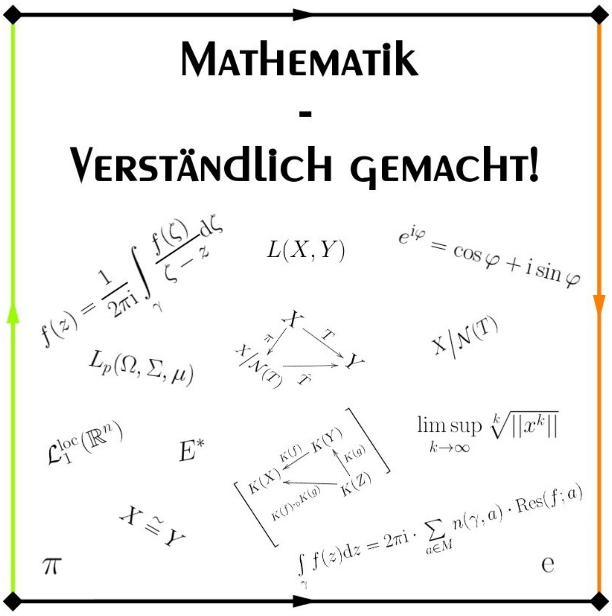
Skript[1]

Topologische Grundlagen der Funktionalanalysis

M.Sc. Matthias Schulte[2]



[1] Version vom 20. Januar 2022.
[2] kontakt@mschulte-mathematik.de.

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Räume und Kompaktheit 5

2 Topologische Vektorräume 13

3 Beschränkte Mengen und lineare Operatoren 19

4 Erzeugung lokalkonvexer Räume 21

5 Quotientenräume 25

6 Beispiele für lokalkonvexe topologische Vektorräume 27

7 Subbasensatz und Satz von Tychonoff 31

Epilog 33

Literatur 35

1 Topologische Räume und Kompaktheit

Definition **1.1.**
Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge.

- Ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Topologie auf X**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

  (O1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

  (O2) Sind $n \in \mathbb{N}$, $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$, so sei auch $\bigcap_{j=1}^{n} U_j \in \mathcal{T}$.

  (O3) Sind A eine Indexmenge und $U_\alpha \in \mathcal{T}$ für $\alpha \in A$, so sei auch $\bigcup_{\alpha \in A} U_j \in \mathcal{T}$.

- Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt **topologischer Raum**.
- Jede Menge $U \in \mathcal{T}$ heißt **offene Menge**.
- Ein System offener Mengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt **Basis der Topologie $\mathcal{T}$**, wenn es zu jeder offenen Menge U und jedem $x \in U$ ein $V \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in V \subset U$.
  Es ist also $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, wenn jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ geschrieben werden kann.
- Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, wenn $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis hat.
- Sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X mit $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, so heißt $\mathcal{T}_1$ **schwächer/gröber** als $\mathcal{T}_2$ bzw. $\mathcal{T}_2$ heißt **stärker/feiner** als $\mathcal{T}_1$. Man schreibt dann auch $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$.
- Eine Menge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $A^C := X \backslash A$ offen ist.
- Ist $Y \subset X$ und $\mathcal{S} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$, so ist $\mathcal{S}$ eine Topologie auf Y und heißt **Teilraumtopologie/die von $\mathcal{T}$ auf Y induzierte Topologie/die Spurtopologie auf Y**.

Folgerung **1.2.**
Es sei X ein topologischer Raum. Dann gelten:

(A1) $\emptyset$ und X sind abgeschlossen.

(A2) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $A_1, ..., A_n$ abgeschlossen, so ist auch $\bigcup_{j=1}^{n} A_n$ abgeschlossen.

(A3) Sind A eine Indexmenge und A_α abgeschlossen für $\alpha \in A$, so ist auch $\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha$ auch wieder abgeschlossen.

Beweis. Folgt sofort aus den Regeln von De Morgan. ■

Definition **1.3.**
Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $U \subset X$ mit $x \in U$.

- Eine Menge $U \subset X$ heißt **Umgebung von x**, wenn es eine offene Menge $V \subset X$ gibt mit $x \in V \subset U$. Die Menge aller Umgebungen von X bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(x)$.
- Ein Mengensystem $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ heißt **Umgebungsbasis von x/lokale Basis von x**, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{U}(x)$ ein $U \in \mathcal{B}(x)$ gibt mit $U \subset V$.
- Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine (höchstens) abzählbare Umgebungsbasis hat.

Beispiel **1.4 (Metrische Räume).**
Es sei (X, d) ein metrischer Raum, d.h. X ist eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik. Für $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\} \tag{1.1}$$

ε-Umgebung von x_0.
Eine Menge $U \subset X$ heißt offen, wenn es zu jedem $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) \subset U$. Wir setzen

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X : U \text{ ist offen}\}. \tag{1.2}$$

$\mathcal{T}_d$ heißt die **von d induzierte Topologie**.
Für $x \in X$ ist

$$\mathcal{B}(x) := \{U_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\} \text{ bzw.}$$

$$\mathcal{B}'(x) := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\}$$

eine Umgebungsbasis von x. Man kann hier statt $\left(\frac{1}{n}\right)$ jede Nullfolge (r_n) positiver Zahlen nehmen. Insbesondere besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine *abzählbare* Umgebungsbasis.
Weiter ist

$$\mathcal{B} = \{U_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0 \text{ und } x \in X\} \text{ bzw.}$$

$$\mathcal{B}' = \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in X\}$$

eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$ wie in (1.2). Somit erfüllt X das zweite Abzählbarkeitsaxiom.
Für zwei Mengen $A, B \subset X$ setzen wir noch

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} \in [0, \infty).$$

Besteht B nur aus einem Punkt $x \in X$, so schreiben wir statt $\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(A, \{x\})$ auch einfach $\operatorname{dist}(A, x)$.

***Beispiel* 1.5 (Normierte Räume).**
Es sei X ein normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, d.h. X ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und es existiert eine Norm $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$. Dann wird durch $d(x,y) = \|x-y\|$ eine Metrik auf X definiert und damit eine Topologie. Insbesondere sind die Räume $\mathbb{K}^d$ mit den kanonischen euklidischen Metriken topologische Räume.
Da die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegen, bildet das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Q}^n\} \text{ bzw.}$$

$$\mathcal{B}' := \{U_{\frac{1}{n}}(z) : n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}]^n\}$$

eine Basis der Topologie von $\mathbb{K}^d$.
Insbesondere sind also auch Hilberträume topologische Räume.

