Berechnung der Determinante einer $n \times n$-Matrix

Abstract:

Ziel dieses kurzen Artikels ist es, die Determinante der Matrix

$$A_n := \begin{bmatrix} e_n^T \\ e_{n-1}^T \\ \vdots \\ e_2^T \\ e_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

für $n \in \mathbb{N}$ zu berechnen. Hierbei geht es uns weniger um das Ergebnis an sich, sondern um die Entwicklung der Ideen bei der Lösung dieses Problems. Die Problemstellung stammt aus [1, Aufgabe 6.2].

. . . .

Schritt 1: Entwicklung einer Rekursionsformel
Wir bezeichnen im Folgenden $\det A_n$ mit d_n. Zunächst sammeln wir einige Werte von d_n durch Entwicklung nach der ersten Spalte.

- n=1.
  Dann ist $A_1 = [1]$, also $d_1 = 1$.
- n=2.
  Dann ist $A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, also $d_2 = (-1)^{2+1} \cdot d_1 = (-1) \cdot 1 = -1$.
- n=3.
  Dann ist $A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, also $d_3 = (-1)^{3+1} \cdot d_2 = 1 \cdot (-1) = -1$.

Wir beobachten insbesondere, dass die bei der Entwicklung von A_n nach der ersten Spalte resultierende Streichmatrix gerade A_{n-1} ist. Ferner ist bei der Entwicklung nach der ersten Spalte das einzig relevante Matrixelement gerade $a_{n,1}$. Dies motiviert uns zu folgender
Behauptung:
Mit der Setzung $d_0 := 1$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Rekursion

$$d_n = (-1)^{n+1} \cdot d_{n-1}. \tag{1}$$

Beweis von (1).
Der Induktionsanfang ist für $n = 1$ oben dokumentiert. Es gelte daher (1) für ein $n \in \mathbb{N}$.
Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} d_{n+1} = \det A_{n+1} = \det \begin{bmatrix} e_{n+1}^T \\ e_n^T \\ e_{n-1}^T \\ \vdots \\ e_2^T \\ e_1^T \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{(n+1)+1} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (-1)^{n+2} \cdot \det A_n \\ &= (-1)^{n+2} \cdot d_n. \end{aligned}$$

Damit ist (1) bewiesen. □

Die Rekursionsformel (1) können wir nun dazu benutzen, eine geschlossene Darstellung für d_n zu finden und zu beweisen.

Schritt 2: Entwicklung einer geschlossenen Form für (1)
Mit (1) erhalten wir folgende Werte:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d_n	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1

Auf Basis dieser Tabelle stellen wir folgende Vermutung auf:

$$d_n = \begin{cases} 1 & : \quad \exists k \in \mathbb{N}_0 \colon n = 4k+1 \vee n = 4k+4 \\ -1 & : \quad \exists k \in \mathbb{N}_0 \colon n = 4k+2 \vee n = 4k+3 \end{cases}. \tag{2}$$

Dabei ist (2) motiviert von der Beobachtung, dass sich die Werte für d_n alle vier Werte wiederholen. Damit bietet sich eine Fallunterscheidung in vier Fälle an, von denen wir hier jeweils zwei zusammenziehen können, da die Werte von d_n in diesen Fällen gleich sind. Es bleibt nun nur noch übrig, (2) zu beweisen.
Beweis von (2).
Für den Induktionsanfang betrachten wir $n = 1$. Dann ist $k = 0$ und wir erhalten (2) unmittelbar aus (1). Die Behauptung sei nun bereits für alle Werte $1, \ldots, n$ gezeigt. Ohne Einschränkung sei $k \in \mathbb{N}$, denn die Fälle $n = 1, 2, 3, 4$ haben wir mit obiger Tabelle bereits bewiesen (so ersparen wir uns technische Schwierigkeiten mit dem Wert $k - 1$). Wir betrachten nun den Induktionsschritt $n \to n + 1$. Hierfür schreiben wir uns (1) nochmals mit dem durchgeführten Indexshift hin, da wir die daraus resultierende Formel gleich noch benutzen werden. Es gilt für $n \in \mathbb{N}_0$ gemäß (1):

$$d_{n+1} = (-1)^{n+2} \cdot d_n. \tag{3}$$

Wir unterscheiden nun vier Fälle:

Fall 1: $n + 1 = 4k + 1$.
Hier ist $n = 4k = 4(k - 1) + 4$, also erhalten wir mit (3):

$$d_{n+1} = (-1)^{4k+2} \cdot d_n \overset{\text{IV}}{=} 1 \cdot 1 = 1. \checkmark$$

Fall 2: $n + 1 = 4k + 2$.
Hier ist $n = 4k + 1$, also erhalten wir mit (3):

$$d_{n+1} = (-1)^{4k+3} \cdot d_n \overset{\text{IV}}{=} (-1) \cdot 1 = -1. \checkmark$$

Fall 3: $n + 1 = 4k + 3$.
Hier ist $n = 4k + 2$, also erhalten wir mit (3):

$$d_{n+1} = (-1)^{4k+4} \cdot d_n \overset{\text{IV}}{=} 1 \cdot (-1) = -1. \checkmark$$

Fall 4: $n + 1 = 4k + 4$.
Hier ist $n = 4k + 3$, also erhalten wir mit (3):

$$d_{n+1} = (-1)^{4k+5} \cdot d_n \overset{\text{IV}}{=} (-1) \cdot (-1) = 1. \checkmark$$

Damit ist (2) bewiesen. □

Literatur

[1] K. Jänich, Lineare Algebra^{11}. Heidelberg: Springer, 2008.

Die Exponenten am Titel geben dabei jeweils die Auflage an, bei Fehlen dieses handelt es sich um die Erstauflage.