch Cesàro-konvergent mit gleichem Grenzwert.

BEWEIS. Ein Beweis kann in [Kab00, Satz 38.17] nachgelesen werden. ■

**Bemerkung 2.9.**

Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht, wie wir im Videokurs begründen. Sie gilt aber unter der Zusatzannahme  $|a_k| = o\left(\frac{1}{k}\right)$ , vgl. [Kab00, Folgerung 38.19].

ENDE – FOLGE 9

Nun wollen wir Dirichletkerne mitteln. Dies führt uns auf die Definition der Fejérkerne.

**Definition 2.10.**

Wir definieren die **Fejérkerne**  $F_n$  durch

$$F_n(u) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} D_j(u), \quad u \in \mathbb{R}. \quad (2.7)$$

Zunächst wollen wir wieder die Fejérkerne mit Fourierreihen verheiraten. Dies gelingt ähnlich zu Satz 2.5.

**Satz 2.11.**

Es sei  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  und  $\sigma_n(f; t) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} s_j(f; t)$ . Dann gilt

$$\sigma_n(f; t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t-s)f(s) ds, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.8)$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Nun zeigen wir, dass die Fejérkerne einige „Schwächen“ der Dirichletkerne ausbügeln.

**Satz 2.12.**

Es sei  $n \in \mathbb{N}$ . Dann gelten folgende Aussagen:

1.  $F_n$  ist  $2\pi$ -periodisch.
2. Wir haben die Darstellung

$$F_n(u) = \frac{1}{n} \cdot \left( \frac{\sin\left(\frac{nu}{2}\right)}{\sin\left(\frac{u}{2}\right)} \right)^2, \quad u \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad F_n(2k\pi) = n. \quad (2.9)$$

Insbesondere ist  $F_n \in C_{2\pi}$ .

3.  $F_n$  ist gerade und es gilt  $F_n \geq 0$ .

4. Es ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(u) \, du = 1. \quad (2.10)$$

5. Für jedes  $\eta > 0$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\eta \leq |u| \leq \pi} F_n(u) = 0. \quad (2.11)$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

ENDE – FOLGE 10

ENDE – FOLGE 11

***Folgerung 2.13.***

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\|F_n\|_{L^1[-\pi, \pi]} = 2\pi$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

ENDE – FOLGE 12

---

### 3 Gleichmäßige Konvergenz von Fourierreihen

Wir wollen zunächst an die Notation aus Satz 2.11 erinnern: Für  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  sei  $\sigma_n(f; t) := \sum_{j=0}^{n-1} s_j(f; t)$ . Wir starten mit dem Hauptresultat dieses Abschnitts: Die  $\sigma_n$  konvergieren unter „angenehmen“ Voraussetzungen gegen  $f$ .

**Theorem 3.1 (Fejér).**

Es sei  $f \in C_{2\pi}$ . Dann gilt  $\sigma_n(f; t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t)$  gleichmäßig auf  $\mathbb{R}$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

ENDE – FOLGE 13

Somit ist die Konvergenz für stetige Funktionen im Prinzip geklärt. Wir wollen nun dieses Resultat für den Fall der Existenz von nur einseitigen Grenzwerten verallgemeinern.

**Definition 3.2.**

Es sei  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  und  $t \in \mathbb{R}$ . Existieren die Werte

$$\tilde{f}(t^+) := \lim_{s \rightarrow t^+} \tilde{f}(s) \text{ und } \tilde{f}(t^-) := \lim_{s \rightarrow t^-} \tilde{f}(s),$$

so setzen wir

$$f^*(t) := \frac{\tilde{f}(t^+) + \tilde{f}(t^-)}{2}. \tag{3.1}$$

---

**Bemerkung 3.3.**

In Stetigkeitspunkten von  $\tilde{f}$  gilt  $f^*(t) = f(t)$ .

---

**Satz 3.4.**

Es sei  $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi]$  und  $t \in \mathbb{R}$  derart, dass (3.1) existiert. Dann gilt  $\sigma_n(f; t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^*(t)$  gleichmäßig.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

ENDE – FOLGE 14

Wir wollen die Wirkung dieser Sätze an einem Beispiel beleuchten.