***Beispiel* 1.6 (Diskret oder indiskret).**

a) Es sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, in der jede Menge $E \subset X$ offen und abgeschlossen ist. $\mathcal{T}$ heißt **diskrete Topologie** und wird mit $\mathcal{T}_{dis}$ bezeichnet.
Definieren wir $d : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & : \quad x = y \\ 1 & : \quad x \neq y \end{cases}, \tag{1.3}$$

so ist d eine Metrik, die die Topologie $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{T}_d$ induziert. d heißt **diskrete Metrik**.

b) Sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und die einzigen offenen Mengen sind $\emptyset$ und X. $\mathcal{T}$ heißt **indiskrete Topologie** und wird mit $\mathcal{T}_{ind}$ bezeichnet. Eine Basis ist gegeben durch $\mathcal{B} = \{X\}$.

***Definition* 1.7.**
Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorffraum** und $\mathcal{T}$ eine **Hausdorfftopologie/separiert**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y gibt mit $U \cap V = \emptyset$.

***Beispiel* 1.8.**
Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum.
Die indiskrete Topologie ist *nicht* hausdorffsch, sofern X mindestens zwei Punkte enthält.

***Definition* 1.9.**
Es sei X ein topologischer Raum und $E \subset X$.

- Ein Punkt $x \in E$ heißt **innerer Punkt von *E***, wenn es eine Umgebung U von x gibt mit $x \in U \subset E$. Die Menge aller inneren Punkte von E heißt das **Innere von *E*** oder der **innere Kern von *E***. Bezeichnung: E°.

- Weiter heißt $\overline{E} := X \setminus (X \setminus E)^\circ = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x) \colon U \cap E \neq \emptyset\}$ der **Abschluss/ab-geschlossene Hülle** von E.

- Die Menge E heißt **dicht** in X, wenn $\overline{E} = X$ gilt.
- Die Menge $\partial E := \overline{E} \cap \overline{(X \setminus E)} = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x) \colon U \cap E \neq \emptyset \wedge U \cap E^C \neq \emptyset\}$ heißt **Rand** von E.

Definition **1.10.**
Es sei X ein topologischer Raum und (x_n) eine Folge in X. (x_n) heißt **konvergent gegen $\boldsymbol{x \in X}$**, wenn es zu jeder Umgebung U einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n \in U \ \forall n \geq n_0$. Der Punkt x heißt **Grenzwert** oder **Limespunkt** von (x_n). Wir schreiben hierfür $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ oder $x_n \to x \ (n \to \infty)$.

Definition **1.11.**
Es sei X ein metrischer Raum und (x_n) eine Folge in X. (x_n) heißt **Cauchyfolge**, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \colon d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall m, n \geq N. \tag{1.4}$$

Man zeigt leicht, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist.
X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

Als nächstes wenden wir uns der Charakterisierung stetiger Abbildungen zu.
Definition **1.12.**
Es seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x_0 \in X$.

- f heißt **stetig in $\boldsymbol{x_0}$**, wenn zu jeder Umgebung $V \in \mathcal{U}(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ gibt mit $f(U) \subset V$.
- f heißt **stetig auf $\boldsymbol{X}$**, wenn f in jedem $x_0 \in X$ stetig ist.
- f heißt **Homöomorphismus**, wenn f bijektiv und f, f^{-1} stetig sind. Dann heißen X und Y **homöomorph**, in Zeichen: $X \simeq Y$.

Satz **1.13.**
Es seien X, Y, Z topologische Räume, $x_0 \in X$ und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann gelten:

a) Ist f stetig in x_0 und g stetig in $y_0 = f(x_0)$, so ist $(g \circ f)$ stetig in x_0.

b) Sind f und g stetig, so auch $g \circ f : X \to Z$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Satz **1.14.**
Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

1) f ist stetig.

2) Jür jede offene Menge V in Y ist $f^{-1}(V) = U$ offen in X.

3) Für jede abgeschlossene Menge $G \subset Y$ ist die Urbildmenge $f^{-1}(G)$ abgeschlossen in X.

Beweis. Im Videokurs. ■

Ende – Folge 1

Definition **1.15.**
Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt **offen**, wenn gilt:

$$\forall U \subset X \text{ offen}: f(U) \text{ ist offen in } Y. \tag{1.5}$$

Definition **1.16.**
Es sei X ein topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \tag{1.6}$$

der **Träger** von f.

Bemerkung **1.17.**

a) Es seien X, Y metrische Räume mit Metriken d_X, d_Y. Dann stimmt Definition 1.9 mit der $\varepsilon - \delta$-Stetigkeit überein.

b) Es seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume. Wenn $\mathcal{T}_1$ die diskrete Topologie ist, so ist jedes $f : X \to Y$ stetig. Ist $\mathcal{T}_2$ die diskrete Topologie, so ist jedes $f : X \to Y$ offen.

c) Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ zwei Topologien auf X. Dann ist die Identität $id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ stetig genau dann, wenn $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ gilt.

d) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subset X$ und $\mathcal{S} := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$. Ist $\iota : Y \to X$ die Inklusionsabbildung, so ist $\mathcal{S}$ die schwächste Topologie auf Y, für die ι stetig ist.

Wir werden im Laufe dieses Kurses (und eventuell auch weiterer Kurse) ab und zu auf das Konzept der *Produkttopologie* zurückgreifen. Dieses führen wir jetzt ein.

Definition **1.18.**
Es sei A eine Indexmenge und $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ seien topologische Räume für $\alpha \in A$. Für alle $\alpha \in A$ sei $X_\alpha \neq \emptyset$ und

$$\prod := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \left\{ f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \middle| f(x) \in X_\alpha \forall x \in A \right\}. \tag{1.7}$$

Nach dem *Auswahlaxiom* ist $\Pi \neq \emptyset$ und für alle $\alpha \in A$ definieren wir

$$X_\alpha = X \Rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha =: X^A.$$

Für $\beta \in A$ sei die **kanonische Projektion**

$$\Pi_\beta : \prod \to X_\beta,\ \Pi_\beta\left((X_\alpha)_{\alpha \in A}\right) =: \pi_\beta \tag{1.8}$$

definiert.
Die **Produkttopologie** $\mathcal{T}_{\text{prod}}$ wird auf $\prod$ definiert durch die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{\beta \in B} \Pi_\beta^{-1}(U_\beta) \middle| U_\beta \in \mathcal{T}_\beta,\ B \subset A \text{ endlich} \right\}. \tag{1.9}$$

$(\prod, \mathcal{T}_{\text{prod}})$ heißt **Produktraum** der topologischen Räume $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$.
Die Produkttopologie ist die schwächste Topologie auf Π, sodass alle Π_α stetig sind. Ferner ist natürlich jede Projektion Π_α offen.

