Topologie

Skript

Sommersemester 2017

Matthias Schulte

Technische Universität Dortmund

Version vom 7. September 2017

Inhaltsverzeichnis

Einleitung, Motivation und Disclaimer

Das vorliegende Skript ist eine digitale Abschrift der Vorlesung **Topologie**, wie sie im Sommersemester 2017 an der Technischen Universität Dortmund von Prof. Dr. Rainer Brück gehalten wurde.

Für etwaige Tippfehler in diesem Skript übernehme ich keine Haftung.

Viel Erfolg (und ein wenig Spaß) mit diesem Skript.

Matthias Schulte, September 2017.

1 Topologische Räume und stetige Abbildungen

1.1 Grundlegende topologische Begriffe und Beispiele

Definition 1.1.1.
Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge.

- Ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Topologie auf X**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:

  (O1) $\varnothing \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

  (O2) Sind $n \in \mathbb{N}$, $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$, so sei auch $\bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j \in \mathcal{T}$.

  (O3) Sind A eine Indexmenge und $U_\alpha \in \mathcal{T}$ für $\alpha \in A$, so sei auch $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_j \in \mathcal{T}$.

- Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt **topologischer Raum**.

- Jede Menge $U \in \mathcal{T}$ heißt **offene Menge**.

- Ein System offener Mengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt **Basis der Topologie $\mathcal{T}$**, wenn es zu jeder offenen Menge U und jedem $x \in U$ ein $V \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in V \subset U$.
  Es ist also $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, wenn jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ geschrieben werden kann.

- Ein System offener Mengen $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ heißt **Subbasis der Topologie $\mathcal{T}$**, wenn das System aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ ist.

- Sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X mit $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, so heißt $\mathcal{T}_1$ **schwächer/gröber** als $\mathcal{T}_2$ bzw. $\mathcal{T}_2$ heißt **stärker/feiner** als $\mathcal{T}_1$. Man schreibt dann auch $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$.

- Eine Menge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $A^C := X \backslash A$ offen ist.

- Ist $Y \subset X$ und $\mathcal{S} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$, so ist $\mathcal{S}$ eine Topologie auf Y und heißt **Teilraumtopologie/die von $\mathcal{T}$ auf Y induzierte Topologie/die Spurtopologie auf Y**. *Beachte:* Dieses $\mathcal{S}$ hat nichts mit der Subbasis zu tun!

. . . .

Folgerung 1.1.2.
Sei X ein topologischer Raum. Dann gelten:

(A1) $\varnothing$ und X sind abgeschlossen.

(A2) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $A1, ..., A_n$ abgeschlossen, so ist auch $\bigcup_{j=1}^{n} A_n$ abgeschlossen.

(A3) Sind A eine Indexmenge und A_α abgeschlossen für $\alpha \in A$, so ist auch $\bigcap_{\alpha \in A} A_\alpha$ auch wieder abgeschlossen.

Beweis.
Die Aussagen folgen sofort aus Definition 1.1.1 und den de Morganschen Regeln. $\square$

. . . .

Definition 1.1.3.
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
Ein System $\mathcal{F}$ abgeschlossener Mengen heißt **Basis der abgeschlossenen Mengen von $\boldsymbol{\mathcal{T}}$**, wenn jede abgeschlossene Menge als Durchschnitt von Elementen aus $\mathcal{F}$ dargestellt werden kann.

. . . .

Definition 1.1.4.
Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$.

- Eine Menge $U \subset X$ heißt **Umgebung von $\boldsymbol{x}$**, wenn es eine offene Menge $V \subset X$ gibt mit $x \in V \subset U$. Die Menge aller Umgebungen von X bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(x)$.
- Ist $Y \subset X$, so heißt $V \subset X$ **Umgebung von $\boldsymbol{Y}$**, wenn $V \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in Y$. Äquivalent dazu ist, dass es eine offene Menge $U \subset X$ gibt mit $Y \subset U \subset V$.
- Ein Mengensystem $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ heißt **Umgebungsbasis von $\boldsymbol{x}$/lokale Basis von $\boldsymbol{x}$**, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{U}(x)$ ein $U \in \mathcal{B}(x)$ gibt mit $U \subset V$.

. . . .

Bevor wir nun zu Beispielen kommen, behandeln wir noch einige Eigenschaften, die direkt aus den Definitionen folgen.

Folgerung 1.1.5.

a) Ist X eine Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$, so sind alle Topologien $\mathcal{T}$ auf X, die $\mathcal{B}$ als Basis haben, gleich. *Es kann sein, dass verschiedene Basen dieselbe Topologie erzeugen.*

b) Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, so hat $\mathcal{B}$ folgende Eigenschaften:

   (1) Die Vereinigung aller Mengen aus $\mathcal{B}$ ergibt den ganzen Raum.

   (2) Der Durchschnitt zweier Elemente aus $\mathcal{B}$ ist als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ darstellbar.

c) Ist X eine Menge und $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ ein Mengensystem mit den Eigenschaften aus b), so existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, die $\mathcal{B}$ als Basis hat.

d) Ist $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Basis der abgeschlossenen Mengen auf X, so hat $\mathcal{F}$ folgende Eigenschaften:

   (1) Der Durchschnitt aller Mengen aus $\mathcal{F}$ ist leer.

   (2) Die Vereinigung zweier Elemente aus $\mathcal{F}$ ist als Durchschnitt von Mengen von $\mathcal{F}$ darstellbar.

e) Ist X eine Menge und hat $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ die Eigenschaften aus d), so ist $\mathcal{F}$ Basis der abgeschlossenen Mengen einer eindeutig bestimmten Topologie $\mathcal{T}$ auf X.

f) Ist X ein topologischer Raum, so ist $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ eine Basis für die abgeschlossenen Mengen von X genau dann, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $G \subset X$ und jedem $x \in X \backslash G$ ein $F \in \mathcal{F}$ gibt mit $G \subset F$ und $x \notin F$.

....

Jetzt behandeln wir eine Reihe von Beispielen.

Beispiel 1.1.6.

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, d.h. X ist eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik.
   Für $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\} \tag{1.1}$$

   ε-Umgebung von x_0.
   Eine Menge $U \subset X$ heißt offen, wenn es zu jedem $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) \subset U$. Dann ist

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X : U \text{ ist offen.}\} \tag{1.2}$$

   Sie heißt die **von d induzierte Topologie**.
   Für $x \in X$ ist

$$\mathcal{B}(x) := \{U_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\} \text{ bzw. } \mathcal{B}'(x) := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\} \tag{1.3}$$

   eine Umgebungsbasis von x. Man kann hier statt $\left(\frac{1}{n}\right)$ jede Nullfolge (r_n) positiver Zahlen nehmen. Insbesondere besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine *abzählbare* Umgebungsbasis.
   Weiter ist

$$\mathcal{B} = \{U_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0 \text{ und } x \in X\} \text{ bzw. } \mathcal{B}' = \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in X\} \tag{1.4}$$

eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$ wie in (1.2).
Für zwei Mengen $A, B \subset X$ setzen wir noch

$$\operatorname{dist}(A,B) := \inf\{d(a,b) : a \in A, b \in B\} \in [0,\infty). \tag{1.5}$$

Besteht B nur aus einem Punkt $x \in X$, so schreiben wir statt $\operatorname{dist}(A,B) = \operatorname{dist}(A,\{x\})$ auch einfach $\operatorname{dist}(A,x)$.
Ist $Y \subset X$, so sind die ε-Umgebungen

$$\{x \in X : \operatorname{dist}(x,Y) < \varepsilon\} \tag{1.6}$$

Umgebungen von Y.
Betrachten wir speziell $Y = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ in $X = \mathbb{R}$, so ist

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n(n+1)}, \frac{1}{n} + \frac{1}{2n(n+1)} \right) \tag{1.7}$$

eine Umgebung von Y aus disjunkten Teilmengen, die keine ε-Umgebung enthält, da diese beliebig klein werden und somit anschaulich gesehen kein ε mehr dazwischen passt.

b) Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, d.h. X ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und es existiert eine Norm $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$. Dann wird durch $d(x,y) = ||x-y||$ eine Metrik auf X definiert und damit eine Topologie. Insbesondere sind die Räume $\mathbb{K}^n$ mit den kanonischen euklidischen Metriken topologische Räume, wobei wir die zugehörigen Topologien mit $\mathcal{T}_n$ bezeichnen.
Da die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegen, bildet das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{Q},\ a<b\} \tag{1.8}$$

eine Basis der Topologie von $\mathbb{R}$. Entsprechend bildet das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \{U_{\frac{1}{n}}(x) : k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Q}^n\} \tag{1.9}$$

eine Basis der Topologie von $\mathbb{R}^n$. Insbesondere besitzen auch diese Topologien $\mathcal{T}_n$ eine abzählbare Basis, da es *eine abzählbare dichte Teilmenge* in $\mathbb{R}^n$ – nämlich $\mathbb{Q}^n$ – gibt.

c) Sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, in der jede Menge $E \subset X$ offen und abgeschlossen ist. $\mathcal{T}$ heißt **diskrete Topologie** und wird mit $\mathcal{T}_{dis}$ bezeichnet.

Definieren wir $d : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & : \quad x = y \\ 1 & : \quad x \neq y \end{cases}, \tag{1.10}$$

so ist d eine Metrik, die die Topologie $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{T}_d$ induziert. d heißt **diskrete Metrik**. Für $x \in X$ ist $U(x) = \{x\}$ eine Umgebungsbasis von x. Weiter ist

$$\mathcal{B} = \{\{x\} : x \in X\} \tag{1.11}$$

eine Basis von $\mathcal{T}_d$.

d) Sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und die einzigen offenen Mengen sind $\varnothing$ und X. $\mathcal{T}$ heißt **indiskrete Topologie** und wird mit $\mathcal{T}_{ind}$ bezeichnet. Eine Basis ist gegeben durch $\mathcal{B} = \{X\}$.

e) Wir betrachten auf $X = \mathbb{R}$ das Mengensystem

$$\mathcal{T}_< := \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, \mathbb{R}\}. \tag{1.12}$$

Dies ist eine Topologie auf $\mathbb{R}$. Eine Basis ist gegeben durch

$$\mathcal{B}_< = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\}. \tag{1.13}$$

f) Wir betrachten in $X = \mathbb{R}$ das Mengensystem aller Vereinigungen von abgeschlossenen Intervallen der Form $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$. Dadurch erhält man eine Topologie $\mathcal{T}_\leq$ mit

$$\mathcal{T}_\leq := \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\varnothing, X\}. \tag{1.14}$$

Das Mengensystem $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{Q}\}$ ist <u>keine</u> Basis von $\mathcal{T}_\leq$, denn $(-\infty, \xi]$ mit ξ irrational kann nicht als Vereinigung von Mengen $(-\infty, a]$ dargestellt werden.

g) Sei X eine unendliche Menge und

$$\mathcal{T}_{cof} := \{U \subset X : U = \varnothing \text{ oder } X \backslash U \text{ unendlich}\}. \tag{1.15}$$

Dies ist eine Topologie auf X und heißt **kofinite Topologie** auf X.
Ist speziell $X = \mathbb{R}$, so gilt:

$$\mathcal{T}_{ind} \subset \mathcal{T}_{cof} \subset \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_{dis}, \ \mathcal{T}_{ind} \subset \mathcal{T}_< \subset \mathcal{T}_\leq \subset \mathcal{T}_{dis} \text{ und } \mathcal{T}_< \subset \mathcal{T}_1. \tag{1.16}$$

h) Eine Menge X heißt **geordnet**, wenn eine Relation $\leq$ auf X definiert ist, die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ist. Eine geordnete Menge heißt **linear ge-**

ordnet, wenn für je zwei Elemente $x, y \in X$ stets gilt $x \leq y$ oder $y \leq x$. Z.B. ist $\mathbb{R}$ mit der üblichen Ordnung linear geordnet.
Auf einer linear geordneten Menge kann man den üblichen Intervallbegriff einführen. Nun sei X eine linear geordnete Menge. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, a) : a \in X\} \cup \{(a, \infty) : a \in X\}. \tag{1.17}$$

Dies ist eine Subbasis einer Topologie auf X, die wir **Ordnungstopologie** auf X nennen. Ein Beispiel hierfür ist die natürliche Topologie auf $X = \mathbb{R}$.

i) Ist X eine Menge und sind d und ρ Metriken auf X, so können die dadurch induzierten Topologien übereinstimmen, also $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_\rho$ gilt. Dies ist sicher der Fall, wenn die identischen Abbildungen

$$Id : (X, \mathcal{T}_d) \to (X, \mathcal{T}_\rho) \text{ und } Id : (X, \mathcal{T}_\rho) \to (X, \mathcal{T}_d) \tag{1.18}$$

beide stetig sind[1].
Beispiele sind die Metriken d_1, d_2 und d_∞ auf $\mathbb{R}^n$:

$$d_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \; d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}, \; d_\infty(x, y) = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - y_k|. \tag{1.19}$$

Hierbei sind d_1 und d_2 Spezialfälle der analog definierten d_p-Metrik

$$d_p(x, y) = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p}, \tag{1.20}$$

die für feste x, y für $p \to \infty$ gegen die d_∞-Metrik konvergiert. Es gilt

$$d_1(x, y) \leq \sqrt{n} d_2(x, y), \; d_2(x, y) \leq n d_\infty(x, y) \text{ und } d_\infty(x, y) \leq d_1(x, y). \tag{1.21}$$

Dies impliziert die (sogar gleichmäßige) Stetigkeit der zugehörigen identischen Abbildungen, womit d_1, d_2 und d_∞ die gleiche Topologie erzeugen.
Auch die Metriken $d(x, y) = |x - y|$ und $\rho(x, y) = \left|\frac{1}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right|$ erzeugen auf $\mathbb{R}$ die gleiche Topologie, obwohl $id : (\mathbb{R}, \rho) \to (\mathbb{R}, d)$ stetig, aber nicht gleichmäßig stetig ist.[2]

[1] Was wir an dieser Stelle durchaus schon jetzt so formulieren können, da wir hier zwei metrische Räume betrachten, auf der Stetigkeit wie gewohnt definiert ist.