**Beispiel 3.5.**

Im Videokurs betrachten wir die Funktion

$$h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) := \begin{cases} \frac{\pi-t}{2} & : 0 < t < 2\pi \\ 0 & : t \in \{0, 2\pi\} \end{cases},$$

und zeigen

$$h(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}. \quad (3.2)$$

Wegen  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$  ist es hier zunächst unklar, ob diese Reihe gegen  $\tilde{h}$  konvergiert. Hier überlegen wir uns mit Satz 3.4, dass

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{h}(k)e^{ikt} = h^*(t) \quad (3.3)$$

gilt, woraus wir in (3.1) Gleichheit folgern können. Im Vorfeld ist es eine gute *Übung*, sich hierüber Gedanken zu machen.

Wir werden in Kapitel 7 nochmals auf diese Funktion zurückkommen und die Gleichheit auf anderem Wege zeigen.

ENDE – FOLGE 15



---

## 4 Diracfolgen und Faltung

In diesem Abschnitt (und gelegentlich auch später) benutzen wir auf  $[-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$  das **normalisierte Lebesguemaß**  $\dot{d}t := \frac{1}{2\pi} dt$ .

### Definition 4.1.

Es sei  $(\delta_n) \subset C_{2\pi}$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Es gilt  $\delta_n \geq 0$ .
2. Es ist  $\int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(u) \dot{d}u = 1$ .
3. Wir haben für alle  $\eta > 0$  die Gleichheit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\eta \leq |u| \leq \pi} \delta_n(u) \dot{d}u = 0$ .

Dann heißt  $(\delta_n)$  eine **Diracfolge**.

---

Wir haben bereits eine Diracfolge kennengelernt.

### Beispiel 4.2.

Nach Satz 2.12 bilden die Fejérkerne  $F_n$  eine Diracfolge.

---

Es stellt sich die naheliegende Frage, ob der Satz von Fejér 3.1 auch allgemeiner für Diracfolgen gilt. Diese Frage lässt sich bejahen.

### Theorem 4.3 (Fejér für Diracfolgen).

Es sei  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f \in C_{2\pi}$  und  $(\delta_n) \subset C_{2\pi}$  eine Diracfolge.

1. Es gilt  $\sigma_n(f; t) = \int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(t-s) f(s) \dot{d}s$  für  $t \in \mathbb{R}$ .
2. Zu  $\varepsilon > 0$  gibt es eine Konstante  $\tilde{C} > 0$  mit  $|f(t) - \sigma_n(f; t)| \leq \tilde{C} \cdot \varepsilon$ .

BEWEIS.

Der Beweis verläuft analog zu denen von Satz 2.11 und Theorem 3.1, daher überlassen wir ihn als *Übung*. ■

---

### Bemerkung 4.4.

1. Wir sehen hier, dass der Beweis von Theorem 3.1 nicht die konkreten Formeln für  $(F_n)$  benutzt, sondern nur die Eigenschaften der gesamten Folge.
2. Wegen Satz 2.6 bilden die Dirichletkerne keine Diracfolge.
3. Es sei  $(\delta_n)$  eine Diracfolge. Dann ist  $\delta_n$  für große  $n \in \mathbb{N}$  stark um den Nullpunkt konzentriert, da die Folge  $(\delta_n)$  das Diracfunktional  $\delta_0 \in C'_{2\pi}$  approximiert:

$$\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \delta_0 \text{ in } C_{2\pi}. \quad (4.1)$$

Präziser gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \delta_n(s) f(s) \dot{d}s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(-0) = \delta_0(f) \quad \forall f \in C_{2\pi}.$$

Nun führen wir den Begriff der *Faltung* ein.

**Definition 4.5.**

Es sei  $g \in C_{2\pi}$  und  $f \in L^1[-\pi, \pi]$ . Dann wird durch

$$(g * f)(t) := \int_{-\pi}^{\pi} g(t-s)f(s) \, ds, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

die **Faltung von  $g$  und  $f$**  definiert.

**Bemerkung 4.6.**

1. In (2.8) haben wir also  $\sigma_n = F_n * f$  gezeigt. Daher sind Fourierreihen und Faltungen miteinander verbunden.
2. Es ist  $g * f \in C_{2\pi}$ .
3. Durch Substitution erhalten wir

$$(g * f)(t) = \int_{-\pi}^{\pi} g(u) \cdot \tilde{f}(t-u) \, du. \quad (4.3)$$

ENDE – FOLGE 16

Wir können Faltungen auch für  $f \in L^p[-\pi, \pi]$  sinnvoll definieren.