Bemerkung **1.19.**

a) Ist $A := \{1, \ldots, n\}$, so heißt die Produkttopologie auch **Boxtopologie** und eine Basis ist

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{k=1}^{n} U_k \colon U_k \in \mathcal{T}_k\ \forall k \in A \right\}. \tag{1.10}$$

b) Sind (X_j, d_j) metrische Räume, $j = 1, \ldots, N$, so wird $\Pi := \prod_{j=1}^{N} X_j$ zu einem metrischen Raum vermöge der Produktmetrik

$$d(x, y) := \max_{j=1,\ldots,N} d_j(x_j, y_j),\ \ x, y \in \Pi. \tag{1.11}$$

Diese Metrik erzeugt gerade die Produkttopologie.
Eine Folge in Π ist konvergent, wenn jede Komponentenfolge konvergent ist.
Es gibt weitere Metriken, die die Produkttopologie erzeugen, zum Beispiel

$$d(x, y) := \sum_{j=1}^{N} d_j(x_j, y_j) \text{ oder}$$

$$d(x, y) := \left(\sum_{j=1}^{N} d_j(x_j, y_j)^2 \right)^{1/2}.$$

Bemerkung **1.20.**

Ist (X, d) ein metrischer Raum, so gilt für $x, y, \xi, \eta \in X$ die **Viereckungleichung**:

$$|d(x,y) - d(\xi,\eta)| \leq d(x,\xi) + d(y,\eta). \tag{1.12}$$

Hieraus folgt, dass $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig ist, wobei $X \times X$ mit der Produkttopologie versehen ist.

Zum Abschluss dieses ersten Grundlagenkapitels beschäftigen wir uns nun noch mit *Kompaktheitsbegriffen.*

***Definition* 1.21.**
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

a) Eine Teilmenge $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ heißt **offene Überdeckung** von X, wenn $\bigcup \{U : U \in \mathcal{T}'\} = X$ gilt. X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

b) Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **kompakt**, wenn K mit der Teilraumtopologie kompakt ist.

c) $M \subset X$ heißt **relativ kompakt**, wenn $\overline{M}$ kompakt ist.

d) X heißt **lokalkompakt**, wenn jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

e) X heißt **σ-kompakt**, wenn X als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen geschrieben werden kann.

f) X heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge $(x_n) \subset X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

***Definition* 1.22.**
Ein topologischer Raum X hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, falls folgendes gilt: Zu jeder Familie A_α $(\alpha \in A)$ abgeschlossener Mengen mit $\bigcap\limits_{\alpha \in A} A_\alpha = \emptyset$ existiert eine endliche Teilmenge $B \subset A$ mit $\bigcap\limits_{\beta \in B} A_\beta = \emptyset$.

***Lemma* 1.23.**
X ist kompakt. $\Leftrightarrow$ X hat die endliche Durchschnittseigenschaft.

Beweis. Folgt sofort aus den de Morganschen Regeln. ■

***Satz* 1.24.**
Es sei X ein Hausdorffraum und $Y \subset X$ kompakt. Dann ist Y abgeschlossen.

Beweis. Im Videokurs. ■

***Satz* 1.25.**
Es seien X, Y Hausdorffräume, X kompakt und $f : X \to Y$ eine surjektive, stetige Abbildung. Dann ist Y kompakt. Ist f zusätzlich bijektiv, so ist $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

Beweis. Im Videokurs. ∎

Bemerkung 1.26.

- Es gilt der *Satz von Heine-Borel*:
  In einem metrischen Raum sind die Begriffe kompakt und folgenkompakt äquivalent.
- Man kann leicht zeigen:
  Ist X ein kompakter topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so ist X folgenkompakt.
- In beliebigen topologischen Räumen impliziert keiner dieser Begriffe den anderen.
- In $\mathbb{K}^n$ gilt:
  Eine Menge ist kompakt genau dann wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.
- Ist X ein kompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $K \geq 0$ mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in \mathbb{K}$ und f nimmt daher Minimum und Maximum an.

Diese Begrifflichkeiten und Sätze reichen für den Moment aus. Im nächsten Abschnitt werden wir den Begriff eines *topologischen Vektorraumes* einführen, der den richtigen begrifflichen Rahmen für die nachfolgende Theorie bereitstellt. Zudem führen wir weitere Sprechweisen ein, die im Laufe dieses Kurses immer wieder benutzt werden.

Ende – Folge 2

2 Topologische Vektorräume

In diesem Kapitel betrachten wir nur reelle und komplexe Vektorräume. Daher schreiben wir $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Definition **2.1.**

Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $A, B \subset E$, $x \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann setzen wir

$$A \pm B := \{a \pm b \colon a \in A, b \in B\},$$

$$x \pm A := \{x\} \pm A \text{ und}$$

$$\lambda A := \{\lambda a \colon a \in A\}.$$

Definition **2.2.**

a) Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Menge $C \subset E$ heißt **konvex**, wenn für je zwei Elemente $x, y \in C$ auch die Verbindungsstrecke in C liegt, d.h.

$$tx + (1-t)y \in C \text{ für } t \in [0,1]. \tag{2.1}$$

(2.1) ist äquivalent zu $tC + (1-t)C \subset C$ für $t \in [0,1]$.

Hierzu äquivalent ist auch

$$\lambda x + \mu y \in C \ \forall \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1 \tag{2.2}$$

oder entsprechend $\lambda C + \mu C \subset C$ mit λ, μ wie in (2.2).

b) Eine Menge $B \subset E$ heißt **kreisförmig**, wenn $\alpha B \subset B$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| \leq 1$ gilt.

c) Eine Menge $A \subset E$ heißt **absolutkonvex**, wenn sie konvex und kreisförmig ist. Hierzu ist äquivalent:
Für je zwei Punkte $x, y \in A$ gilt $\lambda x + \mu y \in A$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

d) Eine Menge $A \subset E$ heißt **absorbierend**, wenn es zu jedem $x \in E$ ein $t = t(x) > 0$ gibt mit $x \in tA \Leftrightarrow t^{-1}x \in A$. Diese Bedingung ist insbesondere erfüllt, wenn

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA \tag{2.3}$$

gilt. Eine kreisförmige Menge $A \subset E$ ist absorbierend genau dann, wenn (2.3) gilt.

Definition **2.3.** Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf E mit folgenden Eigenschaften:

a) $\mathcal{T}$ ist eine Hausdorfftopologie.

b) Die algebraischen Operationen $+ : E \times E \to E$ und $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ sind stetig.

Dann heißt $\mathcal{T}$ eine **Vektorraumtopologie** und $(E, \mathcal{T})$ ein **topologischer Vektorraum**.

Bemerkung **2.4.**
Obige Definition bedeutet, dass $E \times E$ und $\mathbb{K} \times E$ mit der Produkttopologie versehen sind.