[2] Man kann auch zeigen, dass $\mathbb{R}$ mit der Metrik d vollständig ist, mit der Metrik ρ aber nicht. Man betrachte hierzu die Folge $a_n = n$. Diese ist bezüglich ρ eine Cauchyfolge, aber eben nicht konvergent.

j) Eine Subbasis der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{Q}\} \cup \{(a, \infty) : a \in \mathbb{Q}\}. \tag{1.22}$$

Analog ist eine Subbasis für die Standardtopologie eines abgeschlossenen Intervalls $[a, b]$ gegeben durch

$$\mathcal{S}_{[a,b]} = \{[a, c) : a < c < b\} \cup \{(c, b] : a < c < b\}, \tag{1.23}$$

wobei es nicht wichtig ist, ob $c \in \mathbb{R}$ oder $c \in \mathbb{Q}$ gilt.

k) Ist X eine Menge und $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$, so ist das Mengensystem $\mathcal{B}$ aller endlichen Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{S}$ Basis einer eindeutig bestimmten Topologie.

l) Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Das *Spektrum von R* ist die Menge aller Primideale von R. Für ein beliebiges Ideal I betrachten wir nun die Menge $F(I) =$ Menge aller Primideale, die I enthalten. Jetzt definieren wir eine Topologie auf $X = \operatorname{Spec}(X)$, indem wir die abgeschlossenen Mengen angeben:
Eine Menge F von Idealen in X heißt abgeschlossen, wenn $F = F(I)$ gilt für ein Ideal $I \in R$. Insbesondere sei $F((0)) = X$.
Dies ist eine Topologie auf X und heißt *Zariski*[3]*-Topologie*.

[3]Oskar Zariski, 1899-1986, US-Amerikanischer Mathematiker

1.2 Umgebungen

Den Begriff der ε-Umgebung in metrischen Räumen haben wir bereits verallgemeinert. Wir wollen jetzt Umgebungen etwas genauer untersuchen.

Lemma 1.2.1.
Sei X ein topologischer Raum und $U \subset X$. Dann sind äquivalent:

a) U ist offen.

b) U ist Umgebung jedes seiner Punkte x.

c) Zu jedem $x \in U$ existiert ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $x \in V \subset U$.

Beweis. Der Beweis ist klar und folgt aus Definition 1.1.4. □

. . . .

Satz 1.2.2.
Es sei X ein topologischer Raum. Dann haben die Umgebungssysteme folgende Eigenschaften:

a) Ist $U \in \mathcal{U}(x)$ und $U' \subset X$ mit $U' \supset U$, so ist $U' \in \mathcal{U}(x)$.

b) Ist $n \in \mathbb{N}$ und $U_1, ..., U_n \in \mathcal{U}(x)$, so ist auch $\bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j \in \mathcal{U}(x)$.

c) Ist $U \in \mathcal{U}(x)$, so ist $x \in U$.

d) Zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert ein $V \in \mathcal{U}(x)$, sodass $U \in \mathcal{U}(y)$ für jedes $y \in V$.

Beweis. Die Aussagen a), b) und c) sind klar und folgend wieder aus Definition 1.1.4. Wenn $U \in \mathcal{U}(x)$ ist, so existiert eine offene Menge $V \subset X$ mit $x \in V \subset U$. Dieses V hat dann die in d) gewünschten Eigenschaften. □

. . . .

Satz 1.2.3.
Es sei X eine Menge.
Wenn jedem $x \in X$ ein nichtleeres Mengensystem $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ mit den Eigenschaften a) bis d) aus Satz 1.2.2 zugeordnet ist, so existiert genau eine Topologie $\mathcal{T}$ auf X, die für jedes $x \in X$ das Mengensystem $\mathcal{U}(x)$ als Umgebungssystem besitzt.

Beweis.
Eindeutigkeit:
Sei $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und $\mathcal{U}(x)$ ein Umgebungssystem von $x \in X$. Ist $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$, so ist $\mathcal{U}$ Umgebung jedes seiner Punkte und dies ist nach Lemma 1.2.1 äquivalent zu $\mathcal{U} \in \mathcal{T}$. Somit ist $\mathcal{T}$ eindeutig.

Existenz:
Wir definieren $\mathcal{T} := \{U \subset X : U \in \mathcal{U}(x)\ \forall x \in X\}$ und weisen nach, dass dies eine Topologie auf X ist. Für $x \in X$ sei nun $\mathcal{U}'(x)$ das von $\mathcal{T}$ erzeugte Umgebungssystem von x. Wir müssen nun zeigen, dass $\mathcal{U}'(x) = \mathcal{U}(x)$ gilt.
Sei also $U' \in \mathcal{U}'(x)$. Nach Definition der Umgebung existiert ein $U \in \mathcal{T}$ mit $x \in U \subset U'$. Wegen der Definition von $\mathcal{T}$ ist $U \subset \mathcal{U}(x)$ und wegen Satz 1.2.2 ist $U' \in \mathcal{U}(x)$.
Nun sei umgekehrt $U \in \mathcal{U}(x)$ und $U^\star := \{y \in X : U \in \mathcal{U}(y)\} \subset U$. Aus Satz 1.2.2 c) folgt $x \in U$. Jetzt sei $y \in U^\star$. Dann existiert nach Satz 1.2.2 d) ein $V \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \in \mathcal{U}(z)$ für alle $z \in V$, d.h.: $V \subset U^\star \Rightarrow U^\star \in \mathcal{U}(y)$ für alle $y \in U^\star$, also $U^\star \in \mathcal{T}$. Somit folgt $U \in \mathcal{U}'(x)$ und damit die Behauptung. □

. . . .

Definition 1.2.4.

a) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine (höchstens) abzählbare Umgebungsbasis hat.

b) Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, wenn $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis hat.

. . . .

Beispiel 1.2.5.

a) Jeder metrische Raum erfüllt das erste Abzählbarkeitsaxiom. Insbesondere hat jeder diskrete Raum diese Eigenschaft.
Ist X überabzählbar (z.B. $X = \mathbb{R}$) und ist $\mathcal{T}$ die kofinite Topologie wie in 1.1.6 g), so erfüllt X *nicht* das erste Abzählbarkeitsaxiom.

b) Falls ein topologischer Raum das zweite Abzählbarkeitssaxiom, so auch das erste. Die indiskrete Topologie erfüllt stets beide Abzählbarkeitsaxiome. Die Topologien $\mathcal{T}_n$ und $\mathcal{T}_<$ erfüllen das zweite Abzählbarkeitsaxiom, $\mathcal{T}_\leq$ nicht.
Ein diskreter Raum X erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom genau dann, wenn X abzählbar ist.

. . . .

Jetzt wollen wir einige bekannte Begriffe aus der Analysis in topologische Räume übertragen.

Definition 1.2.6.
Sei X ein topologischer Raum und $E \subset X$.

- Ein Punkt $x \in E$ heißt **innerer Punkt von *E***, wenn es eine Umgebung U von x gibt mit $x \in U \subset E$. Die Menge aller inneren Punkte von E heißt das **Innere von *E*** oder der **innere Kern von *E***. Bezeichnung: E°.

- Ein Punkt $x \in X$ heißt **Randpunkt von $\boldsymbol{E}$**, wenn für jede Umgebung U von x gilt:

  $$U \cap E \neq \varnothing \text{ und } U \cap E^C \neq \varnothing. \tag{1.24}$$

  Die Menge aller Randpunkte heißt **Rand von $\boldsymbol{E}$**. Bezeichnung: ∂E.

- Ein Randpunkt $x \in \partial E$ mit $x \notin E$ heißt **Berührpunkt**.

- Ein Punkt $x \in X$ heißt **Häufungspunkt von $\boldsymbol{E}$**, wenn für jede Umgebung U von x gilt:

  $$(U \backslash \{x\}) \cap E \neq \varnothing. \tag{1.25}$$

  Die Menge aller Häufungspunkte bezeichnen wir mit E'

- Die Menge $\overline{E} = \{x \in X : U \cap E \neq \varnothing \ \forall U \in \mathcal{U}(x)\}$ heißt die **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss von $\boldsymbol{E}$**.

- Die Menge E heißt **dicht** in X, wenn $\overline{E} = X$ gilt.

- Die Menge E heißt **nirgends dicht** in X, wenn $(\overline{E})^\circ = \varnothing$ gilt.

. . . .

Die Mengen E, E° und ∂E kann man folgendermaßen charakterisieren.

Satz 1.2.7.
Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ das System der abgeschlossenen Mengen in X und $E \subset X$. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) Es ist $\overline{E} = \bigcap\{F \in \mathcal{F} : F \supset E\} := \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}, F \supset E} F$, d.h. $\overline{E}$ ist die kleinste abgeschlossene Menge, die E enthält.

b) Es ist $E^\circ = \bigcup\{U \in \mathcal{T} : U \subset E\}$, d.h. E° ist die größte Menge, die in E enthalten ist.

c) Es ist $\partial E = \overline{E} \backslash E^\circ$.

[*Ohne Beweis.*]

. . . .

Für metrische Räume gelten folgende Aussagen:

Satz 1.2.8.
Sei (X, d) ein metrischer Raum, $x \in X$, $E \subset X$ und $E \neq \varnothing$. Dann gelten:

a) Es ist $x \in \overline{E}$ genau dann, wenn $\operatorname{dist}(x, E) = 0$.

b) Es ist $x \in \partial E$ genau dann, wenn $\operatorname{dist}(x, E) = 0$ und $\operatorname{dist}(x, X \backslash E) = 0$.

c) Es ist $x \in E^\circ$ genau dann, wenn $\operatorname{dist}(x, X \backslash E) > 0$.

Beweis.
Es genügt, Teil a) zu beweisen, Teil b) und c) folgen dann unmittelbar.
Ist $\operatorname{dist}(x, E) = \varepsilon > 0$, so folgt $U_\varepsilon(x) \cap E = \varnothing$. Also liegt $x \notin \overline{E}$.
Ist $\operatorname{dist}(x, E) = 0$ und U eine Umgebung von x, so existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subset U$ und wegen $\operatorname{dist}(x, E) = 0$ existiert ein $y \in E$ mit $y \in U_\varepsilon(x)$. Somit ist $x \in \overline{E}$, womit die Behauptung folgt. □

. . . .

Beispiel 1.2.9.

a) Die Menge $E = [0,1) \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen noch abgeschlossen. Es ist $\overline{E} = [0,1] \cup \{2\}$, $E^\circ = (0,1)$, $\partial E = \{0,1,2\}$ und $E' = [0,1]$.

b) Die Menge $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R}$ ist ebenfalls weder offen noch abgeschlossen. Es ist $\overline{E} = E \cup \{0\}$, $E^\circ = \varnothing$, $\partial E = \overline{E}$ und $E' = \{0\}$.

c) Für die Menge $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^\circ = \varnothing$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$.

d) Es sei X eine unendliche Menge, die die kofinite Topologie trägt und $E \subset X$.