**Satz 4.7.**

Es sei  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $f \in L^p([-\pi, \pi], dt)$  und  $g \in C_{2\pi}$ . Dann gilt

$$\|g * f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|g\|_{L^1}, \quad (4.4)$$

d.h. die Faltung von  $g$  und  $f$  ist wohldefiniert.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 17

**Folgerung 4.8.**

$(L^1[-\pi, \pi], *)$  ist eine kommutative Banachalgebra *ohne* Einselement.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 18

Die Forderung (B3) kann in  $(L^1[-\pi, \pi], dt)$  folglich nicht erfüllt werden, wird aber durch eine Diracfolge partiell ersetzt. Wir präzisieren diese Idee.

---

**Satz 4.9.**

Es sei  $(\delta_n) \subset C_{2\pi}$  eine Diracfolge und  $1 \leq p < \infty$ . Dann gilt für  $f \in L^p[-\pi, \pi]$ :

$$\|f - \delta_n * f\|_{L^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (4.5)$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

**Bemerkung 4.10.**

Nach [Sch19, Satz 5.11] gilt sogar

$$\|f - \delta_n * f\|_{L^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig auf präkompakten Teilmengen von  $L^p[-\pi, \pi]$ .

---

**Bemerkung 4.11.**

Im Videokurs schauen wir uns an dieser Stelle an, wie wir die Faltung geometrisch interpretieren können. Da dies als Einschub geschieht, passiert dies in Folge 22.

---

Dies soll uns für den Moment reichen. Faltung ist oft ein wichtiges technisches Hilfsmittel und wir werden im Laufe des Kurses darauf zurückkommen.

ENDE – FOLGE 19



---

## 5 Der Weierstraßsche Approximationssatz

Das Theorem von Fejér 3.1 impliziert, dass wir stetige  $2\pi$ -periodische Funktionen gleichmäßig durch *trigonometrische* Polynome aus  $\mathcal{T} := [e^{ikt}]_{k \in \mathbb{Z}}$  approximiert werden können. Dies wollen wir nun auf die Approximation von stetigen Funktionen durch Polynome ausweiten.

**Theorem 5.1 (Weierstraßscher Approximationssatz).**

Es sei  $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$  kompakt,  $f \in C(I, \mathbb{C})$  und  $\varepsilon > 0$ . Dann gibt es ein Polynom  $P \in \mathbb{P}[\mathbb{C}]$  mit

$$\|f - P\|_I := \sup_{t \in I} |f(t) - P(t)| \leq \varepsilon.$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

**Bemerkung 5.2.**

Für  $f \in C(I, \mathbb{R})$  können wir  $P \in \mathbb{P}[\mathbb{R}]$  wählen, z.B. indem wir  $P$  durch  $\operatorname{Re} P$  ersetzen.

---

ENDE – FOLGE 20

Wir können Theorem 5.1 wie folgt interpretieren:

Der Raum  $C^\infty[a, b]$  liegt dicht in  $C[a, b]$ .

Im Rest dieses Abschnitts wollen wir nun folgern, dass der Raum

$$\mathcal{D}(a, b) := C^\infty(\mathbb{R}) \cap C_c(a, b) \tag{5.1}$$

der sogenannten *Testfunktionen* auf  $(a, b)$  für  $1 \leq p < \infty$  dicht in  $L^p[a, b]$  ist. Dazu konstruieren wir als technisches Hilfsmittel sogenannte  *$C^\infty$ -Abschneidefunktionen*.

**Definition 5.3.**

Wir definieren den Raum

$$\tilde{\mathcal{D}} := \left\{ \rho \in C^\infty(\mathbb{R}) : \rho \geq 0, \operatorname{supp} \rho \subset [-1, 1], \int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = 1 \right\}.$$

Zu  $\rho \in \tilde{\mathcal{D}}$  und  $\varepsilon > 0$  setzen wir

$$\rho_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} \cdot \rho\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \tag{5.2}$$

und für  $I := [a, b] \subset \mathbb{R}$  sei

$$X_{I, \varepsilon}(t) := \int_a^b \rho_\varepsilon(t - s) ds = [\rho * (c\mathbb{1}_{[a, b]})](t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.3}$$

wobei  $c$  derart gewählt ist, dass  $\rho_\varepsilon \leq c$  gilt.