Beispiel **2.5.** Jeder normierte Raum ist ein topologischer Vektorraum. Die Stetigkeit der Skalarmultiplikation folgt aus der Homogenität der Norm, die Stetigkeit der Addition aus der Dreiecksungleichung.
Bekannteste Beispiele:

- $\mathbb{K}^n$ mit irgendeiner Norm.
- $C[0,1]$ mit Maximumnorm.
- $C(\Omega)$, wobei Ω ein kompakter Hausdorffraum ist.
- Weitere Beispiele folgen im Laufe des Kurses, unter anderem $C[0,1]$, $H(D)$, $C(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

Bemerkung **2.6.**
Es sei E ein topologischer Vektorraum.
Für $a \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ definieren wir den Translationsoperator T_a und den Multiplikationsoperator M_λ durch

$$T_a : E \to E,\ T_a x := a + x \text{ bzw.}$$

$$M_\lambda : E \to E,\ M_\lambda x := \lambda x.$$

Aus der Stetigkeit der Addition und der Skalarmultiplikation folgt, dass T_a und M_λ Homöomorphismen sind. Hieraus folgt, dass jede Vektorraumtopologie *translationsinvariant* ist, d.h. es gilt:
$U \subset E$ ist offen. $\Leftrightarrow$ $a + U$ ist offen für jedes $a \in E$.
Also ist $\mathcal{T}$ durch eine Umgebungsbasis an 0 eindeutig bestimmt.

Definition **2.7.**
Eine solche Basis heißt auch **Nullumgebungsbasis**.

Bemerkung **2.8.**
Eine Vektorraumtopologie ist durch eine Nullumgebungsbasis eindeutig bestimmt, d.h. jede offene Menge kann als Vereinigung von Translationen der Elemente der Nullumgebungsbasis dargestellt werden.

Definition 2.9.
Eine Metrik d auf einem Vektorraum E heißt **translationsinvariant**, wenn $d(x,y) = d(x+z, y+z)$ für alle $x, y, z \in E$ gilt.

Lemma 2.10.
Es sei (X, d) ein metrischer Raum und d sei translationsinvariant. Dann ist die Addition in X stetig.

Beweis. Im Videokurs. ∎

Nun wollen wir einige neue Raumklassen einführen. Dazu brauchen wir allerdings den Begriff der *Beschränktheit* in topologischen Vektorräumen.
Definition 2.11.
Es sei E ein topologischer Vektorraum.
Eine Menge $M \subset E$ heißt **beschränkt**, wenn es zu jeder Nullumgebung U ein $s > 0$ gibt mit $M \subset tU$ für alle $t > s$. Dies geht sicher, da Nullumgebungen absorbierend sind.

Definition 2.12.
Es sei $(E, \mathcal{T})$ ein topologischer Vektorraum.

a) E heißt **lokalkonvex**, wenn es eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen gibt.

b) E heißt **lokal beschränkt**, wenn es eine beschränkte Nullumgebung gibt.

c) E heißt **lokalkompakt**, wenn es eine kompakte Nullumgebung gibt.

d) E heißt ein **metrischer Vektorraum**, wenn es eine invariante Metrik d auf E gibt, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert.

e) E heißt **Fréchetraum**, wenn E lokalkonvex und ein vollständiger metrischer Vektorraum ist.

Beispiel 2.13.
Ein normierter Raum E ist somit ein metrischer Vektorraum. Ist E vollständig, so ist E bekanntlich ein Banachraum.

Für $r > 0$ ist $B_r := \{x \in E \colon \|x\| < r\}$ eine konvexe Nullumgebung und $\{B_r \colon r > 0\}$ ist eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen. Somit sind Banachräume stets lokalkonvex und auch Fréchetträume. Insbesondere ist $E = \mathbb{K}^n$ ein Banachraum und lokalkompakt. Banachräume sind auch lokal beschränkt.

In Bemerkung 2.6 haben wir begründet, dass eine Vektorraumtopologie durch eine Nullumgebungsbasis eindeutig bestimmt ist. Aus diesem Grund werden wir diese nun genauer betrachten.
Dazu beginnen wir mit zwei eher technischen Lemmata.
Lemma 2.14.
Es sei E ein topologischer Vektorraum und V eine Nullumgebung. Dann existiert eine symmetrische offene Nullumgebung U, d.h. $U = -U$, mit $U + U \subset V$.

Beweis. Im Videokurs. ∎

Lemma 2.15.
Es sei E ein topologischer Vektorraum, $A \subset E$ abgeschlossen und $0 \in E \setminus A$. Dann existiert eine Nullumgebung U mit $U \cap (A+U) = \emptyset$.

Beweis. Im Videokurs. ∎

Ende – Folge 3

Lemma 2.15 ist nun der Schlüssel zum Beweis des nächsten Satzes.

Satz 2.16.
Es sei E ein topologischer Vektorraum. Dann existiert eine Nullumgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen.

Beweis. Im Videokurs. ∎

Damit sind wir nun in der Lage, einfache Eigenschaften von Teilmengen in topologischen Vektorräumen zu zeigen.

Satz 2.17.
Es sei E ein topologischer Vektorraum. Dann gelten:

a) Ist $A \subset E$, so gilt $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(0)} (A+U)$.

b) Sind $A, B \subset E$, so gilt $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$.

c) Ist F ein Unterraum von E, so auch $\overline{F}$.

d) Ist $C \subset E$ konvex, so auch $\overline{C}$ und C°.

e) Ist $B \subset E$ kreisförmig, so auch $\overline{B}$. Ist zusätzlich $0 \in B^\circ$, so ist auch B kreisförmig.

f) Ist $M \subset E$ beschränkt, so auch $\overline{M}$.

g) Ist E ein vollständiger metrischer Vektorraum und F ein Unterraum von E, so ist F vollständig genau dann, wenn F abgeschlossen ist.

h) Ist E ein Fréchetraum und F ein Unterraum von E, so ist auch $\overline{F}$ ein Fréchetraum.

Beweis. Im Videokurs. ∎

Satz 2.18.
Es sei E ein topologischer Vektorraum. Dann gelten:

a) Jede Nullumgebung enthält eine kreisförmige Nullumgebung. Insbesondere besitzt E eine Nullumgebungsbasis aus kreisförmigen Mengen.

b) Jede konvexe Nullumgebung enthält eine absolutkonvexe Nullumgebung. Ist E lokalkonvex, so besitzt E eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

***Satz* 2.19.**
Es sei E ein topologischer Vektorraum und U eine Nullumgebung. Dann gelten:

a) Ist (r_n) eine streng monoton wachsende Folge positiver Zahlen mit $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, so gilt $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} r_n U$. Insbesondere ist jede Nullumgebung absorbierend.

b) Jede kompakte Menge $K \subset E$ ist beschränkt.

c) Ist (δ_n) eine streng monoton fallende Nullfolge und U eine beschränkte Nullumgebung, so ist $\mathcal{B} := \{\delta_n U : n \in \mathbb{N}\}$ eine Nullumgebungsbasis.

BEWEIS. Im Videokurs. ■

Nachdem wir nun Nullumgebungsbasen genauer betrachtet haben, beschäftigen wir uns im Folgenden genauer mit beschränkten Mengen und mit dem Zusammenhang zu linearen Operatoren.