   1. E ist endlich. Dann gilt $\overline{E} = E$, $E^\circ = \varnothing$, $\partial E = E$ und E ist nirgends dicht in X.
   2. $X \backslash E$ ist endlich. Dann gilt $\overline{E} = X$, $E^\circ = E$, $\partial E = X \backslash E$ und E ist dicht in X.
   3. E und $X \backslash E$ sind endlich. Dann gilt $\overline{E} = X$, $E^\circ = \varnothing$, $\partial E = X$ und E ist dicht in X.

e) Ist X ein topologischer Raum und $E \subset X$ offen oder abgeschlossen. Dann ist ∂E nirgends dicht in E.

f) Ist X ein topologischer Raum und E eine abgeschlossene echte Teilmenge. Dann ist E nicht dicht in X, jedoch hat E nicht die Eigenschaft, nirgends dicht zu sein, falls $E^\circ \neq \varnothing$.

. . . .

Beispiel 1.2.10 (Cantorsches Diskontinuum).
Gegeben sei $c_0 = [0,1]$. Man entfernt nun iterativ aus jedem enthaltenen Intervall das offene mittlere Drittel und erhält so eine Folge (c_n) abgeschlossener Mengen mit $c_{n+1} \subset c_n$ und $C = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} c_n \neq \varnothing$ abgeschlossen und sogar kompakt.
c_n ist Vereinigung von 2^k Intervallen der Länge 3^{-k}. Es gilt ferner $C^\circ = \varnothing$, d.h. C ist nirgends dicht in $[0,1]$.

Behauptung: Es gilt $C' = C$.

Beweis. Da die Menge C abgeschlossen ist, ist klar, dass $C' \subset C$ gilt.
Sei daher nun $x \in C$ und $\varepsilon > 0$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere I_k das Intervall von c_k, das x enthält. Wähle k nun so groß, dass $I_k \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ gilt. Wähle x' als Randpunkt von I_k mit $x' \neq x$. Damit folgt $x' \in C \cap (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ und somit $x \in C$. □

Hieraus folgt aus Aufgabe 3 auf Blatt 3, dass C sogar überabzählbar ist, da es nach den vorhergehenden Überlegungen eine perfekte Menge ist.

. . . .

1.3 Stetige Abbildungen

Wir wollen nun den Begriff der Stetigkeit in topologische Räume übertragen.

Definition 1.3.1.
Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X$ und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt **stetig** in x_0, wenn es zu jeder Umgebung V von $y_0 = f(x_0)$ eine Umgebung U von x_0 gibt mit $f(U) \subset V$, d.h. $f^{-1}(V)$ ist Umgebung von x_0. f heißt stetig auf X oder kurz stetig, wenn

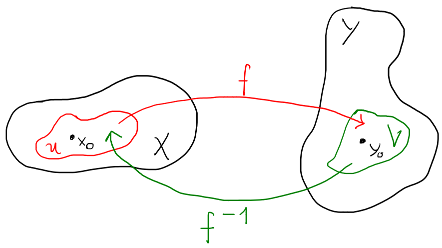

Abbildung 1: Visualisierung der Stetigkeit

f für jedes $x_0 \in X$ stetig in x_0 ist.
f heißt ein **Homöomorphismus** von X auf Y, wenn f bijektiv und sowohl f als auch f^{-1} stetig sind. Man sagt auch, f ist eine *topologische Abbildung*. Die Räume X und Y heißen **homöomorph** oder **topologisch äquivalent**.

....

Satz 1.3.2.
Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

a) f ist stetig.

b) Für jede Menge $E \subset X$ gilt: $f(\overline{E}) \subset \overline{f(E)}$.

c) Für jede abgeschlossene Menge $G \subset Y$ ist die Urbildmenge $f^{-1} = f^{-1}(G)$ abgeschlossen in X.

d) Jür jede offene Menge V in Y ist $f^{-1}(V) = U$ offen in X.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Sei $y \in f(\overline{E})$ und V eine Umgebung von y. Dann existiert ein $x \in \overline{E}$ mit $y = f(x)$. Da f stetig in x ist, existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Wegen $x \in \overline{E}$ ist $U \cap E \neq \varnothing$ und es folgt

$$V \cap f(E) \supset f(U) \cap f(E) \supset f(U \cap E) \neq \varnothing. \tag{1.26}$$

Somit ist $V \cap f(E) \neq \varnothing$, also gilt $y \in f(E)$ und es folgt $y \in \overline{f(E)}$.
b) $\Rightarrow$ c):
Sei G abgeschlossen in Y und $F := f^{-1}(G)$. Dann folgt $f(F) \subset G$ und somit mit Teil b) $f(\overline{F}) \subset \overline{f(F)} \subset \overline{G} = G$. Daher ist durch Anwendung der Umkehrfunktion $\overline{F} \subset f^{-1}(G) = F$ und damit $\overline{F} = F$, also ist F abgeschlossen in X.
c) $\Rightarrow$ d):
Sei $V \subset Y$ offen und $U = f^{-1}(V)$. Dann ist $Y \setminus V$ abgeschlossen in Y. Dann ist auch $X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V)$ abgeschlossen in X und daraus folgt, dass $f^{-1}(V)$ offen in X ist.
d) $\Rightarrow$ a):
Sei $x_0 \in X$ und W eine Umgebung von $y_0 = f(x_0)$. Dann existiert eine offene Umgebung V von y_0 mit $y_0 \in V \subset W$. Somit ist $f^{-1}(V)$ offen und eine Umgebung von x_0, also ist f stetig in x_0. □

. . . .

Satz 1.3.3.
Es seien X, Y, Z topologische Räume, $x_0 \in X$ und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann gelten:

a) Ist f stetig in x_0 und g stetig in $y_0 = f(x_0)$, so ist $(g \circ f)$ stetig in x_0.

b) Sind f und g stetig, so auch $g \circ f : X \to Z$.

Beweis.

a) Sei W eine Umgebung von $z_0 = g(y_0) \in Z$. Da g stetig in y_0 ist, existiert eine Umgebung V von $y_0 \in Y$ mit $g(V) \subset W$. Da f stetig in x_0 ist, existiert eine Umgebung von U von $x_0 \in X$ mit $f(U) \subset V$. Somit folgt

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W,$$

also ist $g \circ f$ stetig in x_0.

b) Folgt sofort aus a).

□

. . . .

Satz 1.3.4.
Es seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $\mathcal{S}_2$ eine Subbasis von $\mathcal{T}_2$. Dann gilt:
f ist stetig. $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(S)$ ist offen in X für alle $S \in \mathcal{S}_2$.

Beweis.
Die Behauptung folgt aus Satz 1.3.2 d) und der Tatsache, dass für jede Indexmenge A gilt:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in A} E_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in A} f^{-1}(E_\alpha) \text{ und } f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in A} E_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in A} f^{-1}(E_\alpha). \tag{1.27}$$

□

....

Bemerkung 1.3.5.

a) Sind X, Y metrische Räume, so stimmt obige Definition der Stetigkeit mit der ε-δ-Stetigkeit überein.

b) Seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume. Ist $\mathcal{T}_1$ die diskrete Topologie und $\mathcal{T}_2$ eine beliebige Topologie, so ist jede Abbildung $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ stetig. Entsprechendes gilt, wenn $\mathcal{T}_2$ die indiskrete Topologie ist.

c) Sind X eine Menge und $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ Topologien auf X. Dann gilt: Die identische Abbildung $id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ ist stetig genau dann, wenn $\mathcal{T}_2$ schwächer als $\mathcal{T}_1$ ist. In anderen Worten heißt dies

   ⋆) $\mathcal{T}_2$ enthält weniger offene Mengen als $\mathcal{T}_1$,

   ⋆) $\mathcal{T}_2$ enthält weniger abgeschlossene Mengen als $\mathcal{T}_1$,

   ⋆) $\mathcal{T}_2$ enthält weniger stetige Abbildungen in einen anderen beliebigen topologischen Raum als $\mathcal{T}_1$.

d) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und Y ein Teilraum von X, welcher mit der Spurtopologie versehen ist. Dazu sei $j : Y \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Dann ist j stetig und die Spurtopologie ist die schwächste Topologie auf Y, sodass j stetig ist.

....

Beispiel 1.3.6.

a) Ist X ein topologischer Raum und sind $f, g : X \to \mathbb{R}$ stetig in $x_0 \in X$. Dann sind auch $f \pm g$, af für $a \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$ und $|f|$ stetig in x_0. Ist $f(x_0) \neq 0$, so ist auch $1/f$ stetig in x_0.

b) Wir versehen $\mathbb{R}$ mit der Topologie $\mathcal{T}_<$. Weiter sei X ein topologischer Raum und $f : X \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_<)$ eine Abbildung. Dann gilt:
f ist stetig in $x_0 \in X$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U von x_0 gibt mit $f(x) < f(x_0 + \varepsilon)$ für alle $x \in U$, d.h. falls f oberhalb stetig in x_0 ist. Entsprechend kann man den Begriff unterhalb stetig durch eine Topologie $\mathcal{T}_>$ charakterisieren.

Definition 1.3.7.
Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt **offen**, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ die Bildmenge $V = f(U)$ offen in Y ist. Entsprechend heißt f **abgeschlossen**, wenn für jede abgeschlossene Menge $F \subset X$ die Bildmenge $G = f(F)$ abgeschlossen in Y ist.

Bemerkung:
Seien $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (Y, \mathcal{T}_2)$ eine Abbildung. Ferner sei $\mathcal{S}_1$ eine beliebige Subbasis von $\mathcal{T}_1$. Dann gilt:
f ist offen. $\Leftrightarrow$ $f(S)$ ist offen in Y für alle $S \in \mathcal{S}_1$.

Satz 1.3.8.
Seien $(X, \mathcal{T}_1)$ und $(X, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume und $f : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ eine bijektive Abbildung. Dann gelten:

a) f ist ein Homöomorphismus gdw. f ist stetig und offen.

b) Ist f ein Homöomorphismus, so impliziert f eine Bijektion von $\mathcal{T}_1$ auf $\mathcal{T}_2$ durch $U \mapsto f(U)$.

Beispiel 1.3.9.

a) Aus Analysis I ist bekannt, dass jede streng monoton wachsende und surjektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus ist.

b) Sei $X = (-1, 1)$ mit der von $\mathbb{R}$ erzeugten Teilraumtopologie versehen. Dann ist $f : X \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1-|x|}$ ein Homöomorphismus.

c) Die stereografische Projektion $s : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ ist ein Homöomorphismus.

2 Erzeugung topologischer Räume

In diesem Kapitel wollen wir Topologien auf Teilmengen, Summenmengen, Produktmengen und Quotientenmengen erzeugen und diese werden in der Regel durch eine universelle Eigenschaft definiert.

2.1 Teilraum- und Produkttopologien

Ist X ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so haben wir den Begriff der Teilraumtopologie auf Y bereits in Definition 1.1.1 kennengelernt. Die offenen bzw. abgeschlossenen Mengen in Y sind die Schnitte von offenen (abgeschlossenen) Mengen in X mit Y.
Ist $U \subset Y$ offen (abgeschlossen), so gilt im Allgmeinen nicht, dass $U \subset X$ offen (abgeschlossen) ist. Jedoch sind alle in Y offenen (abgeschlossenen) Mengen auch offen (abgeschlossen) in X genau dann, wenn Y offen (abgeschlossen) in X ist.

Beispiel 2.1.1.

a) Betrachte $X = \mathbb{C}$ mit der üblichen Topologie, also mit der von der Metrik $d(z, w) = |z - w|$ induzierten Topologie. Die von $\mathbb{C}$ auf $Y = \mathbb{R}$ induzierte Topologie ist die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$.
Keine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}$ ist offen in $\mathbb{C}$, auch dann nicht, wenn E offen in $\mathbb{R}$ ist. Andererseits ist jede abgeschlossene Menge $E \subset \mathbb{R}$ auch abgeschlossen in $\mathbb{C}$, da $\mathbb{R}$ abgeschlossen in $\mathbb{C}$ ist.

b) Das Cantorsche Diskontinuum ist mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Teilraumtopologie ein topologischer Raum, dessen Eigenschaften wir im Verlauf der Vorlesung noch genauer untersuchen werden.

. . . .

Satz 2.1.2.
Es sei X ein topologischer Raum, $Y \subset X$ und $j : Y \hookrightarrow X$ die Inklusionsabbildung. Die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_Y$ auf Y hat folgende Eigenschaften:

a) Für jeden topologischen Raum Z und jede Abbildung $g : Z \to Y$ gilt:
g ist stetig. $\Leftrightarrow$ $j \circ g : Z \to X$ ist stetig.

b) $\mathcal{T}_Y$ ist die schwächste Topologie auf Y, sodass j stetig ist.

Beweis.

a) $j \circ g$ ist stetig genau dann, wenn für jede offene Menge $U \subset X$ die Urbildmenge $(j \circ g)^{-1}(U)$ offen in Z ist.
Wegen $(j \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(j^{-1}(U)) = g^{-1}(U \cap Y)$ gemäß der Definition der Teilraumtopologie gilt obige Aussage genau dann, wenn $g^{-1}(U \cap Y)$ offen in Z ist und dies ist äquivalent zur Stetigkeit von g.

b) Setze $Z = Y$ mit irgendeiner Topologie und $g = id$. Dann folgt die Behauptung aus Teil a).

