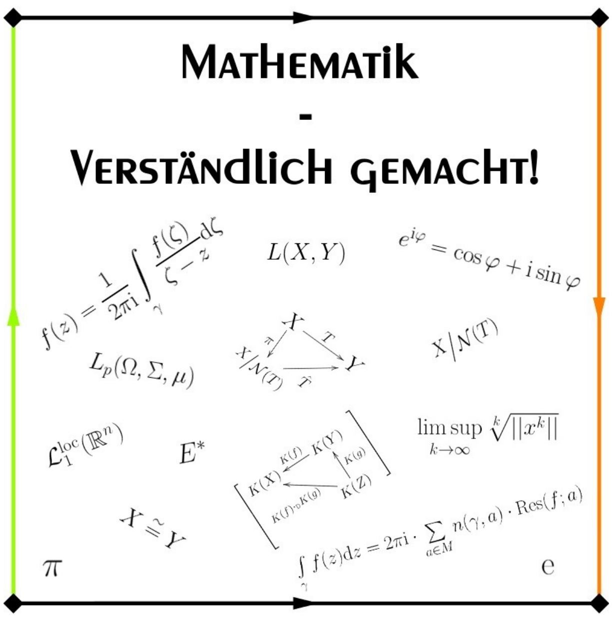
Skript[1] zur Videoreihe

Analysis I

Matthias Schulte, M.Sc.[2]



[1] Version vom 20. Februar 2022.

[2] kontakt@mschulte-mathematik.de.

Inhaltsverzeichnis

1 Strukturelle Grundlagen

1.1 Mengen

Definition **1.1.1 (nach *Georg Cantor*).**
Eine **Menge** ist eine Zusammenfassung bestimmter wohlunterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens – welche die **Elemente** der Menge genannt werden – zu einem Ganzen.

Beispiel **1.1.2 (*Standardbezeichnung für Zahlenmengen*).**

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$. **Natürliche Zahlen**.
- $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$. **Natürliche Zahlen mit Null**.
- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. **Ganze Zahlen**.
- $\mathbb{Q} := \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in N\right\}$. **Rationale Zahlen**.
- $\mathbb{R}$. **Reelle Zahlen**.
- $\emptyset$. **Leere Menge**.
- $3 \in \mathbb{N}$, $3 \in \mathbb{R}$, $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$, $-1 \in \mathbb{Z}$, $-1 \notin \mathbb{N}$, $1.212121\ldots \in \mathbb{R}$.

An dieser Stelle ein Wort zur Notwendigkeit der reellen Zahlen: Das sogenannte „Diagonalenproblem“ ist die Aufgabe, zu einem Quadrat der Seitenlänge 1 die Länge der Diagonale zu bestimmen. Formelmäßig ist dies die positive Lösung der Gleichung $x^2 = 2$, also $x = \sqrt{2}$, wie aus der Schule bekannt sein sollte. In Satz 1.2.1 zeigen wir, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist, daher sehen wir hier schon einmal vorgreifend, dass es „einfach“ zu konstruierende Zahlen gibt, die nützlich, aber nicht rational sind.

Definition **1.1.3.**
Eine Menge M heißt **endlich**, wenn sie aus nur endlich vielen Elementen besteht. Die Anzahl der Elemente heißt **Mächtigkeit** von M; $|M|$ oder $\#M$.

Wir können Mengen in verschiedenen Formen beschreiben:

$$\begin{aligned} M &= \{1, 4, 9, 16, 25\} \ \ (\textbf{aufzählend}) \\ &= \left\{y : y \in \mathbb{N}, \text{ Es existiert ein } x \in \mathbb{N} \text{ mit } x^2 = y \text{ und } y \leq 25\right\} \ \ (\textbf{beschreibend}) \\ &= \left\{x^2 : x \in \mathbb{N},\ x \leq 5\right\} \ \ (\textbf{abgekürzt beschreibend}). \end{aligned}$$

Definition **1.1.4.**

a) Eine Menge A heißt **Teilmenge** einer Menge M, falls jedes Element von A auch ein Element von M ist; $A \subset M$.

b) Eine Menge A heißt **echte Teilmenge** einer Menge M, falls A Teilmenge von M ist und $A \neq M$ gilt; $A \subsetneq M$.

Definition **1.1.5.**

- $A \cap B := \{x \in A \text{ und } x \in B\}$. (**Durchschnitt**)
- $A \cup B := \{x \in A \text{ oder } x \in B\}$. (**Vereinigung**)
- $A \setminus B := \{x \in A \text{ und } x \notin B\}$. (**Differenz**)

Bemerkung **1.1.6.**
Bei Bildung der Differenzmenge muss B nicht in A enthalten sein. Wir können uns aber immer auf diesen Fall zurückziehen, denn es gilt

$$A \setminus B = A \setminus (A \cap B).$$

Beweis. Dies ist eine *Übung*. (→ Aufgabe 1.1) ∎

Definition **1.1.7.**
Zwei Teilmengen $A, B \subset M$ heißen **disjunkt**, falls $A \cap B = \emptyset$ gilt.
Eine Menge M heißt **disjunkte Vereinigung** von n Mengen $A_1, \ldots, A_n$, $n \in \mathbb{N}$, falls

$$A_1 \cup \ldots \cup A_n = M \text{ und } A_1 \cap \ldots \cap A_n = \emptyset$$

gilt. Wir schreiben $M = A_1 + \ldots + A_n$.

Satz **1.1.8.**
Es sei M eine endliche Menge und $A, B \subset M$ mit $M = A + B$. Dann sind auch A und B endlich und es gilt $|M| = |A| + |B|$.

Beweis. Siehe Bemerkung 1.4.4. ∎

Definition **1.1.9.**

a) Es seien A, B Mengen. Dann heißt

$$A \times B := \{(a, b) \colon a \in A,\ b \in B\}$$

das **kartesische Produkt** von A und B.

b) Das Element $(a, b) \in A \times B$ heißt **geordnetes Tupel**.

c) Allgemeiner setzen wir

$$\prod_{j=1}^{n} A_j := A_1 \times \ldots \times A_n := \{(a_1, \ldots, a_n) \colon a_j \in A_j \text{ für } j = 1, \ldots, n\}.$$

Diese Menge heißt auch die **Produktmenge** der Mengen $A_1, \ldots, A_n$.

***Bemerkung* 1.1.10.**
Für beliebige $a_j, b_j \in A_j$, $j = 1, \ldots, n$, gilt

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \text{ genau dann, wenn } a_j = b_j \text{ für } j = 1, \ldots, n,$$

gilt. Beachte: $(a, b) \neq \{a, b\}$.

***Satz* 1.1.11.**
Es seien M, N endliche Mengen. Dann gilt $|M \times N| = |M| \cdot |N|$.

BEWEIS. Im Video. ∎

***Definition* 1.1.12.**
Die Menge aller Teilmengen einer Menge M heißt **Potenzmenge** von M; $\mathcal{P}(M)$.

Wir werden später (→ Satz 1.5.7) zeigen, dass für endliche Mengen M gilt:

$$|\mathcal{P}(M)| = 2^{|M|}.$$

Diese Gleichung wird auch (in einer gewissen Hinsicht) für unendliche Mengen gelten.

***Beispiel* 1.1.13.**
Wir betrachten $M := \{a, b, c\}$ mit $|M| = 3$. Nach voriger Bemerkung erwarten wir also $2^3 = 8$ Elemente in der Potenzmenge. In der Tat erhalten wir

$$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Dies bestätigt unsere Vermutung.

ENDE – FOLGE 1

1.2 Elementare Aussagenlogik

Mathematik besteht zum großen Teil aus der logischen Verknüpfung mehr oder weniger einfacher Aussagen. Eine Aussage ist dabei ein Satz, dem ein eindeutiger Wahrheitswert zugewiesen werden kann. Daher stellen wir hier die wichtigsten Symbole dieser Logik vor und erläutern deren Semantik.

Definition **1.2.1.**

a) $\exists$: „Es gibt ein...“.

b) $\exists!$: „Es gibt genau ein...“.

c) $\exists_\infty$: „Es gibt unendlich viele...“.

d) $\forall$: „Für alle...“.

e) $\Rightarrow$: „Impliziert...“.

f) $\Leftrightarrow$: „Genau dann, wenn...“.

g) $\wedge$: „Und...“.

h) $\vee$: „Oder...“.

i) $\neg$: „Nicht...“.

Die Semantik dieser Operatoren wird durch Wahrheitstafeln definiert. Wir wollen dies an einigen Beispielen tun.

Beispiel **1.2.2.**

a)

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$
f	f	f	f
w	f	f	w
f	w	f	w
w	w	w	w

b)

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
f	f	w	w
w	f	f	f
f	w	w	f
w	w	w	w

d)

A	$\neg A$
f	w
w	f

***Satz* 1.2.3.**
Es gilt $A \Leftrightarrow B$ genau dann, wenn gilt:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A).$$

Beweis. Im Video. ■

Satz 1.2.3 formuliert eines der wichtigsten mathematischen Beweisprinzipien: **Zwei Aussagen sind genau dann äquivalent, wenn sie sich gegenseitig implizieren.**

Einschub: Beweistechniken

Aussagen mit Existenzquantor.
Eine Existenzaussage

$$\exists x \in M \colon A(x)$$

können wir beweisen, indem wir ein konkretes $x \in M$ angeben, das $A(x)$ erfüllt.

Beispiel: Z.z.: $\exists n \in \mathbb{N} \colon n < 2$.
Beweis. Wähle $n = 1$. ∎

Aussagen mit Allquantor.
Eine Allaussage

$$\forall x \in M \colon A(x)$$

können wir beweisen, indem wir für ein **beliebiges** $x \in M$ die Gültigkeit von $A(x)$ nachweisen.

Beispiel 1: Z.z.: $\forall x \in \{1, 4\} : x = k^2$ für ein $k \in \mathbb{N}$.
Beweis. Es ist $1 = 1^2$ und $4 = 2^2$. ∎

Beispiel 2: Z.z.: $\forall x \in \mathbb{R}_0^+ \colon x + 2 \geq 2$.
Beweis. Es sei $x \in \mathbb{R}_0^+$ beliebig. Dann gilt $x \geq 0$. Daher ist $x + 2 \geq 0 + 2 = 2$. ∎

Indirekter Beweis.
Wollen wir $A \Rightarrow B$ beweisen, so können wir stattdessen auch $\neg B \Rightarrow \neg A$ zeigen.

Beispiel: Z.z.: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: n gerade $\Rightarrow \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$.
Beweis.
Wir schreiben ($A : n$ gerade.) und ($B : \frac{n}{2} \in \mathbb{N}$.).
Dann erhalten wir ($\neg A : n$ ungerade.) und ($\neg B : \frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$).
Sei also $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n}{2} \notin \mathbb{N}$. ($\neg B$).
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \colon \frac{n}{2} \neq k$.
$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \colon n \neq 2k$.
$\Rightarrow n$ ist nicht gerade.
$\Rightarrow n$ ist ungerade. ($\neg A$) ∎

Beweis durch Widerlegen.
Wollen wir A widerlegen, so können wir $\neg A$ beweisen.

Beispiel: Z.w.: 25 ist eine Primzahl.
Beweis.
Angenommen, 25 ist eine Primzahl. ($\neg A$)
$\Rightarrow$ 1 und 25 sind die einzigen Teiler von 25.
Aber: $25 = 5 \cdot 5$ und $1 \neq 5 \neq 25$.
$\Rightarrow$ Die Annahme war falsch, also ist 25 nicht prim. ∎

Widerspruchsbeweis.
Wollen wir zeigen, dass A wahr ist, so können wir zeigen, dass $\neg A \Rightarrow \mathbb{F}$ wahr ist, wobei $\mathbb{F}$ die Aussage ist, die immer falsch ist. Wir konstruieren also aus $\neg A$ einen Widerspruch.
Häufig wenden wir dies wie folgt an:
Statt $A \Rightarrow B$ beweisen wir $(A \wedge \neg B) \Rightarrow \mathbb{F}$.