ENDE – FOLGE 4

3 Beschränkte Mengen und lineare Operatoren

Wiederholung aus Definition 2.11:
Eine Menge $M \subset E$ heißt **beschränkt**, wenn es zu jeder Nullumgebung U ein $s > 0$ gibt mit $M \subset tU$ für alle $t > s$.

Lemma **3.1.**
Es sei E ein topologischer Vektorraum. Dann ist jede konvergente Folge (x_n) beschränkt.

Beweis. Im Videokurs. ■

Somit haben wir eine große Beispielklasse beschränkter Mengen gefunden. Nun kommen wir zu einem Gegenbeispiel.

Beispiel **3.2.**
Es sei E ein topologischer Vektorraum und $0 \neq x \in E$. Wir definieren $M := \{nx : n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist M *nicht* beschränkt.

Beweis. Im Videokurs. ■

Bemerkung **3.3.**
Kein Unterraum eines topologischen Vektorraums E außer $\{0\}$ ist beschränkt.

Satz **3.4.**
Es sei E ein topologischer Vektorraum und $M \subset E$. Dann sind äquivalent:

a) M ist beschränkt.

b) Ist $(x_n) \subset M$ und $(\alpha_n) \subset \mathbb{K}$ mit $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so gilt $\alpha_n x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Definition **3.5.**
Es seien E, F topologische Vektorräume und $T : E \to F$ linear. T heißt **beschränkt**, falls $T(M)$ in F beschränkt ist für alle beschränkten Mengen $M \subset E$, d.h. das Bild beschränkter Mengen unter T ist wieder beschränkt.

Lemma **3.6.**
Es sei (E, d) ein metrischer Vektorraum. Dann gelten:

a) Für $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$.

b) Ist (x_n) eine Folge in E mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so existiert eine Folge (α_n) in $(0, \infty)$ mit $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $\alpha_n x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer äquivalenten Charakterisierung für die Stetigkeit linearer Operatoren.

Satz 3.7.

Es seien E, F topologische Vektorräume und $T : E \to F$ linear. Weiterhin betrachten wir die folgenden Aussagen:

a) T ist stetig.

b) T ist beschränkt.

c) Ist (x_n) eine Folge in E mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so ist (Tx_n) beschränkt.

d) Ist (x_n) eine Folge in E mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so gilt $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dann gelten die Implikationen a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c).
Ist E ein metrischer Vektorraum, so sind alle vier Aussagen äquivalent.

Beweis. Im Videokurs. ■

Erinnerung: $E' \subset E^*$.
$\Rightarrow$ Alle Aussagen aus diesem Abschnitt, die nichts mit Stetigkeit zu tun haben, gelten daher auch für unbeschränkte lineare Operatoren.

Wir beenden dieses Kapitel mit einer Variante des Satzes von Hahn-Banach, den wir im Laufe des Kurses immer mal wieder benutzen werden.

Theorem 3.8 (*Geometrischer Hahn-Banach*).

Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, $A \subset E$ abgeschlossen und konvex und $x_0 \in E \setminus A$. Dann gilt:

$$\exists \phi \in E', \varepsilon > 0\colon\ \operatorname{Re}\phi(x_0) < \operatorname{Re}\phi(x_0) + \varepsilon \leq \operatorname{Re}\phi(y)\ \forall y \in A.$$

Ist A zusätzlich absolutkonvex, so gilt:

$$\exists \phi \in E', \varepsilon > 0\colon\ |\phi(y)| + \varepsilon \leq \operatorname{Re}\phi(x_0)\ \forall y \in A.$$

Beweis. Im Videokurs. ■

Ende – Folge 5

4 Erzeugung lokalkonvexer Räume

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie man lokalkonvexe topologische Vektorräume erzeugen kann. Dafür wiederholen wir einige Begriffe aus [5] und fügen gleichzeitig einige neue hinzu.

Definition **4.1.**
Es sei E ein Vektorraum und $p : E \to \mathbb{R}$.

a) p heißt eine **Halbnorm** auf E, wenn gilt:

(H1) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ für alle $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$. (**Homogenität**)

(H2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$. (**Sublinearität**)

b) Eine Familie $\mathcal{P}$ von Halbnormen auf E heißt **punktetrennend**, wenn es zu jedem $x \in E$ mit $x \neq 0$ ein $p \in \mathcal{P}$ gibt mit $p(x) \neq 0$.

c) Für eine absorbierende Menge $A \subset E$ definieren wir

$$\mu_A(x) := \inf\{t > 0 \colon x \in tA\} = \inf\left\{t > 0 \colon t^{-1}x \in A\right\}. \tag{4.1}$$

Es gilt $0 \leq \mu_A(x) < \infty$ und μ_A heißt **Minkowski-Funktional** von A.

Bemerkung **4.2.**
Nach Satz 2.19 ist jede Nullumgebung absorbierend und jede absorbierende Menge enthält 0.

Satz **4.3.**
Es sei E ein Vektorraum und p eine Halbnorm auf E. Dann gelten:

a) $p(0) = 0$.

b) $|p(x) - p(y)| \leq p(x-y)$ für alle $x, y \in E$.

c) $p(x) \geq 0$.

d) Die Menge $N := \{x \in E \colon p(x) = 0\}$ ist ein Unterraum von E.

e) Die Menge $B := \{x \in E \colon p(x) < 1\}$ ist absolutkonvex, absorbierend und es gilt $\mu_B = p$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Wir sammeln nun einige Eigenschaften des Minkowski-Funktionals.

Satz **4.4.**
Es sei E Vektorraum und $A \subset E$ konvex und absorbierend. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$ für alle $x, y \in E$.

b) $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ für alle $t > 0$ und $x \in E$.

c) Ist A kreisförmig, dann ist μ_A eine Halbnorm.

d) Ist $B := \{x \in E\colon \mu_A(x) < 1\}$ und $C := \{x \in E\colon \mu_A(x) \leq 1\}$, so gilt $B \subset A \subset C$ und $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Nun wenden wir uns der Beantwortung der Frage nach der Erzeugung lokalkonvexer Räume zu.

***Satz* 4.5.**
Es sei E ein Vektorraum und B eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen offenen Nullumgebungen. Dann ist $\mathcal{P} := \{\mu_U\colon U \in B\}$ eine punktetrennende Familie stetiger Halbnormen auf E.

Beweis. Im Videokurs. ■

Ende – Folge 6

***Satz* 4.6.**
Es sei E ein Vektorraum und $\mathcal{P}$ eine punktetrennende Familie von Halbnormen auf E. Zu jedem $p \in \mathcal{P}$ definieren wir $U(p, n) := \left\{x \in E\colon p(x) < \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei

$$B := \{U(p_1, n_1) \cap \ldots \cap U(p_m, x_m)\colon p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist B eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Nullumgebungen einer Topologie $\mathcal{T}$ auf E, mit der E zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum wird so, dass gilt:

a) Jedes $p \in \mathcal{P}$ ist stetig.

b) Eine Menge $M \subset E$ ist beschränkt genau dann, wenn alle $p \in \mathcal{P}$ auf M beschränkt sind.