□

. . . .

Sind X, Y topologische Räume, $E \subset X$ trage die Teilraumtopologie und $f : X \to Y$ sei stetig. Dann ist offensichtlich auch $f\,|_E \colon E \to Y$ stetig. Die Umkehrung ist hingegen im Allgemeinen falsch:
Betrachte als Gegenbeispiel die Dirichletfunktion $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese ist überall unstetig, aber $D\,|_{\mathbb{Q}}$ und $D\,|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ sind stetig.

Satz 2.1.3.
Es seien X, Y topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn für ein endliches System abgeschlossener Mengen $F_1, \ldots, F_n \subset X$ mit $\bigcup\limits_{k=1}^{n} F_n = X$ die Einschränkungen $f\,|_{F_k}$ für $k = 1, \ldots, n$ stetig sind.

Beweis.
Für eine abgeschlossene Menge $G \subset Y$ gilt

$$f^{-1}(G) = f^{-1}(G \cap X) = f^{-1}\left(G \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} F_k\right)\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(f^{-1}(G) \cap F_k\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \left(f\,|_{F_k}^{-1}(G)\right),$$

woraus die Behauptung folgt. □

. . . .

Definition 2.1.4.
Es seien X, Y topologische Räume. $f : X \to Y$ heißt **Einbettung** von X in Y, wenn f ein Homöomorphismus von X auf $f(X)$ ist.

. . . .

Satz 2.1.5.
Es seien X, Y topologische Räume. $f : X \to Y$ ist eine Einbettung genau dann, wenn f injektiv und stetig ist und zusätzlich für jede offene Menge $U \subset X$ die Bildmenge $f(U)$ offen in $f(X)$ ist.
[*Ohne Beweis.*]

Beispiel 2.1.6.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) := x + \mathrm{i} \cdot 0$ ist eine Einbettung.

b) $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{S}^1$, $f(x) = \cos x + \mathrm{i} \cdot \sin x$ ist injektiv und stetig, aber keine Einbettung, denn $f([0, \varepsilon))$ ist nicht offen in $\mathbb{S}^1$, da:
Angenommen, $U \subset \mathbb{R}^2$ sei offen. Dann ist $f([0, \varepsilon)) = U \cap \mathbb{S}^1$, also folgt $f(0) \in U \cap \mathbb{S}^1$. Somit ist $1 \in U$, also gibt es ein $\eta > 0$ mit $U_\eta(1) \subset U$ (da U offen ist). Wähle nun ein $z \in U$ mit $\mathrm{Im} z < 0$ und $|z| = 1$. Dann gilt $z \in U \cap \mathbb{S}^1$, aber $z \notin f([0, \varepsilon))$. $\lightning$

c) Für $v > 0$ ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f_v(t) = e^{vt} e^{\mathrm{i}t}$ eine Einbettung und die Bildmenge ist eine Spirale, die für $t \to \infty$ gegen ∞ konvergiert.

d) Es sei $f : \mathbb{Z} \to [0, 1]$ mit $f(n) = n\mu - \lfloor n\mu \rfloor$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{Q} \cap (0, 1))$. Man kann zeigen: $f(\mathbb{Z})$ ist dicht in $[0, 1)$. Versieht man $\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie, so ist f stetig, injektiv, aber keine Einbettung.

Definition 2.1.7.
Es sei A eine Indexmenge und $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ seien topologische Räume für $\alpha \in A$. Für alle $\alpha \in A$ sei $X_\alpha \neq \varnothing$ und

$$\prod := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \left\{ f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \middle| f(x) \in X_\alpha \forall x \in A \right\}. \tag{2.1}$$

Nach dem *Auswahlaxiom* ist $\Pi \neq \varnothing$ und für alle $\alpha \in A$ definieren wir

$$X_\alpha = X \Rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha := X^A.$$

Für $\beta \in A$ sei die *kanonische Projektion*

$$\Pi_\beta : \prod \to X_\beta, \ \Pi_\beta \left((X_\alpha)_{\alpha \in A} \right) := \pi_\beta \tag{2.2}$$

definiert. Die **Produkttopologie** $\mathcal{T}$ wird auf $\prod$ definiert durch die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{\beta \in B} \Pi_\beta^{-1}(U_\beta) \middle| U_\beta \in \mathcal{T}_\beta, \ B \subset A \text{ endlich} \right\}. \tag{2.3}$$

$(\prod, \mathcal{T})$ heißt **Produktraum** der topologischen Räume $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$.
Eine Subbasis ist gegeben durch

$$\mathcal{S} = \left\{ \Pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \middle| U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha, \ \alpha \in A \right\}. \tag{2.4}$$

$E \subset \prod$ gehört *genau dann* zu $\mathcal{B}$, *wenn* $E = \prod\limits_{\alpha \in U} U_\alpha$ mit $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ und $U_\alpha = X_\alpha$ für fast alle $a \in A$ gilt.

....

Beispiel 2.1.8.

a) Es seien $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ metrische Räume und $\Pi = X_1 \times \ldots \times X_n$. Setzen wir $D_k := d_k(x_k, y_k)$, so werden durch

$$d^{(1)}(x,y) := \sum_{k=1}^{n} D_k,\ \ d^{(2)}(x,y) := \sqrt{\sum_{k=1}^{n} D_k^2} \text{ und } d^{(\infty)} := \max_{k=1}^{n} D_k$$

Metriken auf Π definiert und jede davon erzeugt die Produkttopologie. Insbesondere ist die Produkttopologie auf $\mathbb{R}^n$ die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis.
Sei $U \in \mathcal{T}$, d.h. $U = U_1 \times \ldots \times U_n$ ist offen in X_k. Ferner sei $x \in U$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Somit existiert ein $\varepsilon_k > 0$ mit $U_{\varepsilon_k}(x_k) \subset U_k$. Wir setzen nun $\varepsilon = \min\limits_{k=1}^{n} \varepsilon_k$. Somit folgt $U_\varepsilon^{d^{(\infty)}} \subset U$.
Umgekehrt sei nun U offen in $(\Pi, d^{(\infty)})$. Dann sind alle $\Pi_k(U)$ offen in X_k, denn: Sei $x_k \in \Pi_k(U)$. Dann existiert ein $x' \in \prod\limits_{j \neq k} X_j$ mit $x' \times X_k \in U$. Da U offen in $(\Pi, d^{(\infty)})$ ist, folgt hiermit:
Es existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon^{d^{(\infty)}} \subset U$. Folglich gilt

$$\Pi\left(U_\varepsilon^{d^{(\infty)}}\right) \subset U_k = \Pi_k(U).$$

Also ist $U = \Pi_1(U) \times \ldots \times \Pi_k(U)$ mit $\Pi_k(U)$ offen in X_k. Somit erzeugt $d^{(\infty)}$ die Produkttopologie auf Π. Wegen der Äquivalenz der Metriken folgt dies nun auch für alle anderen Metriken $d^{(p)}$ für $1 \leq p < \infty$. □

b) Es sei $(X_k, d_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge metrischer Räume, $\Pi := \prod\limits_{k \in \mathbb{N}} X_n$ und

$$d(x,y) := \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \frac{d_k(x,y)}{1 + d_k(x,y)} \text{ bzw. } d'(x,y) := \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \min\{1, d_k(x,y)\}$$

Metriken auf Π. Diese erzeugen beide die Produkttopologie.

c) Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Man zeigt leicht mit der Dreiecksungleichung

$$|d(x,y) - d(\xi,\eta)| \leq d(x,\xi) + d(y,\eta) \quad \forall x,y,\xi,\eta \in X.$$

Somit ist $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig und die Produkttopologie auf $X \times X$ wird durch $d^{(1)}$ erzeugt.

d) Es sei $0 < a < b$ und $S_R := \{z \in \mathbb{C} : |x| = R\}$. Dann induziert die Abbildung $f : [a,b] \times S_R \to S_{a,b},\ f(x, Re^{\mathrm{i}\varphi}) := xe^{\mathrm{i}\varphi}$ einen Homöomorphismus zum Kreisring $\{x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C} : a \leq x^2 + y^2 \leq b\} =: S_{a,b}$.

e) Das Produkt diskreter Räume mit mindestens zwei Punkten ist genau dann diskret, wenn die Anzahl der Faktoren endlich ist.

f) Es sei A eine Indexmenge, $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ topologische Räume und $Y_\alpha \subset X_\alpha$ mit der Teilraumtopologie. Dann stimmt die Teilraumtopologie – erzeugt von der Produkttopologie auf $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ – auf $\prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ mit der Produkttopologie auf $\prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ überein.

g) Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wir definieren durch

$$G_f := \Gamma(f) := \{(x, f(x) \in X \times X : x \in X\} \tag{2.5}$$

den *Graphen von f*. Es gilt dann:
f ist stetig genau dann, wenn $g : X \to X \times Y,\ x \mapsto (x, f(x))$ Einbettung ist.

h) Die Menge $\{0, 2\}$ werde mit der diskreten Topologie versehen und

$$X := \prod_{k=1}^{\infty}\{0,2\} = \{0,2\}^{\mathbb{N}}$$

mit der Produkttopologie[4]. Dann wird durch $(x_n) \mapsto \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{9} + \frac{x_3}{27} + ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3k}$ eine Abbildung $f : X \to C$ definiert, wobei C das Cantorsche Diskontinuum ist. Diese Abbildung ist ein Homöomorphismus. (Beweis in Übung)
(Eindeutigkeit hinpuzzlen, weil 1 sonst nicht geht.)
(Auf C hat man die Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$).

. . . .

Satz 2.1.9.
Sei A eine Indexmenge, $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Familie topologischer Räume, $\Pi := \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ das kartesische Produkt mit der Produkttopologie.
Dann gelten

(a) Die Projektionen $\Pi_\alpha : \Pi \to X_\alpha$ sind stetig und offen.

(b) Die Produkttopologie ist die schwächste Topolgie auf Π, so dass alle Π_α stetig sind.

Beweis.
(a) ist nach Konstruktion klar.
(b) Eine Topologie auf Π, so dass alle Π_α stetig sind, muss die Mengen $\Pi_\alpha^{-1}(U_\alpha), U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$

[4] X ist die Menge aller Folgen bestehend aus 0 und 2.

enthalten. So ist gerade die Topologie $\mathcal{T}_\alpha$ definiert worden. Hieraus folgt die Behauptung. $\square$

. . . .

Satz 2.1.10.
Die Voraussetzungen seien wie im vorigen Satz. Weiter sei Y irgendein topologischer Raum und $g : Y \to \Pi$ eine Abbildung.
Dann gilt: g ist stetig genau dann, wenn alle $g_\alpha := \Pi_\alpha \circ g$ stetig sind.

Beweis.
"$\Rightarrow$": Ist klar.
"$\Leftarrow$": Nach Satz 1.3.4 genügt es zu zeigen, dass die Urbilder der Subbasis von Π unter g offen in Y sind. Jedes Element der Subbasis hat die Form $\Pi_\alpha^{-1}(U)$ mit U offen in X_α. Dann ist $g^{-1}(\Pi_\alpha^{-1}(U)) = g_\alpha^{-1}(U)$ offen in Y. $\square$

. . . .

Satz 2.1.11.
Es sei A eine Indexmenge, X_α, Y_α Familien topologischer Räume, und $\Pi_X := \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, $\Pi_Y := \prod_{\alpha\in A} Y_\alpha$. Weiter seien $f_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$ Abbildungen und $f : \Pi_X \to \Pi_Y$ definiert durch $f((x_\alpha)_{\alpha\in A}) = (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in A}$.
Dann gilt: f ist stetig genau dann, wenn jedes f_α, $\alpha \in A$, stetig ist.

Beweis.
Für $\alpha \in A$ seien $\Pi_\alpha : \Pi_X \to X_\alpha$ und $\tau_\alpha : \Pi_Y \to Y_\alpha$ die entsprechenden Projektionen. Sind alle f_α stetig, so ist wegen $f_\alpha \circ \Pi_\alpha = \tau_\alpha \circ f$ nach dem vorigen Satz auch f stetig.
Umgekehrt sei f stetig und es sei $(a_\alpha)_{\alpha\in A} \in \Pi_X$. Für jedes $\alpha \in A$ wird X_α in das Produkt Π_X eingebettet durch $\sigma_\alpha : X_\alpha \to \Pi_X$, $\sigma_\alpha(x_\alpha) = (z_\beta)_{\beta\in A}$ mit $z_\beta = \begin{cases} \alpha_\beta & : \beta \neq \alpha \\ x_\alpha & : \beta = \alpha \end{cases}$.

Dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Pi_\alpha"'] & \prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha \arrow[d, "\tau_\alpha"] \\ X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"'] & Y_\alpha \end{tikzcd}$$

kommutativ und wegen dem vorigen Satz sind alle σ_α stetig. Daraus folgt $f_\alpha = \tau_\alpha \circ f \circ \sigma_\alpha$ stetig. Damit folgt die Behauptung. $\square$

. . . .

2.2 Die Initialtopologie

Die Teilraumtopologie und die Produkttopologie sind jeweils die schwächste Topologien auf einer Menge X, so dass eine gewisse Familie von Abbildungen, die auf X definiert sind, stetig sind. Dieses Konzept wollen wir jetzt verallgemeinern.

Definition 2.2.1.
Sei X eine Menge mit $X \neq \varnothing$, A eine Indexmenge und $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie topologischer Räume und $(f_\alpha : X \to X_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Abbildungen.
Eine Topolgie $\mathcal{I}$ auf X heißt **Initialtopologie** bezüglich $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$, wenn sie folgende „universelle" Eigenschaft hat:

Ist Y ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g : Y \to X$ genau dann stetig, wenn $f_\alpha \circ g$ für alle $\alpha \in A$ stetig sind.

Zur Veranschaulichung diene folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ g"'] & X \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & X_\alpha \end{tikzcd}$$

. . . .

Beispiel: Die Teilraum- und Produkttopologie haben eine solche „universelle" Eigenschaft bezüglich der Inklusionsabbildung bzw. der Projektionen.

Satz 2.2.2.
Die Voraussetzungen seien wie in obiger Definition.
Dann gibt es *genau eine* Initialtopologie $\mathcal{I}$ auf X bezüglich $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$. Sie ist die schwächste Topologie auf X, so dass alle f_α stetig sind und sie besitzt die Subbasis $\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha \in A} \mathfrak{M}_\alpha$ mit $\mathfrak{M}_\alpha := \{f_\alpha^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}_\alpha\}$.

Beweis.

a) Zur Eindeutigkeit:
Seien $\mathcal{I}_1$ und $\mathcal{I}_2$ Initialtopologien auf X. Wir betrachten für $k = 1, 2$ die Diagramme

$$\begin{tikzcd} (X, \mathcal{I}_k) \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ id"'] & (X, \mathcal{I}_2) \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & X_\alpha \end{tikzcd}$$

Für $k = 2$ ist id stetig, ebenso für $k = 1$. Also folgt $\mathcal{I}_1 \leq \mathcal{I}_2$. Analog zeigt man $\mathcal{I}_2 \leq \mathcal{I}_1$, woraus dann $\mathcal{I}_1 = \mathcal{I}_2$ folgt.

b) Zur Konstruktion von $\mathcal{I}$:
Aus der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
(X,\mathcal{I}) \arrow[r, "id"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ id"'] & (X,\mathcal{I}) \arrow[d, "f_\alpha"] \\
& X_\alpha
\end{tikzcd}$$

und der Stetigkeit von id folgt, dass $f_\alpha \circ id = f_\alpha$ stetig sein soll. Daher muss $\mathcal{I}$ die Mengen $\mathcal{S} = \cup_{\alpha \in A}\{f_\alpha^{-1}(U) : U \in \mathcal{T}_\alpha\}$ enthalten. Dann ist die durch die Subbasis $\mathcal{S}$ definierte Topologie $\mathcal{T}$ auf X die schwächste Topologie, so dass alle f_α stetig sind.

c) Zur „universellen" Eigenschaft von $\mathcal{T}$:
Ist $g : Y \to (X, \mathcal{T})$ stetig, so ist auch $f_\alpha \circ g$ stetig, da die f_α stetig sind. Nun seien umgekehrt alle $f_\alpha \circ g$ stetig. Um die Stetigkeit von g nachzuweisen, müssen wir die Offenheit der Urbilder einer Subbasis $\mathcal{S}$ von $\mathcal{T}$ unter g zeigen. Für ein $s \in \mathcal{S}$ existiert ein $\alpha \in A$ mit $s = f_\alpha^{-1}(U)$ mit $U \in \mathcal{T}_\alpha$. Dann folgt $g^{-1}(S) = g^{-1}(f_\alpha^{-1}(U)) = (f_\alpha \circ g)^{-1}(U)$, wobei die letzte Menge offen ist, da $f_\alpha \circ g$ stetig ist.

Somit folgt $\mathcal{T} = \mathcal{I}$ und es folgt die Behauptung. $\square$

. . . .

Beispiel 2.2.3.

a) Für $j \in \mathbb{N}$ sei $X_j = \mathbb{R}$ und $X^\star = \prod_{j=1}^{\infty} x_j$ das direkte Produkt von abzählbar vielen Vektorräumen und $\Pi_j : X^\star \to X_j$ seien die Projektionen. Es ist also $X^\star$ der Vektorraum aller Folgen reeller Zahlen.[5]
Die direkte Summe der X_j ist dann gegeben durch

$$X^\oplus = \{x = (x_1, x_2, x_3, ...) : x_j \in \mathbb{R}, x_j \neq 0 \text{ nur für endlich viele } j \in \mathbb{N}\}. \tag{2.6}$$

Sie ist also die Menge der finiten Folgen.
$\tau_j : X^\oplus \to X_j$ mit $\tau_j(x) = x_j$ seien die Projektionen und $\iota : X^\oplus \to X^\star$ die Einbettung.
Für jedes $j \in \mathbb{N}$ ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
X^\oplus \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\tau_j"'] & X^\star \arrow[d, "\Pi_j"] \\
& X_j
\end{tikzcd}$$

kommutativ. Auf $X^\oplus$ ist die Initialtopologie bezüglich der Abbildung τ_j mit der Teilraumtopologie bezüglich ι identisch, denn für einen beliebigen topologischen Raum Y gilt wegen der Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "\tau_j \circ g"'] & X^\oplus \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\tau_j"] & X^\star \arrow[dl, "\Pi_j"] \\
& X_j &
\end{tikzcd}$$

[5] Andere Bezeichnungen: s (sequence), ω

Ist $X^{\oplus}$ mit der Teilraumtopologie versehen, so gilt:
g stetig $\Leftrightarrow \iota \circ g$ stetig $\Leftrightarrow \Pi_j \circ \iota \circ g$ stetig für alle $j \in \mathbb{N}$, da die Produkttopologie auf $X^{\star}$ die Initialtopologie bezüglich der Π_j ist.
Trägt $X^{\oplus}$ die Initialtopologie bezüglich τ_j, so gilt wegen der „universellen" Eigenschaft:
g stetig $\Leftrightarrow \tau_j \circ g = \Pi_j \circ \iota \circ g$ stetig für jedes $j \in \mathbb{N}$.
Daher stimmen beide Topologien tatsächlich überein.

b) Sind X, Y, Z topologische Räume und $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$, so stimmt die Initialtopologie auf X bezüglich $g \circ f$ mit der Initialtopologie von X bezüglich f überein, falls Y mit der Initialtopologie bezüglich g versehen ist. Allgemeiner ist das Bilden von Initialtopologien transitiv.

c) Es sei $\mathbb{C}$ mit der natürlichen Topologie versehen und $p : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $p(t) = e^{2\pi i t}$. Die offenen Mengen der Initialtopologie auf $\mathbb{R}$ bezüglich p sind genau diejenigen offenen Mengen der natürlichen Topologie auf $\mathbb{R}$, die unter der Operation $\mathbb{Z} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $(n, x) \mapsto x + n$ invariant sind, d.h. die Menge muss sich in gewisser Weise periodisch wiederholen. Diese Topologie ist wesentlich schwächer als die natürliche Topologie auf $\mathbb{R}$.

d) Der Folgenraum $l^2 := \{(x_k)_{k\in\mathbb{N}} : \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty\}$ ist mit der Norm

$$||(x_k)||_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} x_k^2} \tag{2.7}$$

ein Hilbertraum, d.h. ein Banachraum, auf dem die Norm durch ein Skalarprodukt erzeugt wird:

$$\langle (x_k), (y_k) \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \tag{2.8}$$

e) Die Topologie auf dem Cantorschen Diskontinuum C (vgl. Beispiel 2.1.8) ist die Initialtopologie bezüglich der Abbildungen $j_n : C \hookrightarrow C_n$.

. . . .

2.3 Finaltopologie und Quotiententopologie

Die „universelle“ Eigenschaft kann man dualisieren.

Definition 2.3.1.
Sei X eine Menge, A eine Indexmenge, $(X_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie topologischer Räume und $(f_\alpha : X_\alpha \to X)_{\alpha \in A}$ eine Familie von Abbildungen.
Eine Topologie $\mathcal{F}$ auf X heißt **Finaltopologie** bezüglich f_α, wenn sie folgende „universelle“ Eigenschaft hat:

Ist Y ein beliebiger topologischer Raum, so ist eine Abbildung $g : X \to Y$ genau dann stetig, wenn $g \circ f_\alpha$ für jedes $\alpha \in A$ stetig ist.

Zur Visualisierung kann man folgendes Diagramm betrachten:

$$\begin{tikzcd} Y & (X, \mathcal{F}) \arrow[l, "g"'] \\ & X_\alpha \arrow[u, "f_\alpha"'] \arrow[ul, "g \circ f_\alpha"] \end{tikzcd}$$

. . . .

Dann gilt folgender Satz, den man ganz ähnlich wie Satz 2.2.2 beweist.

Satz 2.3.2.
Die Voraussetzungen seien wie in obiger Definition 2.3.1. Dann gibt es genau eine Finaltopologie bezüglich (f_α). Sie ist die stärkste Topologie auf X, sodass alle f_α stetig sind. Die offenen Mengen sind gegeben durch $\cup_{\alpha \in A}\{U \subset X : f_\alpha^{-1}(U) \in \mathcal{T}_\alpha\}$.

. . . .

Definition 2.3.3.
Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $\Pi : X \to X/\sim$ die kanonische Projektion von X auf die Menge der Äquivalenzklassen $X/\sim$, d.h. $\Pi(x) = [x]$.
Die Finaltopologie auf $X/\sim$ bezüglich Π heißt **Quotiententopologie**. Die Menge $X/\sim$ mit dieser Topologie heißt **Quotientenraum** oder **Faktorraum**.

. . . .

Aus dieser Definition und dem vorigen Satz ergibt sich sofort

Folgerung 2.3.4.
Es sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $X/\sim$ der zugehörige Quotientenraum.
Dann ist die Quotiententopologie die stärkste Topologie auf $X/\sim$, so dass Π stetig ist.
Insbesondere ist eine Menge U offen in $X/\sim$ genau dann, wenn $\Pi^{-1}(U)$ offen in X ist.

. . . .

Beispiel 2.3.5.

a) Durch $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$ wird eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ definiert und der Quotientenraum $X/\sim = \mathbb{S}^1$ ist homöomorph zur Einheitskreislinie: $[x] \mapsto e^{2\pi i x}$.

b) Eine geordnete Menge $(A, \prec)$ heißt *induktiv geordnet*, wenn jede linear geordnete Teilmenge $B \subset A$ eine obere Schranke besitzt, d.h. es existiert ein $\sigma \in A$ mit $\beta \prec \sigma$ für alle $\beta \in B$.
Nun sei A linear geordnet, $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein System topologischer Räume, sodass für alle $\alpha, \beta \in A$ mit $\alpha \prec \beta$ gilt: $X_\alpha \subset X_\beta$ und $\mathcal{T}_\alpha = \mathcal{T}_\beta \mid_{X_\alpha}$, d.h. die Topologie auf X_α wird durch die Injektion $j_{\alpha,\beta} : X_\alpha \to X_\beta$ erhalten.
Auf $X := \cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ sei $\mathcal{T}$ die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen $j_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$. Sie heißt *schwache Topologie* auf X.

c) Konkrete Beispiele der obigen Art ergeben die Systeme $(\mathbb{R}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mathbb{S}^n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(\mathbb{P}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit den Grenzräumen (*Limesräumen*)

$$\mathbb{R}^\infty,\ \mathbb{S}^\infty,\ \mathbb{P}^\infty. \text{ (Mengen der finiten Folgen.)} \tag{2.9}$$

Dabei ist $\mathbb{S}^n$ die n-dimensionale Einheitssphäre und $\mathbb{P}^n$ der n-dimensionale, reelle, projektive Raum.

d) Sei $f : X \to C$ wieder die Abbildung von $X = \{0, 2\}^{\mathbb{N}}$ auf das Cantorsche Diskontinuum (vgl. Beispiel 2.1.8(h)). Dabei trage X die Produkttopologie und C die Teilraumtopologie. Dies ist gerade die Finaltopologie bezüglich f (vgl. Beispiel 2.2.3)).