Beispiel: Z.z.: $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

BEWEIS.

Angenommen, es gelte $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. $(\neg A)$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd; der Bruch liegt also in **gekürzter** Form vor.

Quadrieren dieser Gleichheit liefert

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2. \tag{$*$}$$

Da $2q^2$ eine gerade Zahl ist, ist auch p^2 eine gerade Zahl. Folglich muss auch p gerade sein, d.h. es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ mit $p = 2r$. Aus $(*)$ folgt nun

$$2q^2 = 4r^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2.$$

Somit sind (wie oben) auch q^2 und somit q gerade.

$\Rightarrow p$ **und** q sind gerade.

$\Rightarrow$ Somit gilt $\sqrt{2} = \frac{p}{q} = \frac{2\hat{p}}{2\hat{q}} = \frac{\hat{p}}{\hat{q}}$, $\hat{p} < p$, $\hat{q} < q$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass der Bruch in **gekürzter** Form vorlag. ■

Dieses Resultat fassen wir noch einmal zusammen.

***Satz* 1.2.1.**

Es gilt $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Durch diesen Satz ist die Notwendigkeit nach einer weiteren, $\mathbb{Q}$ umfassenden Zahlenmenge aus dem ersten Abschnitt legitimiert: Ohne die reellen Zahlen „erwischen“ wir Zahlen wie $\sqrt{2}$ nicht; aber diese Zahlen sind trotzdem wichtig („Diagonalenproblem“).

Mit diesen Grundlagen der Aussagenlogik und obiger Beweistechniken lassen sich nun wichtige Rechenregeln für Mengen beweisen.

***Satz* 1.2.2.**

Es seien A, B, C Mengen. Dann gelten folgende Aussagen:

a) *Kommutativität:*
$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

b) *Assoziativität:*
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

c) *Distributivität:*
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

d) *Regeln von de Morgan:*
$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

BEWEIS. Dies ist eine *Übung*. ($\rightarrow$ Aufgabe 1.3) ■

ENDE – FOLGE 2

1.3 Abbildungen

Die moderne Mathematik ist geprägt vom Begriff der *Abbildung*. Diesem Standpunkt tragen wir mit diesem Kapitel Rechnung und führen die wichtigsten Eigenschaften von Abbildungen ein.

Definition **1.3.1.**
Es seien X, Y zwei beliebige Mengen.
Eine **Abbildung** von X in Y ist gegeben durch eine Vorschrift f, die jedem Element $x \in X$ *genau ein* Element $y \in Y$ zuordnet.
Wir schreiben $y := f(x)$.
Für die gesamte Abbildung schreiben wir $f : X \to Y$.
Für ein Element $x \in X$ schreiben wir $x \mapsto f(x)$.
Ferner benutzen wir folgende Bezeichungen:

- $f(x)$ heißt das **Bild von x unter f**.
- X heißt **Definitionsbereich**.
- Y heißt **Wertemenge/Wertebereich**.

Die Elemente von X heißen **Argumente** der Abbildung.

Bemerkung **1.3.2.**
Zwei Abbildungen sind nur dann gleich, wenn die Vorschriften und auch die Definitions- **und** Wertebereiche übereinstimmen.

Beispiel **1.3.3.**

a) Wir beginnen mit vier Einstiegsbeispielen, die die gleiche Funktionsvorschrift haben, aber keine gleichen Abbildungen sind.
   1) $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}$, $f(x) := x^2$.
   2) $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{N}_0$, $f(x) := x^2$.
   3) $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}$, $f(x) := x^2$.
   4) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}_0^+$, $f(x) := x^2$.

b) Alle reellwertigen Funktionen, die aus der Schule bekannt sind (sin, cos, exp etc.), sind Abbildungen in unserem neu definierten Sinne.

c) $X = \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\})$, $Y = \mathbb{N}_0$, $f(x) := |x|$.

d) $X = \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}) = Y$, $f(x) := \{1, \ldots, n\} \setminus x$.

Bemerkung **1.3.4.**
Abbildungen zwischen (endlichen) Mengen kann man durch Pfeildiagramme veranschaulichen.
Das Pfeildiagramm einer Abbildung kann dabei nicht beliebig aussehen: Bei jedem Element des Definitionsbereichs X beginnt *genau ein* Pfeil.

Definition **1.3.5.**
Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) Es sei $A \subset X$. Dann definieren wir das **Bild von A unter f** durch

$$f(A) := \{y \in Y \mid \exists a \in A\colon f(a) = y\} = \{f(a)\colon a \in A\}\,.$$

b) Es sei $B \subset Y$. Dann definieren wir das **Urbild von B unter f** durch

$$f^{-1}(B) := \{x \in X\colon f(x) \in B\}\,.$$

Beispiel **1.3.6.**

a) $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathbb{N}$, $f(x) := x^2$.
   - $f(\{1,2,3\}) = \{1,4,9\}$.
   - $f(\{5,7,12\}) = \{25,49,144\}$.
   - $f^{-1}(\{25,36,49\}) = \{5,6,7\}$.
   - $f^{-1}(\{10,11,\ldots,20\}) = \{4\}$.
   - $f^{-1}(\{100,101,\ldots,200\}) = \{10,11,12,13,14\}$.

b) $X = \mathbb{Z}$, $Y = \mathbb{Z}$, $f(x) := x^2$.
   - $f^{-1}(\{25\}) = \{-5,5\}$.
   - $f^{-1}(\{25,36,49\}) = \{\pm 5, \pm 6, \pm 7\}$. (**Sechs** Elemente!)
   - $f^{-1}(\{-1,-2,-3,\ldots\}) = \emptyset$.

Nun wollen wir grundlegende Eigenschaften von Abbildungen einführen.

Definition **1.3.7.**
Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) f heißt **injektiv** genau dann, wenn gilt:

$$\forall x, x' \in X\colon x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

b) f heißt **surjektiv** genau dann, wenn gilt:

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X\colon f(x) = y.$$

c) f heißt bijektiv genau dann, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Bemerkung **1.3.8.**
Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist also genau dann surjektiv, falls $f(X) = Y$ gilt. Ferner kann man aus einer beliebigen Abbildung $f : X \to Y$ leicht eine surjektive Abbildung machen. Dazu muss man nur Y durch $f(X)$ ersetzen. Präziser:
Ist $f : X \to Y$ beliebig, so ist die Abbildung

$$\tilde{f} : X \to f(X),\ \ \tilde{f}(x) := f(x),$$

surjektiv. Ist f von vornerherein surjektiv, so sind die beiden Abbildungen f und $\tilde{f}$ gleich im Sinne von Bemerkung 1.3.2.

ENDE – FOLGE 3

Definition **1.3.9.**
Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Der **Graph** von f ist definiert als

$$\Gamma_f := \Gamma(f) := \{(x, f(x)) \colon x \in X\} \subset X \times Y.$$

Definition **1.3.10.**
Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y' \to Z$ Abbildungen mit $Y \subset Y'$. Die **Verkettung** von g und f ist definiert als

$$g \circ f : X \xrightarrow{f} Y \subset Y' \xrightarrow{g} Z, (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Bemerkung **1.3.11.**

a) Die Verkettung ist *assoziativ*, d.h. sind

$$f : X \to Y,\ g : Y' \to Z,\ h : Z' \to W,$$

drei Abbildungen mit $Y \subset Y'$ und $Z \subset Z'$, so gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

b) Die Komposition ist **nicht** *kommutativ*, d.h. i.A. gilt $f \circ g \neq g \circ f$. Als Gegenbeispiel betrachte

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2;\ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 2x.$$

Definition **1.3.12.**
Es sei X eine Menge. Die **identische Abbildung** ist definiert durch

$$\mathrm{id}_X : X \to X,\ \mathrm{id}_X(x) = x.$$

Bemerkung **1.3.13.**
Ist $f : X \to Y$ eine beliebige Abbildung, so gilt $f \circ \mathrm{id}_X = f = \mathrm{id}_Y \circ f$.

***Satz* *und* *Definition* 1.3.14.**
Es sei $f : M \to N$ eine Abbildung.

a) Es sind äquivalent:

 1) f ist bijektiv.

 2) Es gibt eine Abbildung $g : N \to M$ so, dass

$$g(f(x)) = x \ \forall x \in M \text{ und } f(g(y)) = y \ \forall y \in N$$

 gilt. Insbesondere gilt also $g \circ f = \mathrm{id}_M$ und $f \circ g = \mathrm{id}_N$.
 Die Abbildung g heißt **Umkehrabbildung von f** und wird mit $g =: f^{-1}$ bezeichnet.

b) Falls f bijektiv ist, so ist f^{-1} eindeutig.

c) Ist $f : M \to N$ bijektiv, so ist auch $f^{-1} : N \to M$ bijektiv mit $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

BEWEIS. Im Video. ■

***Satz* 1.3.15.**
Es seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei injektive/surjektive/bijektive Abbildungen. Dann ist auch $g \circ f$ injektiv/surjektiv/bijektiv.

BEWEIS. Dies ist eine Übung. (→ Aufgabe 1.9) ■

ENDE – FOLGE 4

1.4 Ein rigoroser Mächtigkeitsbegriff

Definition **1.4.1.**

a) Eine Menge M heißt **gleichmächtig** zu einer Menge N, falls eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ existiert; $M \overset{\#}{\sim} N$.

b) Eine Menge heißt **abzählbar**, falls sie gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.

Satz **1.4.2.**
Es sei M eine endliche Menge mit $|M| = n$. Dann gilt $M \overset{\#}{\sim} \{1, 2, \dots, n\}$.

Beweis. Im Video. ■

Beispiel **1.4.3.**

a) Die Mengen $A := \{a, b, c, d\}$ und $B := \{1, 2, 3, 4\}$ sind gleichmächtig via $f : A \to B$, $f(a) = 1$, $f(b) = 2$, $f(c) = 3$ und $f(d) = 4$.

b) $\mathbb{N} \overset{\#}{\sim} \mathbb{N}_0$; vgl. Aufgabe 1.7.

c) $\mathbb{N} \overset{\#}{\sim} \mathbb{Z}$. Die Abbildungen hierzu werden im Video erläutert, Details in Aufgabe 1.11 erarbeitet.

d) $\mathbb{N} \overset{\#}{\sim} 2\mathbb{N}$ (Menge der geraden Zahlen) via $f(n) := 2n$.

e) $\mathbb{N} \overset{\#}{\sim} 2\mathbb{N} - 1$ (Menge der ungeraden Zahlen) via $f(n) := 2n - 1$.

f) $\mathbb{N} \overset{\#}{\sim} \mathbb{Q}$ via *Cantorschem Diagonalargument.*

Bemerkung **1.4.4.**
Mit diesen Begrifflichkeiten ist es nun möglich, Satz 1.1.8 rigoros zu beweisen. Dies geschieht im Video.

Ende – Folge 5

Bemerkung **1.4.5.**
An dieser Stelle diskutieren wir im Video *Hilberts Hotel*, ein Gedankenspiel zu Mächtigkeiten.

Folgerung **1.4.6.**
Es seien $(\mathcal{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abzählbare Mengen. Dann ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$ abzählbar.