Beweis. Im Videokurs. ■

***Bemerkung* 4.7.**
Es sei E ein Vektorraum und $\mathcal{P} := \{p_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ eine punktetrennende Familie von Halbnormen auf E. Diese erzeugt nach Satz 4.6 eine lokalkonvexe Topologie $\mathcal{T}$ auf E.
In diesem Fall ($\mathcal{P}$ abzählbar) existiert eine invariante Metrik d, die die obige Topologie erzeugt. Setze dazu

$$d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x-y)\} \text{ oder alternativ } d(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1 + p_n(x-y)}. \tag{4.2}$$

Es ist leicht zu sehen, dass d eine Metrik ist. Um zu zeigen, dass d die obige Topologie erzeugt, betrachten wir die Kugeln $B_r := \{x \in E\colon d(x,0) < r\}$ für $r > 0$ und zeigen im Videokurs, dass sie eine Nullumgebungsbasis für $\mathcal{T}$ sind.
Beachte: Die B_r müssen im Allgemeinen nicht konvex sein.

Mit diesem Resultat haben wir die Erzeugung lokalkonvexer Räume im Wesentlichen geklärt. Als nächstes untersuchen wir die Stetigkeit von linearen Abbildungen zwischen lokalkonvexen Räumen. Die dabei erzielten Resultate sind uns in wesentlichen Teilen schon aus [5] bekannt, wir übersetzen (und beweisen) sie hier allerdings nochmal in diesem neuen begrifflichen Rahmen.

***Satz* 4.8.**
Es seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume, deren Topologien von Halbnormenfamilien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ erzeugt werden. Weiter sei $T : E \to F$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

a) T ist stetig.

b) Zu jedem $q \in \mathcal{Q}$ existieren $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}$ und eine Konstante $M < \infty$ mit der Eigenschaft

$$q(Tx) \leq M \cdot \max_{k=1,\dots,m} p_k(x) \; \forall x \in E. \tag{4.3}$$

Beweis. Im Videokurs. ■

***Folgerung* 4.9.** Es seien E, F normierte Räume und $T : E \to F$ linear. Dann sind äquivalent:

a) T ist stetig.

b) Es existiert ein $M < \infty$ mit $\|Tx\|_F \leq M\|x\|_E$ für alle $x \in E$.

Ende – Folge 7

5 Quotientenräume

Es sei E ein Vektorraum und N ein Unterraum von E. Zu $x \in E$ betrachten wir die sogenannte **Komenge** $\pi(x) := x + N$ und

$$^E/_N := \{\pi(x) \colon x \in E\}\,. \tag{5.1}$$

In $^E/_N$ definieren wir eine Addition und eine Skalarmultiplikation durch $\pi(x) + \pi(y) := \pi(x+y)$ und $\alpha\pi(x) := \pi(\alpha x)$ für $x, y \in E$ und $\alpha \in \mathbb{K}$.
Da N ein Vektorraum ist, sind diese Operationen wohldefiniert, wie wir im Videokurs kurz begründen. Damit ist $^E/_N$ ein Vektorraum. Nullvektor in $^E/_N$ ist $\pi(0) = N$.
Definition **5.1.**
$^E/_N$ heißt dann **Quotientenraum von E (modulo N)**.

Weiter ist die Abbildung $\pi : E \to {}^E/_N$ definiert durch $\pi(x) = x + N$ linear und surjektiv mit $N(\pi) = N$.
Definition **5.2.**
π heißt **Quotientenabbildung** oder **kanonischer Epimorphismus**.

Nun sei $\mathcal{T}$ eine Vektorraumtopologie auf E und N ein *abgeschlossener* Unterraum von E. Wir setzen

$$\mathcal{T}_N := \left\{M \subset {}^E/_N \colon \pi^{-1}(M) \subset \mathcal{T}\right\}. \tag{5.2}$$

Dann verifiziert man leicht, dass $\mathcal{T}_N$ eine Topologie auf $^E/_N$ ist.
Definition **5.3.**
Die Topologie $\mathcal{T}_N$ aus (5.2) heißt die **Quotiententopologie auf $^E/_N$**.

Nun beweisen wir grundlegende Eigenschaften von Quotientenräumen.
Satz **5.4.**
Es sei E ein topologischer Vektorraum, N ein abgeschlossener Unterraum, $\mathcal{T}$ die Topologie von E und $\mathcal{T}_N$ die Quotiententopologie auf $^E/_N$. Dann gelten:

a) i.) $\mathcal{T}_N$ ist eine Vektorraumtopologie auf $^E/_N$.
   ii.) $\pi \colon E \to {}^E/_N$ ist linear, stetig und offen.
   iii.) $\mathcal{T}_N$ ist die stärkste Topologie, sodass π stetig ist.
   iv.) $\mathcal{T}_N$ ist die schwächste Topologie, so dass π offen ist. Genauer bedeuten iii.) und iv.):
   Sind $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}''$ Topologien auf $^E/_N$ und ist π stetig bezüglich $\mathcal{T}'$ und offen bezüglich $\mathcal{T}''$, so gilt: $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_N \subset \mathcal{T}''$.

b) Ist $\mathcal{B}$ eine Nullumgebungsbasis von E, so ist $\mathcal{B}_N := \{\pi(U) \colon U \in \mathcal{B}\}$ eine Nullumgebungsbasis von $^E/_N$.

c) Ist E lokalkonvex / lokal beschränkt, so auch ${}^{E}\!/_{N}$.

d) Ist E ein metrischer Vektorraum mit Metrik d, so wird auch die Topologie auf ${}^{E}\!/_{N}$ durch eine Metrik ρ erzeugt. Ist d vollständig, so auch ρ.

e) Ist E ein normierter Raum, so wird auch die Topologie von ${}^{E}\!/_{N}$ durch eine Norm erzeugt.

f) Ist E ein Fréchetraum / Banachraum, so auch ${}^{E}\!/_{N}$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Wir behandeln jetzt zwei kleinere Anwendungen.

***Satz* 5.5.**

Es sei E ein topologischer Vektorraum, N ein abgeschlossener Vektorraum und F ein Unterraum endlicher Dimension. Dann ist $N + F$ abgeschlossen.