. . . .

2.4 Identifizierungstopologie, Zusammenkleben von topologischen Räumen

Jede Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei Mengen induziert immer eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X durch

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y). \tag{2.10}$$

Dann ergibt sich eine Projektion $\Pi : X \to X/\sim$, eine Bijektion $\overline{f} : X/\sim \to f(X), [x] \mapsto f(x)$, und eine Injektion $j : f(X) \to Y$. Daher kann man f zerlegen in

$$f : X \xrightarrow{\Pi} X/\sim \xrightarrow{\overline{f}} f(X) \xrightarrow{j} Y. \tag{2.11}$$

Definition 2.4.1.
Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, $X/\sim$ trage die Quotiententopologie und $f(X)$ die von Y induzierte Teilraumtopologie. Falls $\overline{f}$ ein Homöomorphismus ist, so heißt f **identifizierende Abbildung**. Ist außerdem f surjektiv, so heißt die Topologie auf Y auch **Identifizierungstopologie** bezüglich f.

. . . .

Satz 2.4.2.
Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann gelten:

a) Die Abbildungen $\Pi, \overline{f}$ und j sind stetig.

b) Es ist $\overline{f}$ ein Homöomorphismus, wenn das Bild jeder offenen (abgeschlossenen) Menge der Form $f^{-1}(U)$, $U \subset Y$ offen (abgeschlossen) in $f(X)$ ist.

c) Ist f zusätzlich surjektiv und offen (abgeschlossen), so trägt Y die Identifizierungstopologie bzgl. f.

Beweis.
Zu a): Π und j sind stetig nach Satz 2.3.2 und 2.1.2. Da $f(X)$ die Initialtopologie bzgl. j trägt und $f = j \circ \overline{f} \circ \Pi$ stetig ist, ist $\overline{f} \circ \Pi$ stetig.
Da $X/\sim$ die Finaltopologie bzgl. Π trägt, ist $\overline{f}$ stetig[6].
Zu b): Die Eigenschaft, dass $f(f^{-1}(U))$ offen (abgeschlossen) in $f(X)$ ist, ist äquivalent zur Stetigkeit der Umkehrabbildung von $\overline{f}$ und damit folgt b).
Zu c): Im Fall der Identifizierungstopologie vereinfacht sich die Zerlegung von f zu

$$f \xrightarrow{\Pi} X/\sim \xrightarrow{\overline{f}} Y$$

und die Behauptung folgt aus b). □

[6] Wir nutzen also zweimal die universellen Eigenschaften aus.

Beispiel 2.4.3.

a) Sei $X = [0, 2\pi] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{S}^1$ die Einheitskreislinie in $\mathbb{R}^2$. Dann ist $f : X \to \mathbb{S}^1$ mit $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$ abgeschlossen, stetig und surjektiv. Unter der eingangs erwähnten Äquivalenzrelation ist $[0, 2\pi]/\sim$ homöomorph zu $\mathbb{S}^1$. [7]

b) Sei $X = \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $||x||_2$ die euklidische Norm von x und $\overline{x} = \frac{1}{||x||_2} x \in \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$.
Die Äquivalenzrelation $\sim$ auf X ist definiert durch $x \sim y :\Leftrightarrow \exists \lambda > 0$ mit $y = \lambda x$ und es bezeichne $[x]$ die Äquivalenzklasse von x.[8] Ferner sei $f : X \to \mathbb{S}^2, f(x) = \overline{x}$.
Dann ist $\overline{f} : X/\sim \to \mathbb{S}^2$ mit $\overline{f}([x]) = \overline{x}$ ein Homöomorphismus.
Sei $\Pi : X \to x/\sim$ die übliche Projektion. Die Identifizierungstopologie auf $\mathbb{S}^2$ bzgl. $f = \overline{f} \circ \Pi$ stimmt mit der Teilraumtopologie der Teilmenge $\mathbb{S}^2$ von $\mathbb{R}^3$ überein.

c) Auf $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ sei $x \sim -x$. Dann ist $\mathbb{S}^2/\sim$ die *projektive Ebene* und wird mit der Quotiententopologie versehen.[9] Einen hierzu homöomorphen Raum erhalten wir, wenn wir auf $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ die Äquivalenzrelation

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \lambda \neq 0, y = \lambda x$$

definieren.

Definition 2.4.4.
Sei A eine Indexmenge, $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ eine Familie topologischer Räume, die paarweise disjunkt sind. Dann heißt die Vereinigung $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ versehen mit der Finaltopologie bezüglich der kanonischen Injektionen

$$j_\beta : X_\beta \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \tag{2.12}$$

die *topologische Summe* der $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$.
Sind die X_α nicht paarweise disjunkt, so betrachten wir $(X_\alpha \times \{\alpha\})_{\alpha \in A}$. Eine Teilmenge $U \subset \cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ ist genau dann offen, wenn für alle $\alpha \in A$ die Menge $U \cap X_\alpha$ offen in X_α ist. Die von $\cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ auf X_α induzierte Topologie ist mit der ursprünglichen identisch.[10]

[7] 0 und 2π werden also gewissermaßen identifiziert, da sie das gleiche Bild unter f haben.
[8] Zwei Punkte sind also äquivalent, wenn sie auf derselben Halbgerade vom Nullpunkt aus liegen.
[9] Eine offene Menge ist also anschaulich ein Bündel von Geraden.
[10] Die Disjunktheit wird gefordert, damit die Injektionen auch wirklich injektiv sind.

Definition 2.4.5.
Seien X, Y disjunkte topologische Räume, $F \subset X$ abgeschlossen und $f : F \to Y$ eine Abbildung. Auf $X \cup Y$ definieren wir eine Äquivalenzrelation durch

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1, z_2 \in F \text{ und } f(z_1) = f(z_2) \text{ oder} \\ z_1 \in F, z_2 \in f(F) \text{ und } z_2 = f(z_1) \text{ oder} \\ z_2 \in F, z_1 \in f(F) \text{ und } z_1 = f(z_2) \text{ oder} \\ z_2 = z_1 \end{cases}$$

Den Quotientenraum $(X \cup Y)/\sim_f$ bezeichnen wir mit $Y \cup_f X$. Er heißt der *durch Zusammenkleben von X und Y mittels f entstandene Raum.*

. . . .

Bemerkung:
Beim Übergang von $X \cup Y$ zu $Y \cup_f X$ wird jeder Punkt in $f(F)$ mit seinen Urbildern identifiziert.

Beispiel 2.4.6.

a) $X = [0, 1]$, $F = \{0\} \cup \{1\}$, $Y = [2, 3]$, $f(0) = 2$, $f(1) = 3$.
Dann ist $Y \cup_f X$ homöomorph zur $\mathbb{S}^1$.

b) Sei $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $Y = \{(2, 2)\}$, $Y \notin X$.
Wir definieren $f : F \to \{(2, 2)\}$, $f(x, y) = (2, 2)$. Dann ist $Y \cup_f X$ homöomorph zu $\mathbb{S}^2$.

. . . .

Definition 2.4.7.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $e^n = \mathbb{D}^n$ die offene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, $\overline{\mathbb{D}}^n$ die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{S}^{n-1} = \overline{\mathbb{D}}^n \backslash \mathbb{D}^n$.
Alle drei Mengen seien mit den üblichen Topologien versehen. $\overline{\mathbb{D}}^n$ heißt *n-dimensionaler Ball* und e^n heißt *n-dimensionale Zelle.*
Weiter sei $f : \mathbb{S}^{n-1} \to X$ eine Abbildung in einen topologischen Raum. Man sagt: $X \cup_f \overline{\mathbb{D}}^n$, ebenso wie jeder dazu homöomorphe Raum, ist aus X durch *Ankleben einer n-Zelle mittels f entstanden.*
Manche Autoren benutzen auch die Bezeichnung $X \cup_f e^n$ statt obiger Schreibweise.

. . . .

Der anschauliche Begriff des Anklebens einer Zelle lässt sich mit der kanonischen Projektion $\Pi : X \cup e^n \to X \cup_f e^n$ mathematisch beschreiben:
$\Pi \mid_{e^n}$ bildet e^n homöomorph auf $\Pi(e^n)$ ab.

Beispiel 2.4.8.

a) Sei $X = \overline{\mathbb{D}}^2$ und $f = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^1}$. Dann ist der Raum $X \cup_f e^2$ eine zweidimensionale Sphäre.

b) Seien $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, $F := \{(x,y) \in X : x = 0 \vee x = 1\}$, $Y = [0,1]$, $f(0,y) = y$, $f(1,y) = 1 - y$.
Der Raum $M = Y \cup_f X$ heißt *Möbiusband*.

c) Der Rand des Möbiusbandes ist homöomorph zu $\mathbb{S}^1$. Daher lässt sich an M eine 2-Zelle mittels der Abbildung

$$g : \mathbb{S}^1 \to \partial M$$

ankleben, wobei g ein Homöomorphismus ist. Anschaulich formuliert:
Der Rand von M wird mit dem Rand von einer Kreisscheibe verklebt. Der entstehende Raum $M \cup_g e^2$ ist homöomorph zur projektiven Ebene $\mathbb{P}_2$.

. . . .

Es ist naheliegend, den Prozess des Anklebens auf beliebig viele Zellen zu erweitern.

Definition 2.4.9.

a) Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\overline{D}^n \times \{\alpha\}$ n-Bälle, $\alpha \in A$, $f_\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \times \{\alpha\} \to X$ stetige Abbildungen der zugehörigen $(n-1)$-Sphären in einem topologischen Raum.
Es ist $\mathbb{S}^{n-1}_A = \cup_{\alpha \in A} (\mathbb{S}^{n-1} \times \{\alpha\})$ ein Teilraum von

$$\overline{\mathbb{D}}^n = \bigcup_{\alpha \in A} \left(\overline{\mathbb{D}}^n \times \{\alpha\}\right) \tag{2.13}$$

und $f(x,\alpha) := f_\alpha(x)$ definiert eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^{n-1}_A \to X$.
Man sagt, $X' = X \cup_f \overline{\mathbb{D}}^n$ entsteht durch Ankleben der n Zellen $e^n \times \{\alpha\}$, $\alpha \in A$.

b) Ein *nulldimensionaler* (endlicher) *CW-Komplex* ist eine (endliche) Menge von Punkten versehen mit der diskreten Topologie.

c) Ein *n-dimensionaler* (endlicher) *CW-Komplex* ist ein Raum der Form $X \cup_f e^n_A$, wobei X ein k-dimensionaler CW-Komplex mit $k < n$ und $e^n_a = \cup_{\alpha \in A}(e^n \times \{a\})$ die endliche topologische Summe von n-Zellen ist. Im Fall eines endlichen CW-Komplexes ist die Gesamtzahl aller Zellen endlich.

. . . .

Beispiel 2.4.10.

a) Die Sphäre $\mathbb{S}^2$ ist zu einem zweidimensionalen CW-Komplex homöomorph. Dazu kleben wir zuerst eine 1-Zelle e^1 an einen Punkt e^0 und dann zwei 2-Zellen e^0_1 und e^0_2 an den resultierenden Raum.

b) Einen weiteren CW-Komplex, der homöomorph zur $\mathbb{S}^2$ ist, erhält man, indem man eine 2-Zelle an einen Punkt klebt.

c) Analog entsteht durch Ankleben einer n-Zelle an einen Punkt ein CW-Komplex, der homöomorph zu $\mathbb{S}^n$ ist.

. . . .

Bemerkung 2.4.11.
Der Begriff des CW-Komplexes lässt auch den Fall zu, dass unendlich viele Zellen angeklebt werden. Dann wird zusätzlich verlangt:

(C) Für jede Zelle e trifft der Abschluss $\overline{e}$ nur endlich viele Zellen. (*closure finite*).

(W) Ist $Y \subset X$ ein Teilraum von X, sodass $Y \cap \overline{e}$ abgeschlossen in $\overline{e}$ ist für alle Zellen e von X, so ist Y abgeschlossen in X. (*weak topology*)

Außerdem wird dann noch verlangt, dass die Topologie hausdorffsch ist. (siehe später.)

. . . .