Beweis. Dies ist Inhalt von Übungsaufgabe 1.12. ■

1.5 Vollständige Induktion

Im Video starten wir mit einem Motivationsbeispiel, einem einfachen *Murmelspiel*. Dieses führt uns auf folgende Vermutung:
Für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt: Die Summe der ersten n ungeraden Zahlen ist gleich der n-ten Quadratzahl.
Formaler lautet diese Vermutung:

$$\text{Es gilt: } \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2 \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Wir fragen uns nun, wie wir Behauptungen dieser Struktur beweisen können. Dafür benötigen wir eine
Axiomatische Beschreibung der natürlichen Zahlen.

a) *Forderung:* Zu jedem Paar $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt es $a, b \in \mathbb{N}$ mit
   1) $(a + b) + c = a + (b + c) \ \forall c \in \mathbb{N}$ und
   2) $a + b = b + a$.

b) *Definition:* Wir definieren

$$a < b :\Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{N} \colon a + x = b.$$

   Dann gilt für zwei beliebige $a, b \in \mathbb{N}$ eine der Alternativen

$$a < b, \ a = b \text{ oder } b < a.$$

c) *Forderung:* Es gibt eine kleinste natürliche Zahl, bezeichnet mit 1.

d) *Induktionsprinzip*:
   Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge, für die gilt
   1) $1 \in M$ und
   2) $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$.

   Dann ist $M = \mathbb{N}$.

Bemerkung 1.5.1.

a) *Zum Induktionsprinzip.*
   Wir können uns das Induktionsprinzip wie eine Kette nacheinander fallender Dominosteine vorstellen. Wenn $1 \in M$ ist, sagt das Induktionsprinzip, dass auch $2 \in M$ ist. Damit ist dann auch $3 \in M$ und so weiter. Im Video visualisieren wir diesen Gedankenprozess.

   Insbesondere muss die Aussage des Induktionsprinzips nicht für $1 \in M$ formuliert werden. Wir können auch folgende alternative Version formulieren:
   Es sei $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge der natürlichen Zahlen mit
   1') $m_1 \in M$, $m_1 \in \mathbb{N}$ *und*
   2') $x \in M \Rightarrow x + 1 \in M$.

Dann gilt $M := \{m_1, m_1 + 1, \ldots\} = \{n \in \mathbb{N} \colon n \geq m_1\}$.

b) *Zur Konstruktion.*
Wir können die natürlichen Zahlen mittels Mengen in abstrakter Form definieren. Dies geschieht wie folgt:

- $1 := \{\emptyset\}$.
- $2 := 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, 1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.
- $3 := 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, 1, 2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.
- Allgemein: $n + 1 := n \cup \{n\} = \{\emptyset, 1, \ldots, n\}$.

Das Induktionsprinzip erlaubt uns nun, ein weiteres wichtiges Beweisprinzip der Mathematik zu begründen: Das Prinzip der *vollständigen Induktion*. Wir werden dies nun an einigen Beispielen demonstrieren.

Beispiel **1.5.2 (*Gauß*).**
Es gilt $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.
Zunächst zeigen wir die Aussage für die kleinste mögliche natürliche Zahl: $1 \in \mathbb{N}$.

Induktionsanfang: $n = 1$.
In diesem Fall gilt $1 = \frac{2}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$. ✓

Induktionsvoraussetzung:
Wir nehmen an, dass wir die Aussage bereits für ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$ gezeigt haben.

Induktionsschluss: $n_0 \to n_0 + 1$.
Nun zeigen wir die Aussage für $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$.
Es gilt

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \ldots + n_0 + (n_0 + 1) &= (1 + 2 + 3 + \ldots + n_0) + (n_0 + 1) \\ &= \frac{n_0 \cdot (n_0 + 1)}{2} + (n_0 + 1) \\ &= \frac{(n_0 + 1) \cdot (n_0 + 2)}{2}. \checkmark \end{aligned}$$

Hierbei haben wir beim zweiten „=“-Zeichen die Induktionsvoraussetzung benutzt und beim letzten „=“-Zeichen den Term $(n_0 + 1)$ ausgeklammert und die Brüche zusammengefasst.

■

Beispiel **1.5.3 (*Murmelspiel*).**
Es gilt $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Induktionsanfang: $n = 1$.
Linke und rechte Seite ergeben hier beide 1. ✓

Induktionsvoraussetzung:
Wir nehmen an, dass wir die Aussage bereits für ein festes $n_0 \in \mathbb{N}$ gezeigt haben.

Induktionsschluss: $n \to n+1$.
Wir betrachten

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+(2(n+1)-1) &= 1+3+5+\ldots+(2n-1)+(2(n+1)-1) \\ &\overset{\text{IV}}{=} n^2+2n+2-1 \\ &= n^2+2n+1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

■

ENDE – FOLGE 6

Um Formulierungen wie $1+\ldots+n$ zu vermeiden, führen wir folgende Notationen ein.

Definition **1.5.4.**

- $a_1+\ldots+a_n =: \sum\limits_{j=1}^{n} a_j,\ n \in \mathbb{N}$. (**Summenzeichen**)
- $a_1 \cdot \ldots \cdot a_n =: \prod\limits_{j=1}^{n} a_j,\ n \in \mathbb{N}$. (**Produktzeichen**)

Bemerkung **1.5.5.**
Aus dieser Definition folgen sofort Regeln zur *Indexverschiebung*:

- $\sum\limits_{j=k}^{n} a_j = \sum\limits_{j=0}^{n-k} a_{j+k},\ n \in \mathbb{N},\ k \leq n.$
- $\prod\limits_{j=k}^{n} a_j = \prod\limits_{j=0}^{n-k} a_{j+k},\ n \in \mathbb{N},\ k \leq n.$

Wir geben nun ein weiteres Beispiel zur vollständigen Induktion und benutzen dabei diese neuen Notationen.

Beispiel **1.5.6.**
Es gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

BEWEIS.

Induktionsanfang: $n = 1$.
Es gilt $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2 = \sum\limits_{j=1}^{1} j^2$. ✓

Induktionsvoraussetzung:
Wir nehmen an, dass wir die Aussage bereits für ein festes $n \in \mathbb{N}$ gezeigt haben.

Induktionsschluss: $n \to n+1$.
Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &\overset{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)\cdot[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} \\ &= \frac{(n+1)\cdot(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \checkmark\end{aligned}$$

■

Als „kompliziertere“ Andwendung der Induktion zeigen wir nun

Satz 1.5.7.

Es sei M eine endliche Menge mit $|M| = n < \infty$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Beweis. Im Video. ■

1.6 Relationen

Wir beginnen mit einer genaueren Beleuchtung des kartesischen Produkts.

Bemerkung **1.6.1.**

Es seien $X_1, \dots, X_n$ Mengen. Wir betrachten die geordneten n-Tupel

$$x = (x_1, \dots, x_n) \text{ mit } x_1 \in X_1, \dots, x_n \in X_n.$$

Dies können wir genauer mit einer sogenannten *Auswahlfunktion*

$$x : \{1, \dots, n\} \to X_1 \cup \ldots \cup X_n,\ x(i) \in X_i,$$

formalisieren. Mit der Setzung $x_i := x(i)$ erhalten wir genau die obige Form.
Im Sinne der Gleichheit von Abbildungen erhalten wir nun

$$(x_1, \dots, x_n) = (x'_1, \dots, x'_n) \Leftrightarrow x_1 = x'_1, \dots, x_n = x'_n,$$

also genau die Aussage aus Bemerkung 1.1.10.
Für jedes i können wir nun eine *Projektion* auf die i-te Komponente durch

$$\pi_i : X_1 \times \ldots \times X_n \to X_i,\ \pi_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i,$$

definieren. Dies erleichtert oft die Notation und kann noch weitreichend verallgemeinert werden. Ist $X_i \neq \emptyset$ für alle $i = 1, \dots, n$, so erhält man $X_1 \times \ldots \times X_n \neq \emptyset$. Für den Spezialfall $X_1 = \ldots = X_n = X$ schreiben wir kurz $X_1 \times \ldots \times X_n = X^n$.

Das Produkt $X_1 \times \ldots \times X_n$ wird auch als „direktes Produkt" bezeichnet. Dieses direkte Produkt können wir nun nutzen, um Beziehungen zwischen Elementen $x, y \in X$ zu formalisieren.

Definition **1.6.2.**

Es sei X eine Menge. Eine **Relation** ist eine Teilmenge $\mathcal{R} \subset X \times X$. Zwei Elemente $x, y \in X$ **stehen in Relation**, falls $(x, y) \in \mathcal{R}$ gilt. Wir schreiben

$$x \overset{\mathcal{R}}{\sim} y :\Leftrightarrow x \sim y :\Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{R},$$

und identifizieren im Folgenden häufig $\mathcal{R}$ mit $\sim$.

Definition **1.6.3.**

Eine Relation $\sim$ auf X heißt **Äquivalenzrelation**, wenn für beliebige $x, y, z \in X$ gilt:

a) $\sim$ ist **reflexiv**: $\forall x \in X : x \sim x$.

b) $\sim$ ist **symmetrisch**: $\forall x, y \in X : x \sim y \Rightarrow y \sim x$.

c) $\sim$ ist **transitiv**: $\forall x, y, z \in X : x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

Wir sagen: x **ist äquivalent zu** y (bzgl. $\sim$).

Beispiel **1.6.4.**

Die Relation $\overset{\#}{\sim}$ ist eine Äquivalenzrelation, was sofort aus den Sätzen 1.3.14 und 1.3.15 folgt.

ENDE – FOLGE 7

Definition **1.6.5.**
Es sei X eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt **Äquivalenzklasse von $\sim$**, falls gilt:

a) $A \neq \emptyset$.

b) $x, y \in A \Rightarrow x \sim y$.

c) $x \in A, y \in X, x \sim y \Rightarrow y \in A$.

Für $x \in X$ bezeichnen wir die **Äquivalenzklasse von x bezüglich $\sim$** mit $[x]_\sim$.

Bemerkung **1.6.6.**
Für $[x]_\sim \subset X$ gilt definitionsgemäß

a) $x, y \in [x]_\sim \Rightarrow x \sim y$.

b) $x \in [x]_\sim, y \in X, x \sim y \Rightarrow y \in [x]_\sim$.

Beispiel **1.6.7.**

a) $X := \mathbb{R}$, $x \sim y :\Leftrightarrow x = y$.
$[x]_\sim = \{a \in \mathbb{R} \colon a \sim x\} = \{a \in \mathbb{R} \colon a = x\} = \{x\}$.

b) $X := \mathbb{R}$, $x \sim y :\Leftrightarrow x^2 = y^2$.
$[x]_\sim = \{a \in \mathbb{R} \colon a \sim x\} = \left\{a \in \mathbb{R} \colon a^2 = x^2\right\}$,
$[42]_\sim = \left\{a \in \mathbb{R} \colon 42^2 = x^2\right\} = \{-42, 42\}$.

c) $X := \mathcal{P}(\mathbb{R})$, $A \sim B :\Leftrightarrow A \overset{\#}{\sim} B$.
$[A]_\sim = \left\{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon B \overset{\#}{\sim} A\right\}$,
$[\{\sqrt{2}\}]_\sim = \left\{B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \colon B \overset{\#}{\sim} \{\sqrt{2}\}\right\} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$.

d) $X := \mathbb{R}$, $x \sim y :\Leftrightarrow x < y$.
Dies ist keine Äquivalenzrelation, da $\sim$ nicht reflexiv ist. Wir können allerdings auch hier *Relationsklassen* bestimmen; diese sind allerdings abhängig von der „Reihenfolge“ der Relation. Zum Beispiel gilt

$$[0]_{\sim,r} := \{x \in \mathbb{R} \colon x \sim 0\} = \{x \in \mathbb{R} \colon x < 0\} = (-\infty, 0),$$

aber andererseits gilt

$$[0]_{\sim,l} := \{x \in \mathbb{R} \colon 0 \sim x\} = \{x \in \mathbb{R} \colon 0 < x\} = (0, \infty)$$

mit $[0]_{\sim,r} \neq [0]_{\sim,l}$. Dieses Phänomen kann bei Äquivalenzrelationen **nicht** vorkommen.