Beweis. Im Videokurs. ■

***Bemerkung* 5.6.**

Es sei E ein Vektorraum und p eine Halbnorm auf E mit $N := \{x \in E\colon\ p(x) = 0\}$. Nach Satz 4.3 ist N ein Unterraum von E, daher können wir ${}^{E}\!/_{N}$ und $\pi\colon E \to {}^{E}\!/_{N}$ betrachten. Wir setzen $\|\pi(x)\| = p(x)$ für $x \in E$. Ist $\pi(x) = \pi(y)$, so ist $p(x - y) = 0$ und wegen $|p(x) - p(y)| \le p(x - y)$ ist $p(x) = p(y)$, also $\|\pi(x)\| = \|\pi(y)\|$, d.h. $\|\pi(x)\|$ ist wohldefiniert auf ${}^{E}\!/_{N}$. Man zeigt leicht, dass hierdurch eine Norm auf ${}^{E}\!/_{N}$ definiert wird. Dies ist die gleiche Konstruktion wie in [5] bei der Konstruktion der L_p-Räume.

Ende – Folge 8

6 Beispiele für lokalkonvexe topologische Vektorräume

Wir wollen jetzt einige lokalkonvexe topologische Vektorräume konstruieren, die nicht normierbar sind. Die Konstruktion beruht auf einem gemeinsamen Konzept.

***Satz* 6.1.**

Es sei $(E_n, \|\cdot\|_n)$ eine Folge normierter Räume und $E := \prod_{n=1}^{\infty} E_n$. Dann wird durch $d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, \|x_n - y_n\|_n\}$ für $x = (x_n)$, $y = (y_n) \subset E$ eine Metrik definiert. Weiter gelten folgende Aussagen:

a) Eine Folge $(x^{(k)})_k$ ist konvergent bzw. eine Cauchyfolge genau dann, wenn alle Komponentenfolgen $(x_n^{(k)})_k$ konvergieren bzw. Cauchyfolgen sind.

b) (E, d) ist ein lokalkonvexer metrischer Vektorraum.

c) Sind alle (E_n) Banachräume, so ist E ein Fréchetraum.

d) Ist $E_n \neq \{0\}$ für unendliche viele n, so ist E kein Banachraum, d.h. die Topologie von E wird nicht durch eine Norm induziert.

Beweis. Im Videokurs. ■

***Beispiel* 6.2.**

Es sei $\omega := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Folgen (x_n) in $\mathbb{K}$. Mit den üblichen algebraischen Operationen für Folgen ist ω ein Vektorraum. Nach Satz 6.1 ist ω ein Fréchetraum bezüglich der Metrik $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, |x_n - y_n|\}$ für $x = (x_n), y = (y_n)$.

Eine Folge in ω ist genau dann konvergent, wenn jede Komponentenfolge konvergiert. Man kann zeigen, dass ω die Heine-Borel-Eigenschaft (HBE) hat, d.h. jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge $K \subset \omega$ ist kompakt.

Für die nächsten Beispiele erinnern wir an zwei Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen.

***Definition* 6.3.**

Es seien X, Y topologische Räume und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \to Y$.

- (f_n) heißt **lokal gleichmäßig konvergent** gegen eine Grenzfunktion $f : X \to Y$, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x besitzt, so dass (f_n) in U_x gleichmäßig konvergiert.
- (f_n) heißt **kompakt konvergent** gegen f, wenn (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge von X konvergiert.

***Bemerkung* 6.4.**

Die lokal gleichmäßige Konvergenz impliziert die kompakte Konvergenz. Ist X lokalkompakt, so sind beide Begriffe äquivalent.

Beispiel 6.5.
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C(\Omega) := \{f \text{ ist stetig auf } \Omega\}$. Mit den üblichen algebraischen Operationen für Funktionen ist dies ein Vektorraum. Wir wollen jetzt auf $C(\Omega)$ eine Vektorraumtopologie einführen, sodass die Konvergenz in dieser Topologie die kompakte Konvergenz ist.
Dazu wählen wir eine Ausschöpfungsfolge (K_n) kompakter Mengen $K_n \subset \Omega$, d.h. $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n^\circ = \Omega$. Bemerke, dass dies impliziert, dass zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $K \subset K_n$ für alle $n \geq m$.
Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $\|f\|_n := \max\limits_{t\in K_n} |f(t)|$ für $f \in C(\Omega)$. Dann ist $(C(K_n), \|\cdot\|_n)$ ein Banachraum und daher $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C(K_n)$ nach Satz 6.1 ein Fréchetraum.
Die Abbildung $\phi : C(\Omega) \to \prod\limits_{n=1}^{\infty} C(K_n)$ mit $\phi(f) := (f\mid_{K_n})_{n=1}^{\infty}$ ist linear und injektiv. Weiter gilt

$$R(\phi) = \left\{ (f_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} C(K_n) \colon f_m\mid_{K_j} = f_j \ \forall m \geq j \ \underline{\text{und}} \ j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Also ist $R(\phi)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C(K_n)$ und daher nach Satz 2.17 ein Fréchetraum mit der Metrik $d(f,g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, \|f-g\|_n\}$.
Eine Folge (f_n) in $C(\Omega)$ konvergiert genau dann, wenn sie kompakt konvergiert. Man kann zeigen: $C(\Omega)$ hat die (HBE) nicht.
Man kann dieses Beispiel noch verallgemeinern, indem man Ω durch einen beliebigen lokalkompakten topologischen Raum ersetzt. Dann existiert im Allgemeinen keine Ausschöpfungsfolge mehr und man muss daher folgende Familie von Halbnormen verwenden:

$$\mathcal{P} := \{p_K \colon K \subset X \text{ kompakt}\}, \ p_K(f) := \max_{t\in K} |f(t)|. \tag{6.1}$$

Dann erhält man einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum, der aber im Allgemeinen nicht metrisierbar ist.

Ende – Folge 9

Beispiel 6.6.
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \colon f \text{ ist holomorph in } \Omega\}$. Nach dem Satz von Weierstraß ist $H(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $C(\Omega)$ und daher ein Fréchetraum. Der kleine Satz von Montel impliziert nun, dass $H(\Omega)$ die (HBE) hat.