Beispiel 2.4.12.

a) $\mathbb{R}$ lässt sich als eindimensionaler CW-Komplex darstellen. Dabei ist $\mathbb{Z}$ die Menge der 0-Zellen und die Intervalle
$(n, n+1), n \in \mathbb{Z}$, die 1-Zellen.

b) [Der hawaische Ohrring] $H = \{0\} \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{2n}(e^{it}+1) : 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$ bildet mit der induzierten Topologie von $\mathbb{R}$ keinen CW-Komplex, obwohl er aus 0-Zellen (genau eine) und 1-Zellen besteht, denn (C) ist nicht erfüllt, da 0 den Abschluss jeder 1-Zelle trifft und dies sind unendliche viele. Die Bedingung (W) gilt auch nicht, da $Y = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ den Abschluss jeder 1-Zelle genau einmal trifft, aber Y nicht abgeschlossen in H.
Bilden wir den endlichen hawaischen Ohrring, so sind (C) und (W) erfüllt.

c) Wir fassen die $(n-1)$-Sphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ als Äquator der n-Sphäre $\mathbb{S}^n$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ auf. Dann sind die untere und obere Halbsphäre n-Zellen. Somit werden sukzessive $\mathbb{S}^0, \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2, \ldots$ zu CW-Komplexen. Dabei ist die Topologie die von $\mathbb{R}^{n+1}$ induzierte. Wir haben (vgl. Beispiel 2.3.5 c))

$$\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{S}^2 \subset \ldots \subset \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{S}^n = \lim_{n \to \infty} \mathbb{S}^n = \mathbb{S}^\infty.$$

Versehen wir $\mathbb{S}^\infty$ mit der schwachen Topologie, so entsteht ein CW-Komplex.
Die Einheitssphären in unendlichdimensionalen Banach- oder Hilberträumen sind keine CW-Komplexe.

. . . .

2.5 Mannigfaltigkeiten und topologische Gruppen

Definition 2.5.1.
Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorff-Raum**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y gibt mit $U \cap V = \varnothing$.

. . . .

Definition 2.5.2.
Seien $n \in \mathbb{N}$, A eine Indexmenge, M^n eine Menge und $(U_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in A}$[11] ein System topologischer Räume, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ sind und es gebe injektive Abbildungen $f_\alpha : U_\alpha \to M^n$ für jedes $\alpha \in A$. Für $\alpha, \beta \in A$ wird weiter verlangt, dass die bijektiven Abbildung

$$(\star)\ f_\beta^{-1} \circ f_\alpha : f_\alpha^{-1}(f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta)) \to f_\beta^{-1}(f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta))$$

Homöomorphismen sind, wobei die Urbild- und Bildmengen die von $\mathbb{R}^n$ induzierte Topologie tragen (vgl. Abbildung 2). Weiter setzen wir voraus, dass M^n von allen Bildmengen $f_\alpha(U_\alpha)$ überdeckt wird. Nun erhalte M^n die Finaltopologie bezüglich der Abbildungen (f_α). Schließlich setzen wir voraus, dass die Topologie von M^n eine abzählbare Basis besitzt, also das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Dann heißt M^n eine ***n*-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit**.
Die Abbildungen $f_\alpha : U_\alpha \to M^n$ heißen **Karten** und das System $(U_\alpha, f_\alpha)_{\alpha \in A}$ heißt ein **Atlas**. Weiterhin muss erfüllt sein, dass M^n ein Hausdorff-Raum ist.

. . . .

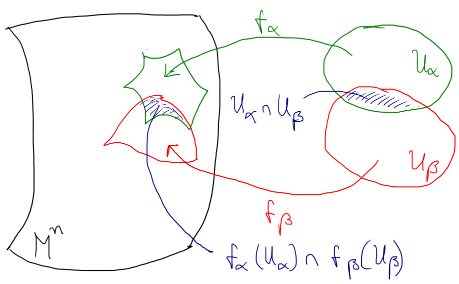

Abbildung 2: Visualisierung der Abbildungen bei einer Mannigfaltigkeit

Bemerkung 2.5.3.
Sind alle $f_\beta \circ f_\alpha^{-1}$ (Kartenwechsel) k-mal stetig differenzierbar ($k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$), so heißt M^n eine **C^k-Mannigfaltigkeit** oder eine k-fach differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dies führt dann in die Differentialtopologie bzw. Differentialgeometrie. Ist $n = 2$ und $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und sind alle Abbildungen $f_\beta \circ f_\alpha^{-1}$ holomorph, so heißt M^2 eine **Riemannsche Fläche**. Darauf kann man Funktionentheorie betreiben.

[11] Kommt nicht auf die Topologie an.

Satz 2.5.4.
Sei M^n eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit. Dann besitzt jeder Punkt $x \in M^n$ eine offene Umgebung, die homöomorph zur offenen Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$ ist. Umgekehrt ist jeder Hausdorff-Raum X, der diese Eigenschaft und eine abzählbare Basis besitzt, eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.
[Ohne Beweis.]

Beispiel 2.5.5.

a) Offenbar ist $\mathbb{R}^n$ eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit und C^∞.

b) Die Sphären $\mathbb{S}^n = \left\{(x_1, ..., x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} x_k^2 = 1\right\}$ sind n-dimensionale Mannigfaltigkeiten. Es genügen zwei Karten:

$$\varphi_\pm : \mathbb{R}^n \to \mathbb{S}^n,\ \varphi_\pm(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{k=1}^{n} x_k^2}}(x_1, ..., x_n, \pm 1).$$

c) Sind M_1 und M_2 n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, so ist $M_1 1 \times M_2$ (mit der Produkttopologie) eine $(n+m)$-dimensionale Mannigfaltigkeit.
n-dimensionaler Torus: $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times ... \times \mathbb{S}^1}_{n \text{ Faktoren}}$.

Abschließend gehen wir noch kurz auf topologische Gruppen ein.

Definition 2.5.6.
Es sei G eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf G. $(G, \mathcal{T})$ heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen

$$(x, y) \mapsto xy \text{ von } G \times G \to G \text{ und } x \mapsto x^{-1} \text{ von } G \to G \tag{2.14}$$

stetig sind.

Beispiel 2.5.7.

a) Jede Gruppe mit der diskreten oder indiskreten Topologie ist eine topologische Gruppe. Das Produkt topologischer Gruppen ist wieder eine topologische Gruppe (mit der Produkttopologie).

b) $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind mit der Addition und den üblichen Topologien topologische Gruppen. Ebenso sind $\mathbb{R}^*$ und $\mathbb{C}^*$ mit der Multiplikation und den üblichen Topologien topologische Gruppen.[12]
$\mathbb{S}^1 := \{\exp(2\pi i t) : t \in [0,1]\}$ mit der Multiplikation komplexer Zahlen und Teilraumtopologie ist eine topologische Gruppe.
$\mathbb{Z}$ mit der diskreten Topologie ist ebenfalls eine topologische Gruppe.

c) Die Matrizengruppen $\mathrm{GL}(n,\mathbb{K})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{K})$, $O(n)$[13] und $U(n)$[14] mit der Matrizenmultiplikation sind weitere topologische Gruppen mit der von $\mathbb{R}^{n^2}$ bzw. $\mathbb{C}^{n^2}$ induzierten Teilraumtopologie.

e) Ist G eine topologische Gruppe und N ein abgeschlossener Normalteiler, so ist G/N mit der Quotiententopologie eine topologische Gruppe.

. . . .

[12] $K^* = K \backslash \{0\}$

[13] Orthogonale Matrizen über $\mathbb{R}$.

[14] Unitäre Matrizen über $\mathbb{C}$.

3 Zusammenhängende Räume

Aus der Analysis ist der Zwischenwertsatz für stetige Funktionen bekannt. Kann man diesen auf topologische Räume verallgemeinern?

3.1 Zusammenhängende Räume

Definition 3.1.1.

a) Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn X nicht durch zwei disjunkte, nichtleere offene Mengen U_1, U_2 zerlegt werden kann oder positive formuliert:
Sind $U_1, U_2 \subset X$ offen und nichtleer und $U_1 \cup U_2 = X$, so ist $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.
Eine äquivalente Definition entsteht, wenn man „offene" durch „abgeschlossene" ersetzt.

b) Eine Teilmenge $E \subset X$ heißt **zusammenhängend**, wenn sie in der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

. . . .

Aus der Definition kann man leicht folgende Kriterien herleiten:

c) X ist zusammenhängend. $\Leftrightarrow$ $\varnothing$ und X sind die einzigen Mengen, die sowohl offen als auch abgeschlossen sind.

d) X ist nicht zusammenhängend. $\Leftrightarrow$ Es gibt eine stetige surjektive Abbildung von X auf einen diskreten Raum mit mindestens zwei Punkten.

Satz 3.1.2.
Ein offenes Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ist zusammenhängend.

Beweis.
Annahme: (a, b) nicht zusammenhängend. Dann existieren nichtleere offene Mengen U_1, U_2 mit $V_1 = U_1 \cap (a, b) \neq \varnothing$, $V_2 = U_2 \cap (a, b) \neq \varnothing$, $V_1 \cup V_2 = (a, b)$ und $V_1 \cap V_2 = \varnothing$.
Wähle $u \in V_1, v \in V_2$ und nehme an, dass $u < v$. Wir setzen

$$S := \{s \in (a, b) : [u, s] \subset V_1\} \neq \varnothing.$$

$\Rightarrow$ Es existiert $s_0 := \sup S$.[15] $\Rightarrow a < u \leq s_0 \leq v < b$.
Es gilt $s_0 \in V_1 \cup V_2$.
Ist $s_0 \in V_1$, so existiert wegen der Offenheit von V_1 ein $\varepsilon > 0$ mit $(s_0 - \varepsilon, s_0 + \varepsilon) \subset V_1$, was ein Widerspruch zu $s = \sup S$ ist.
Ist $s_0 \in V_2$, so erhält man analog einen ähnlichen Widerspruch. $\square$

....

Da $\mathbb{R}$ homöomorph zu jedem offenen Intervall, ist auch $\mathbb{R}$ zusammenhängend.

Beispiel 3.1.3.

a) Die leere Menge und jede einpunktige Menge ist zusammenhängend.

b) Ein diskreter Raum mit mindestens zwei Punkten ist nicht zusammenhängend. Insbesondere ist $\mathbb{N}$ mit der Teilraumtopologie nicht zusammenhängend.

c) Es ist $\mathbb{Q}$, mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$ versehen, nicht zusammenhängend, denn für jede irrationale Zahl ξ gilt $(\mathbb{Q} \cap (-\infty, \xi)) \cup ((\mathbb{Q} \cap (\xi, \infty))) = \mathbb{Q}$ und $(\mathbb{Q} \cap (-\infty, \xi)) \cap ((\mathbb{Q} \cap (\xi, \infty))) = \varnothing$.

....

Satz 3.1.4.
Es sei X ein topologischer Raum und $E \subset X$ eine zusammenhängende Menge. Dann gelten:

a) Ist $E \subset F \subset \overline{E}$, so ist F zusammenhängend.

b) Enthält E sowohl innere als auch äußere Punkte einer Menge $F \subset X$, so enthält E auch Randpunkte von F.

Beweis.

a) Wir nehmen an, dass F nicht zusammenhängend ist. Dann gibt es offene Mengen $U_1, U_2 \subset X$ mit $(F \cap U_1) \cup (F \cap U_2) = F$, $(F \cap U_1) \cap (F \cap U_2) = \varnothing$ und $F \cap U_1 \neq \varnothing$, $F \cap U_2 \neq \varnothing$. Dann gilt auch $(E \cap U_1) \cup (E \cap U_2) = E$, $(E \cap U_1) \cap (E \cap U_2) = \emptyset$. Ist $j \in \{1, 2\}$ und $b_j \in F \cap U_j$, so ist $b_j \in \overline{E}$ und daher $E \cap U \neq \emptyset$ für jede offene Menge $U \subset X$, die b_j enthält. Insbesondere ist $E \cap U_j \neq \emptyset$ und daher ist E nicht zusammenhängend, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist.

b) Wir nehmen an, dass E keine Randpunkte von F enthält. Dann sind F° und $(X \setminus F)^\circ$ offen, disjunkt und es gilt $E \subset F^\circ \cup (X \setminus F)^\circ$. Nach Annahme sind die Mengen $F^\circ \cap E$ und $(X \setminus F)^\circ \cap E$ nicht leer und das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass E zusammenhängend ist.

[15] An dieser Stelle nutzen wir die Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ aus.

□

. . . .

Bemerkung: Aus Teil a) folgt, dass auch halboffene und abgeschlossene Intervalle zusammenhängend sind. Dies sind dann offenbar die einzigen zusammenhängenden Mengen.

Satz 3.1.5.
Es seien X, Y topologische Räume, X zusammenhängend und $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.

Beweis.
Wir nehmen an, dass $f(X)$ nicht zusammenhängend ist. Dann gibt es offene, nichtleere Mengen V_1, $V_2 \subset f(X)$ mit $V_1 \cup V_2 = f(X)$ und $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Dann sind $U_1 := f^{-1}(V_1)$ und $U_2 := f^{-1}(V_2)$ offene, nichtleere Mengen in X mit $U_1 \cup U_2 = X$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Also ist X nicht zusammenhängend und dies ist ein Widerspruch. □

. . . .