Satz 1.6.8.
Es sei $\mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation, repräsentiert durch $\sim$, auf einer Menge X. Dann gilt:

a) Jedes $a \in X$ gehört zu *genau einer* Äquivalenzklasse.

b) Für zwei beliebige Äquivalenzklassen A, A' gilt *entweder* $A = A'$ *oder* $A \cap A' = \emptyset$.

Beweis. Im Video. ■

Beispiel 1.6.9.
Wir betrachten auf der Menge $M := \{0, 1, 2, 3, 4\}$ die Abbildung

$$f : M \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^2 - 4x.$$

Dann nimmt f folgende Werte an:

$$f(M) = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{0, -3, -4, -3, 0\} = \{0, -3, -4\}.$$

Auf diese Weise erhalten wir also eine Partition von M durch die Urbildabbildung f^{-1}, nämlich gerade

$$P_M := \left\{f^{-1}(0), f^{-1}(-3), f^{-1}(-4)\right\} = \{\{0, 4\}, \{1, 3\}, \{2\}\}.$$

Aus dieser Partition können wir nun eindeutige eine Äquivalenzrelation auf der Menge $M \times M$ gewinnen, indem wir gerade alle trivialen Tupel (x, x) und alle passenden Paare aus P_M bilden:

$$\sim_f := \left\{ \underbrace{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4)}_{\text{Triviale Tupel.}}, \underbrace{(0,4), (4,0)}_{\text{Aus } \{0,4\}.}, \underbrace{(1,3), (3,1)}_{\text{Aus } \{1,3\}.} \right\}$$

Bemerkung 1.6.10.
Jede Äquivalenzrelation R auf einer Menge X generiert also eine *Partition* von X in disjunkte Äquivalenzklassen. Diese Äquivalenzklassen betrachten wir als Elemente einer neuen Menge, die wir mit X/R bezeichnen. X/R heißt **Quotientenmenge** von X nach der Äquivalenzrelation R. Die Elemente von X/R sind also nur spezielle Teilmengen von X. Wir können nun jedem Element $a \in X$ die Äquivalenzklasse A_a zuordnen, wodurch wir eine Abbildung

$$X \to X/R,\ a \mapsto A_a,$$

erhalten.
Das Urbild eines Elements $A \in X/R$ ist dann wieder genau A, allerdings aufgefasst als Teilmenge von X. Jedes $a \in A$ heißt dann *Repräsentant* der Äquivalenzklasse A. Im Allgemeinen haben wir **keine** Möglichkeit, einen speziellen Repräsentanten auszuzeichnen; dies ist jedoch auch gar nicht im Sinne dieses Konzepts.

1.7 Übungsaufgaben

***Aufgabe* 1.1.** [$*$]

Es seien A und B Mengen. Zeigen Sie: $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

***Aufgabe* 1.2.**

Bestimmen Sie die Mächtigkeiten der folgenden Mengen.

a) $M_1 := \{x \in \mathbb{N} \colon \exists k \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = k^2 \text{ und } x \leq 100\}$

b) $M_2 := \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \colon 0 \leq m \leq 5,\ n \leq 10,\ n - m > 8\}$

***Aufgabe* 1.3.**

Beweisen Sie Satz 1.2.2.

Hinweis zu c) und d): *Zeigen Sie für drei Aussagen A,B und C die Formeln* $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ *und* $A \wedge \neg(B \vee C) = (A \wedge \neg B) \wedge (A \wedge \neg C)$ *für die ersten Gleichheiten und finden Sie analoge Formeln für die zweiten Gleichungen. Damit folgt dann leicht die Aussage.*

***Aufgabe* 1.4.**

Stellen Sie die Wahrheitstafel für folgende Formeln auf.

a) $\neg A \vee \neg B$.

b) $\neg A \wedge \neg B$.

***Aufgabe* 1.5.** [$*$]

Zeigen oder widerlegen Sie:

a) $\sqrt{n}$ ist für alle ungeraden natürlichen Zahlen n irrational.

b) x^2 ist für alle irrationalen Zahlen x irrational.

c) $n(n-1)$ ist für alle natürlichen Zahlen n eine gerade Zahl.

***Aufgabe* 1.6.** [$*$]

Wir betrachten eine Abbildung $f : X \to Y$.

a) Es sei $X := \mathcal{P}(\{a, b, c, d\})$, $Y := \mathbb{N}$ und $f(A) := |A| + 1$. Bestimmen Sie $f(X)$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}(\emptyset)$ und $f^{-1}(\{1, 3\})$.

b)
   1) Zeigen Sie allgemein $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subset X$.
   Hinweis: *Diese Abbildung f hat nichts mit der konkreten Abbildung f aus Teil a) zu tun.*

   2) Gilt eine entsprechende Aussage auch für $f(A \cap B)$?

Aufgabe 1.7. [∗]

Finden Sie eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 1.8. [∗]

Es seien M und N zwei endliche Mengen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$\mathrm{Abb}(M,N) := \{f\colon M \to N\colon f \text{ ist eine Abbildung}\}$$

endlich ist und bestimmen Sie deren Mächtigkeit.

Aufgabe 1.9.

Beweisen Sie Satz 1.3.15.

Aufgabe 1.10. [∗]

Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f nicht surjektiv ist.

Aufgabe 1.11.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{Z},\ \varphi(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & : \quad n \text{ gerade oder } n = 0 \\ -\frac{1}{2}(n+1) & : \quad n \text{ ungerade} \end{cases},$$

bijektiv ist.

b) Bestimmen Sie explizit die Abbildungsvorschrift der Abbildung f aus dem Video zu Beispiel 1.4.3, c).

Aufgabe 1.12. [∗]

Beweisen Sie Folgerung 1.4.6.

Aufgabe 1.13.

Zeigen Sie $\sum\limits_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 1.14.

Es sei $q \in \mathbb{Q}$ mit $q > 0$ und $\boldsymbol{q \neq 1}$. Zeigen Sie $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 1.15. [∗]

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ endliche Mengen. Bestimmen Sie die Anzahl aller möglichen Auswahlfunktionen $x : \{1, \ldots, n\} \to X_1 \cup \ldots \cup X_n$.

***Aufgabe* 1.16.** [*]

Es sei $M := \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Bestimmen Sie jeweils die kleinste Äquivalenzrelation auf M mit

a) $1 \sim 2$,

b) $1 \sim 2$ und $3 \sim 4$ bzw.

c) $1 \sim 2$ und $2 \sim 3$,

indem Sie alle Paare (a, b) mit $a \sim b$ auflisten.

***Aufgabe* 1.17.**

Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die Relation

$$x \sim_f y :\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

eine Äquivalenzrelation ist.

***Aufgabe* 1.18.**

Wir definieren eine Relation $\sim$ auf den reellen Zahlen durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert wird. Bestimmen Sie ferner $[2]_\sim$.

***Aufgabe* 1.19.**

Wir betrachten die Relation $\sim$ auf den ganzen Zahlen, die definiert ist durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow x + y \text{ ist gerade.}$$

Zeigen Sie, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation definiert wird.

1.8 Lösungshinweise

***Hinweis zu Aufgabe* 1.1**

Zeige „$\subset$" und „$\supset$" getrennt voneinander **(!)**. Ein Venn-Diagramm der Situation mit $A \cap B \neq \emptyset$ kann hilfreich sein.

***Hinweis zu Aufgabe* 1.5**

Teil a) und Teil b) sind falsch **(!)**, Teil c) kann durch die Fallunterscheidung „n gerade" oder „n ungerade" bewiesen werden **(!)**.

***Hinweis zu Aufgabe* 1.6**

Teil a) ist simples Einsetzen **(!)**. Zeige bei Teil b1) wieder beide Inklusionen getrennt **(!)**. Bei b2) ist die analoge Aussage gerade $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, für die man ein einfaches **(!)** Gegenbeispiel finden kann.

***Hinweis zu Aufgabe* 1.7**

Nicht zu kompliziert denken!

***Hinweis zu Aufgabe* 1.8**

Überlege, dass jede Abbildung $f : M \to N$ eindeutig als Teilmenge von $M \times N$ aufgefasst werden kann und umgekehrt jedes k-Tupel in $M \times N$ eindeutig eine Abbildung definiert **(!)**. Zähle dann die Anzahl dieser k-Tupel. **(!)**

***Hinweis zu Aufgabe* 1.10**

Nimm an, dass es eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gebe. Definiere $M \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ durch $M := \{n \in \mathbb{N} \colon n \notin f(n)\}$ und betrachte jetzt die Fälle „$n \in M$" und „$n \notin M$". **(!)**

***Hinweis zu Aufgabe* 1.12**

Interpretiere die Situation im Sinne von *Hilbert's Hotel*: Die Menge $\mathcal{A}_i$ entspreche also dem i-ten Bus. Nun leere zunächst alle *geraden* Zimmer im Hotel **(!)** und verteile die Gäste wie folgt: Die Gäste aus dem Bus $\mathcal{A}_i$ ziehen in die Zimmer, deren Zimmernummer durch 2^i, aber nicht durch 2^{i+1} teilbar sind. Diese Methode trifft tatsächlich alle freien Zimmer **(!)** und der Beweis ist einfacher zu führen, als bei der Methode der Primzahlpotenzen. Nun formalisiere diesen Prozess und beziehe die Ergebnisse auf die abstrakte Ausgangssituation zurück. **(!)**

***Hinweis zu Aufgabe* 1.15**

Vielleicht hilft Aufgabe 1.8.

***Hinweis zu Aufgabe* 1.16**

Zeichne ein Bild wie in Definition 1.6.3 und schaue, welche Pfeile fehlen.

2 Die reellen Zahlen

2.1 Körper

Definition **2.1.1.**
Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge. Eine **Verknüpfung / algebraische Operation** auf M ist eine Abbildung $\circ\colon M \times M \to M$.
D.h.: Je zwei Elmenten $x, y \in M$ wird ein Element $\circ(x, y) =: x \circ y \in M$ zugeordnet.

Definition **2.1.2.**
Es sei K eine nicht-leere Menge mit zwei algebraischen Operationen „$+$“ und „$\cdot$“, die den folgenden Regeln genügen:

(K_1) $x + y = y + x,\ x \cdot y = y \cdot x,\ \forall x, y \in K$. (*Kommutativgesetz*)

(K_2) $(x + y) + z = x + (y + z),\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z),\ \forall x, y, z \in K$. (*Assoziativgesetz*)

(K_3) $\exists 0 \in K\colon 0 + a = a\ \forall a \in K$. (*Neutrales Element der Addition*)

(K_4) $\forall a \in K\colon \exists x \in K\colon a + x = 0$. (*Inverses Element der Addition*)

(K_5) $\exists 1 \in K \setminus \{0\} : 1 \cdot a = a\ \forall a \in K$. (*Neutrales Element der Multiplikation*)

(K_6) $\forall a \in K \setminus \{0\} : \exists x \in K\colon a \cdot x = 1$. (*Inverses Element der Multiplikation*)

(K_7) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c\ \forall a, b, c \in K$. (*Distributivgesetz*)

Dann heißt K ein **Körper**.
$0 \in K$ heißt **neutrales Element der Addition / Null**.
$1 \in K$ heißt **neutrales Element der Multiplikation / Eins**.
$x \in K$ aus (K_4) heißt **inverses Element der Addition**; $x =: -a$.
$x \in K$ aus (K_6) heißt **inverses Element der Multiplikation**; $x =: a^{-1}$.