Beispiel 6.7.
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen

$$C^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \colon D^\alpha \text{ existiert für alle Multiindizes } \alpha \in \mathbb{N}_0^n,\ n \in \mathbb{N}\}. \tag{6.2}$$

Wir wollen auf $C^\infty(\Omega)$ nun eine „sinnvolle“ Topologie einführen. Die Teilraumtopologie von $C(\Omega)$ ist nicht nützlich.
Wir wählen wieder eine Ausschöpfungsfolge (K_n) kompakter Mengen und setzen noch $\Omega_n := K_n^\circ$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\|f\|_n := \max_{|\alpha|\leq n} \sup_{t\in\Omega_n} |D^\alpha f(t)|\,, \ f \in C^\infty(\Omega). \tag{6.3}$$

Dann ist $(C^n(\overline{\Omega}), \|\cdot\|_n)$ ein Banachraum und daher ist $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C^n(\overline{\Omega_n})$ ein Fréchetraum.
Die Abbildung $\phi : C^\infty(\Omega) \to \prod\limits_{n=1}^{\infty} C^n(\overline{\Omega_n})$ mit $\phi(f) := (f\mid_{\Omega_n})_{n=1}^\infty$ linear und injektiv und es gilt

$$R(\phi) = \left\{ (f_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^{\infty} C^n(\overline{\Omega_n})\colon f_m\mid_{\Omega_j} = f_j \ \forall m \geq j \ \underline{\text{und}} \ j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Hieraus folgt, dass $R(\phi)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C^n(\overline{\Omega_n})$ ist und daher ein Fréchetraum mit der Metrik $d(f,g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, \|f-g\|_n\}$. Den Vektorraum $C^\infty(\Omega)$ mit dieser lokalkonvexen Topologie bezeichnet man auch mit $\mathcal{E}(\Omega)$. Man kann zeigen, dass $C^\infty(\Omega)$ die (HBE) <u>nicht</u> hat.

Beispiel 6.8.
Es sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und $\mathcal{D}_K := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^N)\colon \operatorname{supp}(f) \subset K \right\}$. Es ist $\mathcal{D}_K$ ein Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R}^N)$. Zu $t \in \mathbb{R}^n$ definiere $\Phi_t : C^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ durch $\Phi_t(f) := f(t)$. Dann ist Φ_t stetig und

$$\mathcal{D}_K = \bigcap_{t\in\mathbb{R}^N\setminus K} N(\phi_t). \tag{6.4}$$

Beachte, dass diese Menge abgeschlossen ist, da die enthaltenen Kerne alle abgeschlossen sind.
Daher ist $\mathcal{D}_K$ ein abgeschlossener Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, also auch ein Fréchetraum.

Weitere Frécheträume bzw. lokalkonvexe topologische Vektorräume (auch normierte) werden wir im Laufe des Kurses *en passant* einführen, sofern nötig.

ENDE – FOLGE 10

7 Subbasensatz und Satz von Tychonoff

In diesem Abschnitt wollen wir die Voraussetzungen schaffen, um in späteren Kapiteln die *schwache Konvergenz* und die *schwach*-Konvergenz* diskutieren zu können. Wir beginnen mit folgender neuer Begrifflichkeit.

Definition **7.1.**

Es sei X eine Menge und $\mathcal{F} \neq \emptyset$ eine Familie von Abbildungen $f : X \to Y_f$, wobei jedes Y_f ein topologischer Raum ist[3]. Sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ das System aller endlichen Durchschnitte der Mengen $f^{-1}(V)$ mit $f \in \mathcal{F}$ und $V \subset Y_f$ offen. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und jedes $f \in \mathcal{F}$ ist stetig. $\mathcal{T}$ ist die schwächste solche Topologie.
$\mathcal{T}$ heißt die **von $\mathcal{F}$ induzierte Topologie auf X** oder kurz **$\mathcal{F}$-Topologie** auf X.

Nun sei jedes Y_f ein Hausdorffraum und $\mathcal{F}$ punktetrennend auf X, d.h. zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann ist X ein Hausdorffraum.

Beispiel **7.2.**

Es sei A eine Indexmenge und $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie topologischer Räume mit $X_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in A$. Weiter sei

$$X := \prod_{\alpha\in A} X_\alpha := \left\{ f : A \to \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha \colon f(\alpha) \in X_\alpha \right\} \tag{7.1}$$

das kartesische Produkt der X_α. Nach dem Auswahlaxiom gilt $X \neq \emptyset$. Dann ist die *Produkttopologie* die $\{\pi_\alpha\}$-Topologie auf X, wobei $\pi_\alpha : X \to X_\alpha,\ x \mapsto x(\alpha)$ die kanonischen Projektionen sind.
Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \to X$ eine Abbildung, so ist f stetig genau dann, wenn alle Koordinatenabbildungen $f_\alpha := \pi_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$ stetig sind.
Ist jedes X_α ein Hausdorffraum, so auch X, denn sind $x = (x_\alpha)$ und $y = (y_\alpha)$ aus X mit $x \neq y$, so existiert $\alpha \in A$ mit $x_\alpha \neq y_\alpha$. Somit gilt $\pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(y)$ und folglich ist $\{\pi_\alpha \colon \alpha \in A\}$ punktetrennend.

Wir benötigen im Folgenden einen der wichtigsten Sätze über die Produkttopologie. Dazu sind einige Vorbereitungen nötig.

Definition **7.3.**

Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. $\mathcal{S}$ heißt **Subbasis** von $\mathcal{T}$, wenn die Menge aller endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ bilden.
Ist $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ und $\cup\{U \subset X \colon U \in \mathcal{S}'\} = X$, so nennt man $\mathcal{S}'$ eine **$\mathcal{S}'$-Überdeckung von X**.

Satz **7.4 (*Subbasensatz von Alexander*).**

Es sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie auf X und jede $\mathcal{S}$-Überdeckung von X besitze eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist X kompakt.

[3] In vielen Fällen sind die Y_f alle gleich.

Beweis. Im Videokurs. ■

Ende – Folge 11

Als Abschluss des Kurses beweisen wir nun einen der wichtigsten Sätze der Topologie.

Theorem 7.5 (*Satz von Tychonoff*).
Es sei A eine Indexmenge und X_α, $\alpha \in A$, topologische Räume. Dann gilt:
$\Pi := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ kompakt. $\Leftrightarrow$ X_α kompakt für alle $\alpha \in A$.

Beweis. Im Videokurs. ■

Ende – Folge 12

Epilog

Ich hoffe, dass ich mit diesem Kurs und diesem Skript ein wenig Wissen (und nicht zu Letzt auch ein wenig Freude) an der Materie vermitteln konnte. Sollte dies auch nur für einen Zuschauer zutreffen, so hat es sich für mich bereits gelohnt.

Matthias Schulte, 2022.

Literatur

[Brü19] Brück, Rainer. *Funktionalanalysis I*. Vorlesungsmitschrift zur gleichnamigen Vorlesung an der TU Dortmund im Wintersemester 2018/19. Hier zu finden. (Aufgerufen am 19.03.2020, 18:11 Uhr). 2019.

[Kab11] Kaballo, Winfried. Grundkurs Funktionalanalysis. Heidelberg: Spektrum, 2011.

[Que01] Querenburg, Boto v. Mengentheoretische Topologie. 3. Aufl. Berlin: Springer, 2001.

[Rud73] Rudin, Walter. Functional Analysis. 2. Aufl. New York: McGraw-Hill, 1973.

[Sch19] Schulte, Matthias. Grundlagen der Funktionalanalysis. Verfügbar unter `http://www.mschulte-mathematik.de/Abgeschlossene-Projekte.htm`. (Aufgerufen am 19.01.2022, 23:05 Uhr). 2019.