Die Funktion  $X_{I,\varepsilon}(\cdot)$  heißt  **$C^\infty$ -Abschneidefunktion von  $I$** .

ENDE – FOLGE 21

Es stellt sich zunächst die Frage, ob überhaupt solche Funktionen existieren. Dies ist darauf zurückzuführen, dass  $\tilde{D} \neq \emptyset$  ist. Daher nun ein

**Beispiel 5.4.**

Wir setzen

$$\rho(t) = c \cdot \mathbf{1}_{(-1,1)}(t) \cdot \exp\left(\frac{1}{t^2 - 1}\right),$$

wobei  $c > 0$  derart gewählt sei, dass  $\int_{\mathbb{R}} \rho(t) dt = 1$  gilt. Dann gilt  $\rho \in \tilde{D}$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 22

Wir formulieren zunächst einige Eigenschaften der Funktionen  $\rho_\varepsilon$  aus (5.3), die zum Verständnis der Eigenschaften von  $X_{I,\varepsilon}$  beitragen.

**Satz 5.5.**

Für  $\rho_\varepsilon$  aus (5.3) gelten die folgenden Aussagen:

1.  $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$ .
2.  $\rho_\varepsilon \geq 0$ .
3.  $\text{supp } \rho_\varepsilon \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ .
4.  $\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(t) dt = 1$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 23

Nun beweisen wir einige Eigenschaften von Abschneidefunktionen.

**Satz 5.6.**

1.  $0 \leq X_{I,\varepsilon} \leq 1$ .
2.  $X_{I,\varepsilon}(t) = 0$  für  $t \leq a - \varepsilon$  und  $t \geq b + \varepsilon$ .
3.  $X_{I,\varepsilon}(t) = 1$  für  $a + \varepsilon \leq t \leq b - \varepsilon$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

**Bemerkung 5.7.**

Die Geometrie im Beweis von Satz 5.6 erklärt auch den Begriff „Abschneidefunktion“: Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  gilt  $X_{I,\varepsilon} \rightarrow \mathbb{1}_I$  punktweise. Somit ist  $X_{I,\varepsilon}$  die  $C^\infty$ -Version der klassischen Indikatorfunktion.

---

**Satz 5.8.**

Für  $1 \leq p < \infty$  und  $a < b \in \mathbb{R}$  ist der Raum  $\mathcal{D}(a, b)$  dicht in  $L^p[a, b]$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

Damit schließen wir den Abschnitt zum Weierstraßschen Approximationssatz.





---

## 6 Bernsteinpolynome

Der Weierstraßsche Approximationssatz 5.1 liefert nur die Existenz eines „guten“ Interpolationspolynoms. Wir wollen nun in diesem Abschnitt eine Klasse von Polynomen kennenlernen, die die Bedingungen des Weierstraßschen Approximationssatzes erfüllen und somit auch konkrete Approximationen betrachten.

Wir ziehen uns für dieses Kapitel mittels einer linearen Transformation

$$[a, b] \xrightarrow{x=a+t(b-a)} [0, 1]$$

auf das Intervall  $I := [0, 1]$  zurück, um die technischen Details klein zu halten.

**Definition 6.1.**

Es seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  und  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$ .

1. Das Polynom

$$p_{n,k}(x) := \binom{n}{k} \cdot x^k \cdot (1-x)^{n-k}, \quad x \in [0, 1], \quad (6.1)$$