Satz **2.1.3.**
Die obigen vier Elemente $(0, 1, -a, a^{-1})$ sind eindeutig.

Beweis. Dies ist eine Übung ($\to$ Aufgabe 2.1). ■

Bemerkung **2.1.4.**
In einem Körper

- hat die Gleichung $a + x = 0$ genau eine Lösung, nämlich $x = -a$.
- hat die Gleichung $a \cdot x = 1$ für $a \neq 0$ genau eine Lösung, nämlich $x = a^{-1}$.

Allgemeiner:

- Sind $a, b \in K$, so hat die Gleichung $a + x = b$ genau eine Lösung, nämlich

$$x = b + (-a) = b - a.$$

- Sind $a, b \in K,\ a \neq 0$, so hat die Gleichung $a \cdot x = b$ genau eine Lösung, nämlich

$$x = b \cdot a^{-1} = \frac{b}{a}.$$

***Beispiel* 2.1.5.**

- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper.
- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist **kein** Körper, denn zu $2 \in \mathbb{Z}$ existiert kein $x \in \mathbb{Z}$ mit $2 \cdot x = 1$.

***Definition* 2.1.6.**
Für $a \in K$ und $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die **Potenz**

$$a^n := \prod_{j=1}^{n} a.$$

Für $a \neq 0$ definieren wir $a^{-n} := \left(\frac{1}{a}\right)^n$. Zudem setzen wir für $a \neq 0$ noch $a^0 := 1$.

***Satz* 2.1.7.**
Es gilt für alle $a, b \in K$, $m, n \in \mathbb{Z}$ und $a \neq 0, b \neq 0$:

- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$.
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$.
- $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$.

BEWEIS. Dies ist eine Übung ($\rightarrow$ Aufgabe 2.3). ■

ENDE – FOLGE 8

2.2 Angeordnete Körper

Definition **2.2.1.**
Ein Körper K heißt **angeordnet**, wenn es eine Menge $P \subset K$ gibt, sodass für jedes $a \in K$ genau eine der folgenden Aussagen gelten:

(O_1) $a \in P, \ a = 0, \ -a \in P.$

Ferner soll gelten

(O_2) $a, b \in P \Rightarrow a + b, \ a \cdot b \in P.$

Ein Element $a \in K$ heißt **positiv**, wenn $a \in P$ gilt.
Ein Element $a \in K$ heißt **negativ**, wenn $-a \in P$ gilt.
P heißt **Menge der positiven Zahlen**.

Beispiel **2.2.2.**
$\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper mit $P := \left\{x \in \mathbb{Q} \colon x \overset{\mathbb{Q}}{>} 0\right\}$. Dabei ist die Relation „$x \overset{\mathbb{Q}}{>} 0$“ für $x := \frac{m}{n}$, m, n teilerfremd, definiert durch

$$x \overset{\mathbb{Q}}{>} 0 :\Leftrightarrow m \in \mathbb{N}, \ n \in \mathbb{N}.$$

Definition **2.2.3.**
Es sei K ein angeordneter Körper. Ferner seien $a, b \in K$.

- a heißt **kleiner als** $\boldsymbol{b}$, $a < b$, wenn $b - a \in P$ gilt.
- a heißt **kleiner oder gleich** $\boldsymbol{b}$, $a \leq b$, wenn $a < b$ oder $a = b$ gilt.
- a heißt **größer als** $\boldsymbol{b}$, $a > b$, wenn $b < a$ gilt.
- a heißt **größer oder gleich** $\boldsymbol{b}$, $a \geq b$, wenn $a > b$ oder $a = b$ gilt.

Insbesondere bedeutet $a > 0$, dass $a \in P$ gilt.

Wir beweisen nun einige wichtige Regeln.
Satz **2.2.4.**
Es sei K ein angeordneter Körper. Dann gelten:

a) Für $a, b \in K$ gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b, \ a = b, \ a > b$.

b) Sind $a, b, c \in K$ mit $a < b$ und $b < c$, so gilt $a < c$.

c) Sind $a, b, c \in K$ mit $a < b$, so gilt $a + c < b + c$.

d) Sind $a, b, c \in K$ mit $a < b$ und $c > 0$, so gilt $ac < bc$.
Ist $a < b$ und $c < 0$, so gilt $ac > bc$.

e) Sind $a, b \in K$ mit $0 < a < b$, so gilt $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

f) Ist $a \in K \setminus \{0\}$, so gilt $a^2 > 0$. Insbesondere ist $1 > 0$.

g) Sind $a, b \in K$ mit $a < b$, so existiert ein $c \in K$ mit $a < c < b$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Folgerung **2.2.5.**

a) Aus Satz 2.2.4 g) folgt, dass ein angeordneter Körper immer unendlich viele Elemente enthält.

b) Sind $a, b \in K$ mit $a < b + \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in K$, $\varepsilon > 0$. Dann gilt $a \leq b$.

Beweis. Im Video. ■

Definition **2.2.6.**
Es sei K ein angeordneter Körper und $a, b \in K$ mit $a < b$. Dann setzen wir:

- $[a, b] := \{x \in K : a \leq x \leq b\}$. (**Abgeschlossenes Intervall**)
- $(a, b) := \{x \in K : a < x < b\}$. (**Offenes Intervall**)
- $[a, b) := \{x \in K : a \leq x < b\}$. (**Rechts halboffenes Intervall**)
- $(a, b] := \{x \in K : a < x \leq b\}$. (**Links halboffenes Intervall**)
- $(-\infty, b] := \{x \in K : x \leq b\}$.
- $(-\infty, b) := \{x \in K : x < b\}$.
- $[a, \infty) := \{x \in K : x \geq a\}$.
- $(a, \infty) := \{x \in K : x > a\}$.
- $(-\infty, \infty) := K$.

Definition **2.2.7.**
Es sei K ein angeordneter Körper und $A \subset K$.

- $m \in A$ heißt **kleinstes Element von** $\boldsymbol{A}$, wenn $m \leq x$ für alle $x \in A$ gilt; $m := \min A$.
- $M \in A$ heißt **größtes Element von** $\boldsymbol{A}$, wenn $M \geq x$ für alle $x \in A$ gilt; $M := \max A$.

Beispiel **2.2.8.**
Wir betrachten $I := [a, b) \subset K$. Dann gilt $a = \min I$, aber I hat *kein* größtes Element.

Satz **2.2.9.**
Es sei K ein angeordneter Körper und $A := \{x_1, \ldots, x_n\}$ eine *endliche* Teilmenge von K. Dann hat A ein kleinstes und ein größtes Element.

Beweis. Im Videokurs. ■

Wir nehmen ab jetzt den folgenden **pragmatischen Standpunkt** ein:
Aus der Schule ist ein intuitiver Begriff der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ vorhanden. Diesen nehmen wir von nun an als Arbeitsgrundlage an, werden aber in Abschnitt 2.5 noch einmal auf Details zu sprechen kommen. Wichtig ist, dass in diesem intuitiven Standpunkt $\mathbb{R}$ ein angeordneter Körper ist, in dem die positiven Zahlen gerade die bekannten positiven Zahlen aus der Schule sind. Ferner gilt in diesem Standpunkt $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

***Satz* 2.2.10 (*Kleiner Wohlordnungssatz*).**
Es sei A eine nicht-leere Teilmenge von $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$. Dann hat A ein kleinstes Element.

Beweis. Im Videokurs. ■

Ende – Folge 9

Nun führen wir auf angeordneten Körpern die *Betragsfunktion* ein.
***Definition* 2.2.11.**
Es sei K ein angeordneter Körper und $x \in K$. Dann heißt

$$|x| := \begin{cases} x & : \quad x \geq 0 \\ -x & : \quad x < 0 \end{cases}$$

der **Absolutbetrag von x**.
Weiter heißt

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1 & : \quad x > 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \\ -1 & : \quad x < 0 \end{cases}$$

das **Vorzeichen / Signum von x**.

***Satz* 2.2.12.**
Es sei K ein angeordneter Körper und $a, x, y, r \in K$ mit $r > 0$. Dann gelten:

a) $|x| \geq 0$ und $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

b) $|-x| = |x|$ und $-|x| \leq x \leq |x|$.

c) $|xy| = |x| \cdot |y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ für $y \neq 0$.

d) $|x + y| \leq |x| + |y|$. (**Dreiecksungleichung**)

e) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

f) $|x - a| \leq r \Leftrightarrow a - r \leq x \leq a + r$.

g) $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$.

In d) und e) steht „=“ genau dann, wenn $x \cdot y \geq 0$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Beispiel **2.2.13.**
Wir geben eine Möglichkeit an, die Menge $M := \{x \in \mathbb{R} \colon |x-2| < |x-3|\}$ zu beschreiben. Kritische Stellen, an denen die Beträge die Vorzeichen wechseln, sind $x_1 = 2$ und $x_2 = 3$.

Fall 1: $x < 2$.
Dann ist $|x-2| = 2-x$ und $|x-3| = 3-x$, also schreibt sich die definierende Ungleichung wie folgt:

$$x \in M \Leftrightarrow 2 - x < 3 - x \Leftrightarrow 2 < 3.$$

Dies gilt immer, also erhalten wir als erste „Teillösungsmenge“ $\mathbb{L}_1 := (-\infty, 2)$.

Fall 2: $x \geq 2$ und $x < 3$.
Dann ist $|x-2| = x-2$ und $|x-3| = 3-x$. Somit gilt

$$x \in M \Leftrightarrow x - 2 < 3 - x \Leftrightarrow x < \frac{5}{2}.$$

Damit haben wir $\mathbb{L}_2 := [2, \frac{5}{2})$.

Fall 3: $x \geq 3$.
Dann ist $|x-2| = x-2$ und $|x-3| = x-3$. Nun gilt

$$x \in M \Leftrightarrow x - 2 \leq x - 3 \Leftrightarrow -2 \leq -3.$$

Dies gilt nie, daher ist $\mathbb{L}_3 = \emptyset$.

Somit erhalten wir insgesamt $M = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = (-\infty, \frac{5}{2})$.

2.3 Einige Summenformeln

Für $q \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ wollen wir eine Formel für $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k$ herleiten.

***Satz* 2.3.1.**

Für $q \neq 1$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}. \text{ (\textbf{Geometrische Summenformel})}$$

Beweis. Im Videokurs. ■

***Folgerung* 2.3.2.**

a) Für $x \neq y$, $x \neq 0$, gilt

$$\left(1 - \frac{y}{x}\right) \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{y^k}{x^k} = 1 - \frac{y^{n+1}}{x^{n+1}}.$$

b) Für $x \neq y$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k = \frac{x^{n+1} - y^{n+1}}{x - y}.$$

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Aus der Schule ist die *binomische Formel* bekannt:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2.$$

Wir suchen nun eine Formel für $(x + y)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

***Definition* 2.3.3.**

a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir

$$\boldsymbol{n!} := \prod_{k=1}^{n} k, \ 0! := 1.$$

$n!$ heißt die **Fakultät von $\boldsymbol{n}$**.

b) Für $n, k \in \mathbb{N}_0$, $k \leq n$, definieren wir

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}.$$

$\binom{n}{k}$ heißt **Binomialkoeffizient**.

Satz 2.3.4.

a) Es gilt $n! = n \cdot (n-1)!$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Für $k \neq 0$ gilt $\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$.

Beweis. Übungsaufgabe. ∎

Ende – Folge 10

Satz 2.3.5.

a) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

b) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

c) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (*Symmetrieeigenschaft*)

d) $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, $k = 1, \ldots, n$. (*Additionstheorem*)

Beweis. Im Videokurs. ∎

Folgerung 2.3.6.
Das Additionstheorem und Satz 2.3.5 im Allgemeinen liefern das in Abbildung 2.1 dargestellte – als *Pascal'sches Dreieck* bekannte – Berechnungsschema für $\binom{n}{k}$.

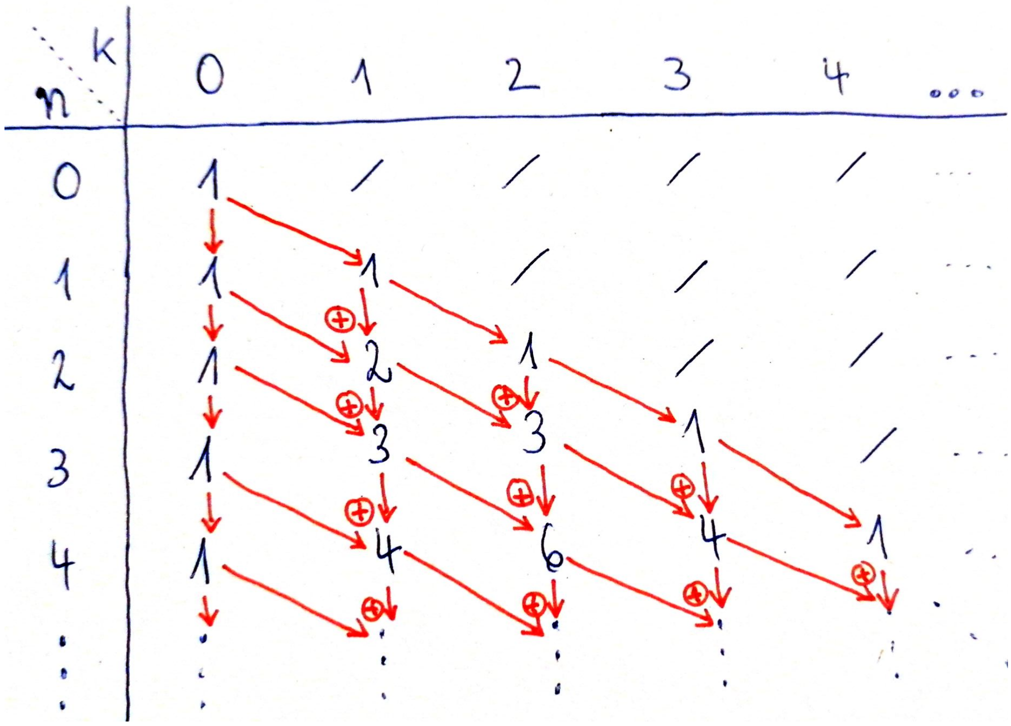


Abbildung 2.1: Das Pascal'sche Dreieck.

Nun kommen wir zur angekündigten Formel für $(x+y)^n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

***Theorem* 2.3.7.**
Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Beweis. Im Videokurs. ∎

***Folgerung* 2.3.8.**

a) $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Beweis.

a) Setze $y = 1$ in Satz 2.3.7.

b) Setze $x = y = 1$ in Satz 2.3.7.

∎

Als wichtige Anwendung beweisen wir
***Satz* 2.3.9 (*Bernoullische Ungleichung*).**
Für $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Beweis. Im Videokurs. ∎

***Folgerung* 2.3.10.**

a) Für $x \neq 0$, $x > -1$, und $n \geq 2$ gilt $(1+x)^n > 1 + nx$.

b) Es gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 1 + nx$$

für $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem *begrifflichen Beweis* von Satz 1.5.7.
***Bemerkung* 2.3.11.**
Es sei N eine endliche Menge. Wir setzen $n := |N|$. Da N endlich ist, ist $n \in \mathbb{N}_0$. Es sei nun

$$N_j := \{M \subset N \colon\ |M| = j\}\,,\ j = 0, \ldots, n,$$

die Menge der j-elementigen Teilmengen von N. Damit gilt

$$\mathcal{P}(N) = \sum_{j=0}^{n} N_j,$$

also folgt aus Satz 1.1.8 die Gleichheit

$$|\mathcal{P}(N)| = \sum_{j=0}^{n} |N_j| \,. \tag{$*$}$$

Für $j \in \{0, \ldots, n\}$ gibt es nun jeweils $\binom{n}{j}$ Möglichkeiten, eine j-elementige Teilmenge aus N auszuwählen. Somit gilt

$$|N_j| = \binom{n}{j}, \; j = 0, \ldots, n.$$

Mit ($*$) folgt nun

$$|\mathcal{P}(N)| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \overset{2.3.8b)}{=} 2^n = 2^{|N|}.$$

ENDE – FOLGE 11

2.4 Vollständigkeit

$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind beides angeordnete Körper und es gilt $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$. Wir fragen uns: Gibt es einen prinzipiellen Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$?

Definition **2.4.1.**
Es sei K ein angeordneter Körper und $A \subset K$.

- A heißt **nach oben beschränkt**, wenn es ein $M \in K$ gibt mit $x \leq M$ für alle $x \in A$. M heißt dann **obere Schranke** von A.
- A heißt **nach unten beschränkt**, wenn es ein $m \in K$ gibt mit $x \geq m$ für alle $x \in A$. m heißt dann **untere Schranke** von A.
- A heißt **beschränkt**, wenn A nach oben *und* nach unten beschränkt ist.

Bemerkung **2.4.2.**
Offenbar gilt:

$$A \text{ beschränkt} \Leftrightarrow \exists S \in K\colon\ |x| \leq S \ \forall x \in A.$$

Man kann $S := \max\{|m|, |M|\}$ wählen.

Beispiel **2.4.3.**
Wir betrachten die Menge

$$A := \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\} \subset \mathbb{Q}.$$

Dann sind beispielsweise $20, 42, 5127$ obere Schranken von A und $\frac{1}{4}, 4, 10$ untere Schranken der Menge A.
Beobachtung: **Obere bzw. untere Schranken sind im Allgemeinen nicht eindeutig!**

Diese Beobachtung fassen wir wie folgt:
Bemerkung **2.4.4.**

a) Ist $M \in K$ eine obere Schranke von A und $M' > M$, so ist auch M' auch eine obere Schranke von A.

b) Ist $m \in K$ eine untere Schranke von A und $m' < m$, so ist m' auch eine untere Schranke von A.

In obigem Beispiel ist allerdings 10 die *größte untere Schranke* und 20 die *kleinste obere Schranke* von A. Diese Beobachtung wollen wir nun systematisieren.
Definition **2.4.5.**
Es sei K ein angeordneter Körper und $A \subset K$ eine nichtleere Menge.

a) Ist A nach oben beschränkt und besitzt die Menge aller oberen Schranken von A ein kleinstes Element S, so heißt S **kleinste obere Schranke / Supremum** von A; $S := \sup A$.

b) Ist A nach unten beschränkt und besitzt die Menge aller unteren Schranken von A ein kleinstes Element s, so heißt s **größte untere Schranke / Infimum** von A; $s := \inf A$.

c) Ist A nicht nach oben / nach unten beschränkt, so schreiben wir formal $\sup A := \infty$ / $\inf A := -\infty$.

***Satz* 2.4.6.**
Es sei K ein angeordneter Körper und $A \subset K$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge. Dann sind äquivalent:

a) $S = \sup A$.

b) S ist obere Schranke von A und für jede weitere obere Schranke S' von A gilt $S' \geq S$.

c) $\forall x \in A\colon [x \leq S \wedge \forall \varepsilon > 0 \; \exists x' \in A\colon x' > S - \varepsilon]$.

BEWEIS. Übungsaufgabe. ∎

***Bemerkung* 2.4.7.**
Es sei K ein angeordneter Körper und $A \subset K$ eine nichtleere, nach oben beschränkte Menge. Dann gelten:

a) Besitzt A ein größtes Element $\max A \in A$, so ist $\max A = \sup A$.

b) Ist $S \in K$ eine obere Schranke von A und $S \in A$, so ist $S = \sup A$.

Eine entsprechende Aussage gilt auch für $\inf A$ bzw. $\min A$.

***Beispiel* 2.4.8.**

a) $A := [a, b] \subset \mathbb{R}$. $\sup A = b \in A$, $\max A = b$, $\inf A = a \in A$, $\min A = a$.

b) $A := (a, b) \subset \mathbb{R}$. $\sup A = b \notin A$, $\inf A = b \notin A$. Somit existieren Minimum und Maximum von A nicht.

c) $A := [a, b) \subset \mathbb{R}$. $\sup A = b \notin A$, $\inf A = a \in A$. Somit existiert kein Maximum von A und es gilt $\min A = a$.

***Beispiel* 2.4.9.**
Wir definieren

$$A := \left\{x \in \mathbb{Q}\colon x^2 < 2\right\} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Im Videokurs zeigen wir nun, dass A nach oben beschränkt ist, aber kein Supremum in $\mathbb{Q}$ besitzt.

Dieses Beispiel motiviert nun folgende
***Definition* 2.4.10.**
Ein angeordneter Körper heißt **vollständig**, wenn jede nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt.

Satz 2.4.11.
$\mathbb{Q}$ ist nicht vollständig.

Beweis.
Die Menge A aus Beispiel 2.4.9 ist nach oben beschränkt, besitzt aber in $\mathbb{Q}$ kein Supremum. ■

Dieser Satz wird im nächsten Abschnitt den entscheidenden Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ markieren und damit die Eingangsfrage dieses Abschnitts beantworten.
Zum Abschluss dieses Abschnitts formulieren wir Definition 2.4.10 für nach unten beschränkte Mengen um.

Satz 2.4.12.
Es sei K ein vollständig angeordneter Körper. Dann hat jede nach unten beschränkte Menge $A \in K$ ein Infimum.

Beweis. Im Videokurs. ■

Ende – Folge 12

2.5 Der Körper der reellen Zahlen

Man kann zeigen, dass es prinzipiell (bis auf Isomorphie) genau einen vollständig angeordneten Körper gibt. Dies ist der **Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$**.
Man hat nun zwei Möglichkeiten:

- Man konstruiert diesen Körper (*langwierig und technisch*).
- Man führt diesen axiomatisch ein.

Wir gehen den letzteren Weg und bauen die Analysis auf den Körper-, Anordnungs- und Vollständigkeitsaxiomen auf.

Bemerkung **2.5.1.**
Ist K ein angeordneter Körper, so kann man jedem $n \in \mathbb{N}$ ein Element

$$n_K := \underbrace{1_K + \ldots + 1_K}_{n-\text{mal}} \in K$$

zuordnen. Hierdurch entsteht eine injektive Abbildung

$$\phi : \mathbb{N} \to K, \ \phi(n) := n_K.$$

In diesem Sinne kann man $\mathbb{N}$ als Teilmenge von K auffassen.
In der gleichen Weise kann man $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ als Teilmenge von K auffassen. Es ist also (bis auf Isomorphie) $\mathbb{Q}$ der kleinste angeordnete Körper.

Definition **2.5.2.**
Ein angeordneter Körper heißt **archimedisch**, wenn es zu $a, b \in K$ mit $0 < a < b$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $\phi(n) \cdot a > b$.

Satz **2.5.3.**
Es sei K ein archimedischer Körper und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\phi(n)} < \varepsilon$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathbb{R}$ archimedisch ist. Dafür benötigen wir folgendes Resultat zu den natürlichen Zahlen.