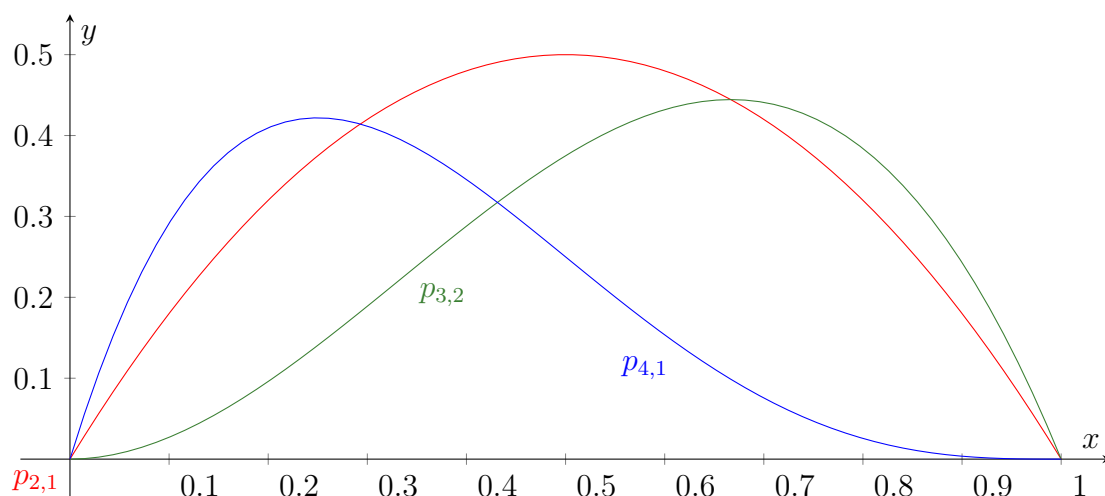
bezeichnen wir als **Bernstein-Grundpolynom** (zum Indexpaar  $(n, k)$ ). Ferner definieren wir noch  $p_{0,0} \equiv 1$  und  $p_{n,k} \equiv 0$  für  $k > n$  oder  $k < 0$ .

2. Das **Bernsteinpolynom vom Grad  $n$  zur Funktion  $f$**  definieren wir durch

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot p_{n,k}(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (6.2)$$

---

Die nachfolgende Abbildung visualisiert einige Bernsteingrundpolynome.



Wir sammeln zunächst einige technische Eigenschaften der Grundpolynome (6.1).

**Lemma 6.2.**

1. Für alle  $x \in [0, 1]$  gilt  $p_{n,k}(x) \geq 0$ .
2. Für alle  $x \in (0, 1)$ ,  $k \geq 0$  und  $k \leq n$  gilt  $p_{n,k}(x) > 0$ .
3. Es gilt  $p_{n,k}(0) = \delta_{0,k}$  und  $p_{n,k}(1) = \delta_{n,k}$ .
4. Die Bernstein-Grundpolynome bilden eine Zerlegung der Eins, d.h. es gilt

$$\sum_{k=0}^n p_{n,k}(x) = 1 \quad \forall x \in [0, 1].$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

**Bemerkung 6.3.**

Die Bernstein-Grundpolynome sind sogar eine  $C^\infty$ -Zerlegung der Eins, was hier allerdings nicht im Fokus steht.

ENDE – FOLGE 26

Nun wollen wir die Bernsteinpolynome funktionalanalytisch untersuchen. Dazu führen wir einen passenden Operator ein.

**Definition 6.4.**

Auf  $C[0, 1]$  definieren wir den Operator

$$B_n : C[0, 1] \rightarrow \mathbb{P}_n(\mathbb{R}), \quad B_n f := \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot p_{n,k}.$$

Dieser heißt **Bernsteinoperator**.

**Satz 6.5.**

Der Bernsteinoperator  $B_n$  ist linear mit  $\|B_n\| = 1$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Für den Nachweis, dass die Bernsteinpolynome dem Weierstraßschen Approximationssatz genügen, müssen wir eine besondere Menge von Funktionen betrachten. Dafür benötigen wir folgende Setzung.

**Definition 6.6.**

Es seien  $n \in \mathbb{N}$ ,  $s \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in [0, 1]$ . Die Funktion

$$T_{n,s}(x) := B_n [(\cdot - x)^s](x) := \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n} - x\right)^s \cdot p_{n,k}(x) \tag{6.3}$$

heißt **s-tes Moment des Bernsteinoperators**.

---

**Lemma 6.7.**

Es sei  $\delta > 0$  und  $x \in [0, 1]$  fest. Wir definieren die Mengen

$$S_x(\delta) := \left\{ k \in \mathbb{N}_0 : 0 \leq k \leq n, \left| x - \frac{k}{n} \right| \geq \delta \right\} \subset \mathbb{N}_0.$$

Dann existiert eine Konstante  $s \in \mathbb{N}_0$  und eine Konstante  $A = A(s)$  mit

$$\sum_{k \in S_x(\delta)} p_{n,k}(x) \leq \frac{A}{n^s \delta^{2s}}. \quad (6.4)$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

ENDE – FOLGE 27

Nun können wir zeigen, dass die Bernsteinpolynome tatsächlich dem Weierstraßschen Approximationssatz genügen.