Satz **2.5.4.**
$\mathbb{N}$ ist in $\mathbb{R}$ nach oben unbeschränkt.

Beweis. Im Videokurs. ■

Theorem **2.5.5.**
Der Körper der reellen Zahlen ist archimedisch.

Beweis. Im Videokurs. ■

Beispiel 2.5.6.
Wir betrachten die Menge

$$A := \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Wegen

$$0 \leq \frac{n}{n+1} \leq \frac{n+1}{n+1} = 1 \tag{$*$}$$

ist A beschränkt.

Behauptung 1: $\inf A = \frac{1}{2}$.
Beweis:
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$n \geq 1 \Longrightarrow 2n \geq n+1 \Longrightarrow \frac{n}{n+1} \geq \frac{1}{2}.$$

Wegen $\frac{1}{2} \in A$ folgt die Behauptung; es gilt sogar $\min A = \frac{1}{2}$. $\diamond_{\text{Beh. 1}}$

Behauptung 2: $\sup A = 1$.
Beweis:
Wegen ($*$) ist 1 eine obere Schranke. Zu $0 < \varepsilon < 1$ wählen wir $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, was wegen Satz 2.5.4 stets möglich ist. Nun setzen wir $x := \frac{n}{n+1} \in A$. Damit gilt

$$n\varepsilon > 1 - \varepsilon \text{ und } n = n + 1 - 1 > n + 1 - n\varepsilon - \varepsilon = (n+1) \cdot (1 - \varepsilon).$$

Hiermit folgt $x = \frac{n}{n+1} > 1 - \varepsilon$. Mit 2.4.6 folgt die Behauptung. $\diamond_{\text{Beh. 2}}$

ENDE – FOLGE 13

2.6 Wurzeln und Potenzen

Satz **2.6.1.**
Zu jedem $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$ und $x^n = a$; $x := \sqrt[n]{a} = a^{1/n}$.

BEWEIS. Im Videokurs. ∎

Für $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, haben wir in Definition 2.1.6 bereits die Potenzen a^z für $z \in \mathbb{Z}$ definiert. Wir wollen dies nun auf rationale Exponenten ausweiten.

Definition **2.6.2.**
Für $a > 0$ und $r := \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}$, m, n teilerfremd, setzen wir $a^r := a^{m/n} := (a^m)^{1/n}$.

ENDE – FOLGE 14

Nun zeigen wir zunächst, dass die Potenz unabhängig von der gewählten Darstellung des rationalen Exponenten ist.

Satz **2.6.3.**
Ist $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ mit $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, eine weitere Darstellung von r, so gilt mit $p = km$, $q = kn$, gerade

$$(a^m)^{1/n} = (a^p)^{1/q}.$$

BEWEIS.
Wir setzen $b := (a^m)^{1/n}$ und $c := (a^p)^{1/q}$. Dann gilt $b^n = a^m$ und wir erhalten

$$c^q = a^p = a^{km} = (a^m)^k = (b^n)^k = b^{nk} = b^q.$$

Nach Satz 2.6.1 ist die q-te Wurzel eindeutig, also folgt $b = c$ und dies ist gerade die Behauptung. ∎

Folgerung **2.6.4.**
Es gilt $(a^m)^{1/n} = (a^{1/n})^m$.

BEWEIS.
Es gilt

$$\left((a^m)^{1/n}\right)^n = a^m$$

und

$$\left((a^{1/n})^m\right)^n = (a^{1/n})^{m \cdot n} = \left((a^{1/n})^n\right)^m = a^m.$$

Die Eindeutigkeit der Wurzel aus Satz 2.6.1 liefert nun die Behauptung. ∎

Nun beweisen wir rigoros Potenzrechenregeln für rationale Exponenten.

***Theorem* 2.6.5.**
Für $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, und $r, s \in \mathbb{Q}$ gilt:

a) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$.

b) $a^r \cdot b^r = (ab)^r$.

c) $\left(\frac{1}{a}\right)^r = \frac{1}{a^r}$.

d) $(a^r)^s = a^{rs}$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Ende – Folge 15

2.7 Die AGM-Ungleichung

Definition **2.7.1.**

a) Für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$A(x_1, \dots, x_n) := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Diese Größe heißt **arithmetisches Mittel von $\boldsymbol{x_1, \dots, x_n}$**.

b) Für $x_1, \dots, x_n \geq 0$ setzen wir

$$G(x_1, \dots, x_n) := \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}.$$

Diese Größe heißt **geometrisches Mittel von $\boldsymbol{x_1, \dots, x_n}$**.

Bemerkung **2.7.2.**
Offenbar gilt

$$\min \{x_1, \dots, x_n\} \leq \begin{Bmatrix} A(x_1, \dots, x_n) \\ G(x_1, \dots, x_n) \end{Bmatrix} \leq \max \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Wir wollen nun diese beiden Größen in Relation setzen.

Theorem **2.7.3 (*AGM-Ungleichung*).**
Für $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ mit $x_1, \dots, x_n \geq 0$ gilt

$$G(x_1, \dots, x_n) \leq A(x_1, \dots, x_n).$$

Dabei steht das „=“-Zeichen genau dann, wenn alle x_k gleich sind.

Beweis. Im Videokurs. ∎

Ende – Folge 16

2.8 Dichtheit der rationalen Zahlen

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Dazu benötigen wir eine Vorbereitung.

Satz **2.8.1.**
Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ gibt es *genau* eine Zahl $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq x < m + 1$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Wir bezeichnen die Zahl m aus obigem Satz mit $[x]$.

Folgerung **2.8.2.**
Es gilt $[x] = \sup \{l \in \mathbb{Z} \colon l \leq x\} = \max \{l \in \mathbb{Z} \colon l \leq x\}$. D.h.: $[x]$ ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x.

Definition **2.8.3.**
$[x]$ heißt **Gauß-Klammer** von x.

Satz **2.8.4.**
Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$; d.h. in jedem Intervall (a, b) liegt mindestens eine rationale Zahl.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

ENDE – FOLGE 17

Wir interpretieren dies wie folgt: $\mathbb{Q}$ liegt **dicht** in $\mathbb{R}$, d.h. $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$.

Definition **2.8.5.**
Die Menge $\mathbb{I} := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ heißt **Menge der irrationalen Zahlen**.

Bemerkung **2.8.6.**
Wegen $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ folgt $\mathbb{I} \neq \emptyset$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer Aussage zur „Verteilung“ der irrationalen Zahlen in $\mathbb{R}$.

Satz **2.8.7.**
Zu $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ existiert ein $x \in \mathbb{I}$ mit $a < x < b$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Bemerkung **2.8.8.**

a) Die irrationalen Zahlen liegen ebenfalls dicht in $\mathbb{R}$. Daher existieren unendlich viele irrationale Zahlen.

b) Es existieren mehr irrationale Zahlen als rationale Zahlen.

2.9 Komplexe Zahlen

Die Gleichung $x^2 = -1$ hat wegen $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ keine reelle Lösung. Wir fragen uns daher: *Kann man den Körper $\mathbb{R}$ zu einem Körper $\mathbb{C}$ erweitern, sodass diese Gleichung in $\mathbb{C}$ lösbar ist?*

Wir beantworten diese Frage wieder axiomatisch.
In $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) \colon a, b \in \mathbb{R}\}$ definieren wir eine Addition und eine Multiplikation durch

$$(x, y) + (u, v) := (x + u, y + v); \ (x, y) \cdot (u, v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Man kann (langwierig und langweilig) nachrechnen, dass mit diesen Definitionen $\mathbb{R}^2$ ein Körper wird, den wir mit $\mathbb{C}$ bezeichnen.

Definition **2.9.1.**
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ heißt **Körper der komplexen Zahlen**.

Bemerkung **2.9.2.**

a) Wir haben in $\mathbb{C}$ also alle Rechenregeln und Formeln wie in $\mathbb{R}$ zur Verfügung.

b) Wir können eine komplexe Zahl auch als Punkt in der **Gauß'schen Zahlenebene** auffassen.

c) Die Abbildung

$$\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \Phi(x) := (x, 0),$$

ist ein sogenannter *Körperautomorphismus* und als solche injektiv. Daher können wir $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen.

Ende – Folge 18

Für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ gilt:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0).$$

Wir setzen nun

$$\mathrm{i} := (0, 1).$$

Damit schreibt sich diese Formel kurz als

$$z = x + \mathrm{i}y, \ x, y \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung **2.9.3.**
Zwei komplexe Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v$, sind gleich, wenn $x = u$ und $y = v$ gilt.

Definition **2.9.4.**
Für $z = x + \mathrm{i}y$ heißt

- $\operatorname{Re} z := x \in \mathbb{R}$ der **Realteil** von z,
- $\operatorname{Im} z := y \in \mathbb{R}$ der **Imaginärteil** von z und
- i die **imaginäre Einheit**.

Satz **2.9.5.**
Es gilt $\mathrm{i}^2 = -1$.

Beweis.
Wir wissen: $\mathrm{i} = (0, 1)$. Somit folgt

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0).$$

Wegen $\Phi^{-1}((-1, 0)) = -1$ folgt die Behauptung. ∎

Satz **2.9.6.**
Es seien $z = x + \mathrm{i}y$, $w = u + \mathrm{i}v \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

a) $z + w = (x + u) + \mathrm{i} \cdot (y + v)$.

b) $z \cdot w = (xu - yv) + \mathrm{i} \cdot (xv + yu)$.

c) Ist $z \neq 0$, so ist $\frac{1}{z} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2}$.

d) $\frac{1}{\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$.

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen. ∎

Definition **2.9.7.**
Ist $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, so heißt $\overline{z} := x - \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ die zu z **konjugiert komplexe Zahl**.

Satz **2.9.8.**
Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

a) $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$.

b) $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.

c) $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$, $w \neq 0$.

d) $\overline{\overline{z}} = z$.

e) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$.

f) $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.

Beweis. Übungsaufgabe. ∎

Bemerkung 2.9.9.
Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$ gibt es in $\mathbb{C}$ keinen Ordnungsbegriff, der die Axiome (O_1) und (O_2) aus Definition 2.2.1 erfüllt. Andernfalls müsste gelten:

$$-1 = \mathrm{i}^2 \overset{\mathrm{i}\neq 0}{>} 0.\text{`}$$

Folgerung 2.9.10.
$\mathbb{C}$ ist kein angeordneter Körper.

Definition 2.9.11.
Für $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ heißt $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ der **Betrag** von z.

Satz 2.9.12.
Es seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gelten:

a) $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$.

b) $|\overline{z}| = |z|$.

c) $|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$, $|\mathrm{Im}\, z| \leq |z|$.

d) $\frac{z}{w} = \frac{z\overline{w}}{|w|^2}$, $w \neq 0$.

e) $|z| \geq 0; |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.

f) $|zw| = |z| \cdot |w|$; $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$.

g) $|z + w| \leq |z| + |w|$. (*Dreiecksungleichung*)

h) $||z - w|| \leq |z - w|$.

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Ende – Folge 19

2.10 Übungsaufgaben

***Aufgabe* 2.1.**

Beweise Satz 2.1.3.

***Aufgabe* 2.2.**

Ist $(\mathbb{Q}, \cdot, +)$ ein Körper?

***Aufgabe* 2.3.** [$*$]

Beweisen Sie Satz 2.1.7. Hinweis.

***Aufgabe* 2.4.**

Implementieren Sie den Algorithmus aus dem Beweis von Satz 2.2.9 in einer Programmiersprache Ihrer Wahl.

***Aufgabe* 2.5.**

Füllen Sie die Details im Beweis von Satz 2.2.12 f).