**Satz 6.8.**

Für  $f \in C([0, 1], \mathbb{R})$  gilt  $|f(x) - B_n f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

Wir schließen dieses Kapitel mit einer

**Bemerkung 6.9.**

Im Videokurs zeigen wir, dass der Weierstraßsche Approximationssatz mittels Bernsteinpolynomen auch auf wahrscheinlichkeitstheoretischen Wegen erreicht werden kann. Hierzu verweisen wir für Details auf [\[Kle13\]](#).

---

ENDE – FOLGE 28



---

## 7 Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Konvergenz von Fourierreihen, ohne dass wir arithmetische Mittel bilden. Grundlage für diese Analyse ist folgender

**Satz 7.1 (Lemma von Riemann-Lebesgue).**

Es sei  $f \in L^1[a, b]$ . Dann gilt

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(s) \cdot e^{-i\lambda t} ds = 0. \quad (7.1)$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

**Bemerkung 7.2.**

1. In Beweisteil 1) für obigen Satz können wir statt Testfunktionen auch Treppenfunktion verwenden.
2. Wegen [Sch19, Satz 5.11] gilt im Setting obigen Lemmas sogar

$$F_\lambda f \xrightarrow{|\lambda| \rightarrow \infty} 0$$

gleichmäßig auf präkompakten Teilmengen von  $L^1[a, b]$ , wobei wir die Notation aus dem Beweis benutzen. Somit ergibt sich für die Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(s) \cdot e^{-iks} ds, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(vgl. (1.5)) mit Satz 7.1 gerade

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$$

gleichmäßig auf präkompakten Teilmengen von  $L^1[-\pi, \pi]$ .

ENDE – FOLGE 29

3. Wir haben die Abschätzung

$$\left| \hat{f}(k) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt,$$

also ist die lineare Fourierabbildung

$$\mathfrak{F} : L^1[-\pi, \pi] \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad \mathfrak{F}(f) := (\hat{f}(k))_{k \in \mathbb{Z}},$$

stetig. Wir werden später sehen, dass diese Abbildung injektiv, aber nicht surjektiv ist ( $\rightarrow$  Theorem 8.3).

Wir zeigen nun ein erstes Resultat zur punktweisen Konvergenz. Hierzu erinnern wir an (3.1):

$$f^*(t) := \frac{1}{2} \cdot (\tilde{f}(t^+) + \tilde{f}(t^-)).$$

**Satz 7.3 (Dini).**

Es sei  $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi]$  und  $t \in \mathbb{R}$  so, dass die einseitigen Grenzwerte  $\tilde{f}(t^+)$  und  $\tilde{f}(t^-)$  existieren. Ferner gelte

$$s \mapsto \frac{\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t^-)}{s} \in \mathcal{L}^1[0, \pi)$$

und

$$s \mapsto \frac{\tilde{f}(t-s) - \tilde{f}(t^+)}{s} \in \mathcal{L}^1(-\pi, 0).$$

Dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cdot e^{ikt} = f^*(t).$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 30

Wir ziehen einige Folgerungen.

**Folgerung 7.4 (Lipschitz).**

Es sei  $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi]$ . Ferner erfülle  $\tilde{f}$  für ein  $\alpha \in (0, 1]$  in  $t \in \mathbb{R}$  die *einseitige Hölderbedingung*

$$\exists \eta > 0, C > 0 \forall s \in (0, \eta]: \left| \tilde{f}(t \pm s) - \tilde{f}(t^\pm) \right| \leq C \cdot |s|^\alpha. \tag{7.2}$$

Dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cdot e^{ikt} = f^*(t).$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

**Folgerung 7.5.**

Es sei  $f \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi]$  so, dass  $\tilde{f}$  in  $t \in \mathbb{R}$  differenzierbar ist. Dann gilt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cdot e^{ikt} = f^*(t).$$

---

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

**Beispiel 7.6.**

Die Funktion

$$h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) := \begin{cases} \frac{\pi-t}{2} & : 0 < t < 2\pi \\ 0 & : t \in \{0, 2\pi\} \end{cases},$$

aus Beispiel 3.5 erfüllt (7.2) mit  $\alpha = 1$  in jedem Punkt  $t \in (0, 2\pi)$ . Daher gilt in (3.2) Gleichheit:

$$\frac{\pi - t}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k}, \quad 0 < t < 2\pi. \quad (7.3)$$