***Aufgabe* 2.6.**

Beweisen Sie Satz 2.3.1 mit vollständiger Induktion.

***Aufgabe* 2.7.**

Beweisen Sie Folgerung 2.3.2.

***Aufgabe* 2.8.**

Beweisen Sie Satz 2.3.4.

***Aufgabe* 2.9.**

Programmieren Sie das Pascalsche Dreieck aus Folgerung 2.3.6 in einer Programmiersprache Ihrer Wahl.

***Aufgabe* 2.10.**

Beweisen Sie Satz 2.4.6. Formulieren Sie ferner eine Version von Satz 2.4.6 für nach unten beschränkte Mengen und beweisen Sie diese.

***Aufgabe* 2.11.**

Es seien $I_1 := [a, b]$ und $I_2 := [c, d]$ zwei reelle Intervalle. Bestimmen Sie – falls existent – das Supremum, Infimum, Maximum und Minimum von $I_1 \cap I_2$, $I_1 \cup I_2$ und $I_1 \setminus I_2$.

Aufgabe 2.12.
Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ zwei Mengen mit größten Elementen $\max A$ und $\max B$. Zeigen Sie, dass $A \cup B$ ein größtes Element $\max(A \cup B)$ hat und drücken Sie dieses durch $\max A$ und $\max B$ aus.

Aufgabe 2.13.
Es seien A, B nichtleere beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$.

a) Zeigen oder widerlegen Sie: $A \subset B \Longrightarrow \inf A \geq \inf B$.

b) Zeigen Sie, dass $A \cup B$ beschränkt ist und drücken Sie $\sup(A \cup B)$ durch $\sup A$ und $\sup B$ aus.

Aufgabe 2.14. [*]
Zeigen Sie, dass die Abbildung ϕ aus Bemerkung 2.5.1 die Gleichheiten

$$\phi(n+m) = \phi(n) + \phi(m) \text{ und } \phi(nm) = \phi(n)\phi(m)$$

für $m, n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Hinweis.

Aufgabe 2.15.
Zeigen Sie, dass die Menge $A_n := \{x \in \mathbb{R} \colon x^2 < n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Supremum besitzt und bestimmen Sie dieses. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $\sup A_n \in \mathbb{Q}$?

Aufgabe 2.16.
Zeigen Sie für $0 < s < t$ die Gleichung $t^n - s^n = (t-s) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} t^k s^{n-1-k}$.

Aufgabe 2.17.
Es seien $a > 0$, $a \neq 1$, $n \geq 2$ und $1 \leq p \leq n$. Zeigen Sie:

a) $\sqrt[n]{a^p} < 1 + \frac{p}{n} \cdot (a-1)$.

b) $\sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}$.

c) $\sqrt[n]{n} \leq 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Aufgabe 2.18.
Implementieren Sie den Algorithmus aus dem Beweis von Satz 2.8.4 in einer Programmiersprache Ihrer Wahl.

Aufgabe 2.19.
Beweisen Sie Satz 2.9.8.

***Aufgabe* 2.20.**

Beweisen Sie Satz 2.9.12.

***Aufgabe* 2.21.**

Zeigen Sie für $z, w \in \mathbb{C}$ die Identität

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$$

und deuten Sie diese geometrisch.

***Aufgabe* 2.22.**

Es sei $z \in \mathbb{C}$. Wir identifizieren z mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und $\overline{z}$ mit $(x, -y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie: Es gibt eine reguläre 2×2-Matrix A über $\mathbb{R}$ mit $Az = \overline{z}$. Folgern Sie hiermit nochmals Teil f) aus Satz 2.9.8.

2.11 Lösungshinweise

***Hinweis zu Aufgabe* 2.3**

Induktion nach n.

***Hinweis zu Aufgabe* 2.14**

Die Aussage zu $m+n$ ist einfaches Einsetzen der Definitionen. Für die Aussage zu mn fixiere $n \in \mathbb{N}$ und führe den Beweis durch Induktion nach m.

3 Folgen

3.1 Konvergenz von Folgen

Definition **3.1.1.**
Es sei M eine nichtleere Menge.

a) Eine **Folge** in M ist eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to M$. Wir schreiben dafür $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ oder kurz (x_n).

b) Die Elemente $x_n := f(n) \in M$ heißen **Folgenglieder**.

c) Ist $M = \mathbb{R}$ oder $M = \mathbb{C}$, so nennt man (x_n) eine **reelle** bzw. **komplexe** Zahlenfolge.

Bemerkung **3.1.2.**

a) Häufig benutzen wir einfach den Begriff „Folge“.

b) Manchmal ist eine Folge auch für $n \in \mathbb{N}_0$ oder für $n \geq N \in \mathbb{N}$ definiert.

Beispiel **3.1.3.**

a) *Konstante Folge*: $x_n := c \in \mathbb{C}$.

b) $x_n := n$, $n \in \mathbb{N}_0$.

c) *Arithmetische Folge*: $x_n := a + n \cdot d$, $a, d \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $d \neq 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.
Beachte: $x_{n+1} - x_n = d$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

d) *Geometrische Folge*: $x_n := a \cdot q^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, $a, q \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Beachte: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = q$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

e) $x_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

f) $x_n := (-1)^n \cdot \frac{4n^2+2n+1}{3n^3+6}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Ende – Folge 20

Im Folgenden sei stets $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition **3.1.4.**
Für $a \in \mathbb{K}$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(a) := \{z \in \mathbb{K} \colon |z - a| < \varepsilon\}$$

die **ε-Umgebung von a**. Die Menge

$$\dot{U}_\varepsilon(a) := U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$$

heißt **punktierte ε-Umgebung von a**.

Definition **3.1.5.**
Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{K}$ heißt **konvergent zum Grenzwert $a \in \mathbb{K}$**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \colon \; |x_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geq n_0.$$

Wir schreiben in diesem Fall

$$\lim_{n\to\infty} x_n := a \text{ oder } x_n \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

Ist eine Folge (x_n) nicht konvergent, so heißt sie **divergent**.
Eine Folge, die gegen 0 konvergiert, heißt **Nullfolge**.
Schließlich heißt eine Folge in $\mathbb{R}$ **bestimmt divergent** gegen $\pm\infty$, wenn es zu jedem $K > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n > K$ $(x_n < -K)$ für alle $n \geq n_0$. Wir schreiben in diesem Fall $x_n \xrightarrow{n\to\infty} \pm\infty$.

ENDE – FOLGE 21

Bemerkung **3.1.6.**
Eine Folge (x_n) konvergiert also gegen a, wenn in jeder beliebig kleinen ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ ab einem genügend großen Index n_0 alle Folgenglieder liegen.

Bevor wir nun zu Beispielen kommen, beschäftigen wir uns mit der *Eindeutigkeit von Grenzwerten.*
Satz **3.1.7.**
Es sei $(x_n) \subset \mathbb{K}$ eine konvergente Folge. Dann ist ihr Grenzwert eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Beispiel **3.1.8.**
Für $\alpha \in \mathbb{Q}^+$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Bemerkung **3.1.9.**
Ebenso folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} = 0$.

Diese Aussagen gelten auch für $\alpha \in \mathbb{R}^+$, aber dazu müssen wir $n^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}$, erst definieren.
Beispiel **3.1.10.**
Die Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ mit $x_n := (-1)^n$ ist divergent.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Abschließend geben wir noch folgendes Resultat an, welches einfach aus den Definitionen folgt.
Satz **3.1.11.**
Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{K}$ ist konvergent gegen $a \in \mathbb{K}$ genau dann, wenn $(|x_n - a|)$ eine Nullfolge ist.

Beweis. Dies ist eine Übungsaufgabe. (→ Aufgabe 3.1) ■

Ende – Folge 22

3.2 Beschränkte Folgen

Definition **3.2.1.**
Eine reelle Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt **nach oben beschränkt**, wenn die Menge $A := \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ nach oben beschränkt ist, d.h.

$$\exists M \in \mathbb{R} \colon x_n \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere existiert dann $S := \sup A \in \mathbb{R}$. Wir schreiben $S := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Entsprechend definiert man den Begriff **nach unten beschränkt**. Dann existiert $s := \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$.
Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{K}$ heißt **beschränkt**, wenn es eine Konstante $K > 0$ gibt mit $|x_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lemma **3.2.2.**
Eine reelle Folge ist beschränkt genau dann, wenn sie nach oben und unten beschränkt ist.

Beweis. Im Videokurs. ■

Satz **3.2.3.**
Eine konvergente Folge (x_n) ist beschränkt.

Beweis. Im Videokurs. ■

Bemerkung **3.2.4.**
Die Umkehrung von Satz 3.2.2 gilt im Allgemeinen nicht. Ein Gegenbeispiel liefert $(x_n) := ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Kombination mit Beispiel 3.1.10.

Satz **3.2.5.**
Es gelten folgende Aussagen:

a) Es sei (x_n) eine Nullfolge und (y_n) eine beschränkte Folge. Dann ist $(x_n y_n)$ eine Nullfolge.

b) Es sei (x_n) eine Folge, (y_n) eine Nullfolge, $n_1 \in \mathbb{N}$ und $|x_n| \leq |y_n|$ für alle $n \geq n_1$. Dann ist (x_n) eine Nullfolge.

Beweis. Im Videokurs. ■

Beispiel **3.2.6.**
Für $q \in \mathbb{C}$ diskutieren wir im Videokurs die Folge $(x_n) = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ende – Folge 23

Man kann sogar zeigen, dass die Folge $(n \cdot q^n)$ beschränkt ist; dies erfordert aber ein wenig mehr Technik.
Beispiel **3.2.7.**
Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $q \in \mathbb{C}$ mit $|q| < 1$ diskutieren wir im Videokurs die Folge $(x_n) = (n^k q^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel **3.2.8.**
Für $a \in \mathbb{C}$ diskutieren wir im Videokurs die Folge $(x_n) := \left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

Übungen zu Kapitel 3

***Aufgabe* 3.1.**

Beweisen Sie Satz 3.1.11.

3.8 Lösungshinweise

Literaturverzeichnis

[Dei14] Anton Deitmar. Analysis. 1. Aufl. Berlin: Springer Spektrum, 2014.

[For13] Otto Forster. Analysis 1. 11. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

[For11] Otto Forster. Analysis 2. 9. Aufl. Wiesbaden: Vieweg Teubner, 2011.

[For12] Otto Forster. Analysis 3. 7. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2012.

[FS13] Otto Forster und Thomas Szymczak. Übungsbuch zur Analysis 2. 8. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

[FW13] Otto Forster und Rüdiger Wessoly. Übungsbuch zur Analysis 1. 6. Aufl. Wiesbaden: Springer Spektrum, 2013.

[Heu09] Harro Heuser. Lehrbuch der Analysis Teil 1. 17. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2009.

[Heu08] Harro Heuser. Lehrbuch der Analysis Teil 2. 14. Aufl. Wiesbaden: Vieweg+Teubner, 2008.

[Kab00] Winfried Kaballo. Einführung in die Analysis I. 2. Aufl. Heidelberg: Spektrum, 2000.

[Kab97] Winfried Kaballo. Einführung in die Analysis II. 1. Aufl. Heidelberg: Spektrum, 1997.

[Kab99] Winfried Kaballo. Einführung in die Analysis III. 1. Aufl. Heidelberg: Spektrum, 1999.

[Rud87] Walter Rudin. Real and Complex Analysis. 3. Aufl. McGraw-Hill Book Company, 1987.

[Tre13a] Christiane Tretter. Analysis I. 1. Aufl. Basel: Birkhäuser, 2013.

[Tre13b] Christiane Tretter. Analysis II. 1. Aufl. Basel: Birkhäuser, 2013.