---

Wir beenden dieses Kapitel mit folgendem

**Satz 7.7 (Riemannscher Lokalisierungssatz).**

Es seien  $g, h \in \mathcal{L}^1(-\pi, \pi]$  so, dass  $\tilde{g}$  und  $\tilde{h}$  auf einem kleinen offenen Intervall um  $t \in \mathbb{R}$  übereinstimmen, d.h.

$$\exists \varepsilon > 0: g(t) = h(t) \quad \forall t \in U_\varepsilon(t).$$

Dann gilt

$$\sum_{k=-n}^n (\hat{g}(k) - \hat{h}(k)) \cdot e^{ikt} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

ENDE – FOLGE 31





---

## 8 Anwendung funktionalanalytischer Methoden auf Fourierreihen

Wir beginnen mit einer grundlegenden Abschätzung für Dirichletkerne.

**Satz 8.1.**

Für alle  $n \geq 2$  gibt es (von  $n$  abhängige) Konstanten  $0 < c \leq C$  mit

$$c \cdot \log n \leq \int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| dt \leq C \cdot \log n.$$

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

ENDE – FOLGE 32

Wir zeigen nun, dass es Funktionen  $f \in L^1[-\pi, \pi]$  gibt, deren Fourierreihe *nicht* in  $L^1[-\pi, \pi]$  konvergiert. Tatsächlich werden wir sogar erhalten, dass dies für „die meisten“  $L^1$ -Funktionen gilt.

**Satz 8.2.**

Die Menge

$$M := \left\{ f \in L^1[-\pi, \pi] : \sup_{n \in \mathbb{N}} \|s_n(f)\|_{L^1} < \infty \right\}$$

ist mager in  $L^1[-\pi, \pi]$ .

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

Zum Abschluss dieses Kurses wollen wir das Bild der Fourierabbildung  $\mathfrak{F} : L^1[-\pi, \pi] \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$  beschreiben.

**Theorem 8.3.**

1. Die Fourierabbildung  $\mathfrak{F} : L^1[-\pi, \pi] \rightarrow c_0(\mathbb{Z})$  ist injektiv, aber nicht surjektiv.
2. Das Bild  $\mathfrak{F}(L^1[-\pi, \pi])$  ist mager in  $c_0(\mathbb{Z})$ .
3. Das Bild  $\mathfrak{F}(L^1[-\pi, \pi])$  ist für  $1 \leq p < \infty$  *nicht* in  $\ell^p(\mathbb{Z})$  enthalten.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

---

ENDE – FOLGE 33

Bemerkung 8.4.

Es ist im Allgemeinen sehr schwierig, das Bild von  $\mathfrak{F}$  *genau* zu beschreiben. Allerdings gibt Theorem 8.3 darüber Aufschluss, wie es *nicht* aussehen kann. Haben wir beispielsweise nachgewiesen, dass eine Menge in  $\ell^p(\mathbb{Z})$  liegt (für ein  $p \in [1, \infty)$ ), so wissen wir nach diesem Theorem sicher, dass diese Menge nicht das Bild von  $L^1[-\pi, \pi]$  unter  $\mathfrak{F}$  sein kann.

---

ENDE – FOLGE 34

## Literaturverzeichnis

- [Brü18] Rainer Brück. Funktionalanalysis I. Abgerufen am 28.11.2022, 19:41 Uhr. 2018. URL: <https://t1p.de/qa4bj>.
- [Kab00] Winfried Kabbalo. Einführung in die Analysis I. Heidelberg: Spektrum, 2000.
- [Kab11] Winfried Kabbalo. Grundkurs Funktionalanalysis. Heidelberg: Spektrum, 2011.
- [Kle13] Achim Klenke. Wahrscheinlichkeitstheorie. Bd. 3. Springer Spektrum, 2013.
- [Que01] Boto v. Querenburg. Mengentheoretische Topologie. 3. Aufl. Berlin: Springer, 2001.
- [Sch19] Matthias Schulte. Grundlagen der Funktionalanalysis. Abgerufen am 28.11.2022, 19:35 Uhr. 2019. URL: <https://t1p.de/zoem4>.



---

## Epilog

Ich hoffe, dass ich mit diesem Kurs und diesem Skript ein wenig Wissen (und nicht zu Letzt auch ein wenig Freude) an der Materie vermitteln konnte. Sollte dies auch nur für einen Zuschauer zutreffen, so hat es sich für mich bereits gelohnt.

Matthias Schulte, 2024.