Satz 3.1.6 (Zwischenwertsatz).
Es sei X ein zusammenhängender topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und s, $t \in f(X)$ mit $s < t$. Dann nimmt f jeden Wert im Intervall $[s,t]$ an.

Beweis.
Da in $\mathbb{R}$ die Intervalle die einzigen zusammenhängenden Mengen sind, folgt die Aussage direkt aus dem vorigen Satz. □

. . . .

Beispiel 3.1.7.

a) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph $G_f \subset \mathbb{R}^2$ von f zusammenhängend. Zur Begründung betrachten wir die Abbildung $F : I \to \mathbb{R}^2$ mit $F(x) := (x, f(x))$ für $x \in I$. Dann ist F stetig, da die Komponentenfunktionen stetig sind und daher folgt die Behauptung aus Satz 3.1.6.

b) Der Graph der Funktion $f : (0,1] \to [-1,1]$ mit $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ für $x \in (0,1]$ ist nach (a) zusammenhängend. Dann ist auch der Abschluss $\overline{G_f} = G_f \cup (\{0\} \times [-1,1])$ zusammenhängend.

c) Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to [-1,1]$ mit $f(x) := \sin\frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ ist nicht zusammenhängend, denn er wird durch die offenen Mengen $H_+ := \{\, (x,y) \in G_f : x > 0 \,\}$ und $H_- := \{\, (x,y) \in G_f : x < 0 \,\}$ zerlegt. Nimmt man aber nur einen Punkt aus der Menge $\overline{G_f} \setminus G_f = (\{0\} \times [-1,1])$ hinzu, so entsteht ein zusammenhängender topologischer Raum.

. . . .

Lemma 3.1.8.
Ein topologischer Raum X ist genau dann zusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in X$ und zu jeder Überdeckung $\mathcal{U}$ von X durch offene Mengen eine endliche Teilmenge $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ gibt mit

$$a \in U_1\,,\ a \notin U_j \text{ für } j > 1\,,\ b \in U_n\,,\ b \notin U_j \text{ für } j < n\,, \tag{1}$$
$$U_j \cap U_k \neq \emptyset \iff |j - k| \leq 1\,. \tag{2}$$

Beweis.
Es sei X nicht zusammenhängend. Dann gibt es zwei nichtleere, offene Mengen $U_1, U_2 \subset X$ mit $U_1 \cup U_2 = X$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Wählen wir $a \in U_1$, $b \in U_2$ und $\mathcal{U} := \{U_1, U_2\}$, so ist (2) nicht erfüllt.

Zum Beweis der umgekehrten Aussage sei $\mathcal{U}$ eine offene Überdeckung von X. Wir nennen zwei Punkte a, $b \in X$ verbindbar, wenn es eine Teilmenge von $\mathcal{U}$ gibt, die (1) und (2) erfüllt. Dadurch wird eine Äquivalenzrelation auf X definiert. Die Reflexivität und die Symmetrie sind klar. Zum Nachweis der Transitivität nehmen wir an, dass a und b durch $\{U_1, \dots, U_n\}$ verbunden werden und b und c durch $\{V_1, \dots, V_m\}$. Setzen wir

$$p := \inf\{\, j \in \{1, \dots, n\} : U_j \cap V_k \neq \emptyset \text{ für ein } k \in \{1, \dots, m\}\,\}\,,$$
$$q := \sup\{\, k \in \{1, \dots, m\} : U_p \cap V_k \neq \emptyset\,\}\,,$$

so erfüllt $\{U_1, \dots, U_p, V_q, \dots, V_m\}$ die Bedingungen (1) und (2) und verbindet a mit c. Jede Äquivalenzklasse ist offen und abgeschlossen, denn ihr Komplement ist die Vereinigung der restlichen Äquivalenzklassen. Wenn X zusammenhängend ist, so gibt es nur eine Äquivalenzklasse, d.h. je zwei Punkte sind verbindbar. $\square$

. . . .

Aus diesem Lemma und dem zugehörigen Beweis ergibt sich sofort folgendes Ergebnis.

Satz 3.1.9.
Es sei X ein topologischer Raum und E, $F \subset X$ zusammenhängende Teilmengen mit $E \cap F \neq \emptyset$. Dann ist $E \cup F$ zusammenhängend.
[*Ohne Beweis.*]

. . . .

Satz 3.1.10.
Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist die Vereinigung $K(x)$ aller zusammenhängenden Teilmengen von X, die x enthalten, zusammenhängend und abgeschlossen. Für x, $y \in X$ gilt entweder $K(x) = K(y)$ oder $K(x) \cap K(y) = \emptyset$.

Beweis.
Dass $K(x)$ zusammenhängend ist, folgt sofort aus Satz 3.1.9 und Satz 3.1.4 impliziert die Abgeschlossenheit von $K(x)$. $\square$

....

Definition 3.1.11.
Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann heißt die Menge $K(x)$ aus dem vorigen Satz die **Zusammenhangskomponente** von x. Manche Autoren nennen sie auch kurz **Komponente** von x.

....

Ist X ein topologischer Raum, $x \in X$ und ist $U \subset X$ eine offene und abgeschlossene Menge, die x enthält, so muss U auch $K(x)$ enthalten, denn andernfalls wäre $K(x)$ durch $K(x) \cap U$ und durch $K(x) \cap (X \setminus U)$ in zwei disjunkte, nichtleere, offene Mengen zerlegbar. Also liegt $K(x)$ im Durchschnitt aller gleichzeitig offenen und abgeschlossenen Mengen von X, die x enthalten. Im Allgemeinen ist $K(x)$ nicht gleich diesem Durchschnitt wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.1.12.
Sei X die Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die die Punkte $u = (0,0)$, $v = (0,1)$ und die Strecken $s_j = \left\{\frac{1}{j}\right\} \times [0,1]$ enthält und X trage die Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^2$. Die Strecken s_j sind in X sowohl offen als auch abgeschlossen. Für $(x,y) \in s_j$ ist $K(x,y) = s_j$, $K(u) = \{u\}$, $K(v) = \{v\}$.
Sei U eine sowohl offene als auch abgeschlossene Menge in X, die u enthält. Da U offen ist, enthält U Punkte aus fast allen Strecken s_j. Da U offen und abgeschlossen ist, enthält U alle Komponenten ihrer Punkte. Da v ein Berührpunkt(?) von s_j ist und U abgeschlossen, liegt auch v in U. $\Rightarrow K(u)$ ist vom Durchschnitt aller offenen und abgeschlossenen Mengen von X, die u enthalten, verschieden.

....

Definition 3.1.13.
Ein topologischer Raum heißt **total unzusammenhängend** oder **staubförmig**, wenn für jedes $x \in X$ gilt: $K(x) = \{x\}$.

....

Beispiel 3.1.14.

a) Jeder diskrete topologische Raum ist staubförmig.

b) $\mathbb{Q}$ ist in $\mathbb{R}$ total unzusammenhängend, denn sind $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p < q$, so existiert eine irrationale Zahl ξ mit $p < \xi < q$. D.h., die beiden Komponenten können nicht gleich sein, da man an der Stelle ξ die rationalen Zahlen „aufteilen“ kann.
$\Rightarrow K(p) \cap K(q) = \varnothing$. $\Rightarrow K(p) = \{p\}$.

c) Das Cantorsche Diskontinuum ist total unzusammenhängend.

....

Satz 3.1.15.
Seien $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie topologischer Räume und $\Pi = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ mit der Produkttopologie. Dann gilt:
Π ist zusammenhängend. $\Leftrightarrow$ Alle X_α sind zusammenhängend.

Beweis. BEWEIS.
$\Rightarrow$:
Da die Projektionen $\Pi_\alpha : X \to \Pi_\alpha$ stetig und surjektiv sind, ist X_α zusammenhängend.
$\Leftarrow$:
Nun seien alle X_α zusammenhängend und $a \in (a_\alpha)_{\alpha \in A} \in \Pi$ und $Y := K(a)$ die Komponente von a. Dann ist Y zusammenhängend und abgeschlossen und es genügt zu zeigen, dass $Y = \Pi$ gilt.
Dazu zeigen wir, dass Y mit jeder Menge $U = \cup_{\beta \in B} \left(\Pi_\beta^{-1}(U_\beta)\right)$ einen nichtleeren Schnitt hat, wobei $B \subset A$ endlich und U_β offen in X_β. Somit folgt Y dicht in Π und da Y abgeschlossen ist, folgt $Y = \Pi$.
Wähle in jedem U_β einen Punkt b_β. Für U sei o.B.d.A. $B = \{1, ..., n\}$. Für $\beta \in B$ setze

$$Z_B := \left\{ x \in \Pi : \begin{cases} b_\alpha & : \quad \alpha < \beta \\ x_\beta & : \quad \text{beliebig} \\ a_\alpha & : \quad \alpha > \beta \end{cases} \right\}. \tag{3.1}$$

Dann ist Z_β homöomorph zu X_β und $Z_\beta \cap Z_{(\beta+1)} \neq \varnothing$. Also folgt $Z = \cup_{\beta \in \mathbb{N}} Z_B$ zusammenhängend. Da $Z_1 \subset Z$ und $a \in Y$ folgt $Z \subset Y$. Wegen $Z_n \cap U \neq \varnothing$ folgt $Y \cap U \neq \varnothing$. Somit folgt die Behauptung. □

....

Satz 3.1.16.
Sei $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie topologischer Räume, $\Pi = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ mit der Produkttopologie und $x = (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \Pi$. Ferner sei Π zusammenhängend.
Dann gilt $K(x) = \prod_{\alpha \in A} K(x_\alpha)$.

Beweis.
Da alle $K(x_\alpha)$ zusammenhängend sind, ist auch $\Pi_{\alpha \in A} K(x_\alpha)$ zusammenhängend nach vorigem Satz. Daraus folgt $\prod_{\alpha \in A} K(x_\alpha) \subset K(x)$. Aus der Stetigkeit der Projektionen Π_α folgt der Zusammenhang von $\Pi_\alpha(K(x))$ und daher ist $\Pi_\alpha(K(x)) \subset K(x_\alpha)$. Hieraus folgt nun $K(x) \subset \prod_{\alpha \in A} K(x_\alpha)$ und somit die Behauptung. □

....

3.2 Wegzusammenhang und lokaler Zusammenhang

Definition 3.2.1.

a) Sei X ein topologischer Raum. Ein **Weg** in X ist eine stetige Abbildung $w : [0,1] \to X$. $w(0)$ heißt **Anfangspunkt**, $w(1)$ **Endpunkt**. Der Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $a, b \in X$ einen Weg $w : [0,1] \to X$ gibt mit $w(0) = a$ und $w(1) = b$.

b) X heißt **lokal zusammenhängend**, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder Umgebung U von x eine zusammenhängende Umgebung V von x mit $V \subset U$ gibt.

c) X heißt **lokal wegzusammenhängend**, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und zu jeder Umgebung U von x eine wegzusammenhängende Umgebung V von x gibt mit $V \subset U$.

. . . .

Aus den Definitionen ergibt sich sofort folgender Satz.

Satz 3.2.2.
Es gelten folgende Aussagen:

a) Ein wegzusammenhängender topologischer Raum ist zusammenhängend.

b) Ein zusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum ist wegzusammenhängend.

c) In einem lokal zusammenhängenden topologischen Raum sind alle Zusammenhangskomponenten offen.

d) Ein Produktraum ist genau dann lokal zusammenhängend, wenn jedes X_α lokal zusammenhängend ist und außerdem fast alle X_α zusammenhängend sind.

e) Sind X, Y topologische Räume, X wegzusammenhängend und $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, so ist $f(X)$ wegzusammenhängend.

[*Ohne Beweis.*]

. . . .

Beispiel 3.2.3.

a) Jeder indiskrete topologische Raum ist wegzusammenhängend.

b) Der Raum $\mathbb{R}$ ist lokal zusammenhängend, aber $\mathbb{Q}$ nicht.

c) Der Abschluss eines wegzusammenhängenden Raumes ist im Allgemeinen nicht wegzusammenhängend.
Beispiel: Graph G_f der Funktion $f : (0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin \frac{1}{x}$. Dieser ist

wegzusammenhängend[16], aber $\overline{G_f} = G_f \cup (\{0\} \times [-1,1])$ ist zusammenhängend und nicht wegzusammenhängend.
Weiter ist G_f lokal zusammenhängend, aber $\overline{G_f}$ nicht.

d) Die im Folgenden skizzierte Menge $X \subset [0,1]^2$ besteht aus den Strecken vom Punkt $A = (1,0)$ auf die y-Achse, die sich zudem in der Nähe der y-Achse dicht häufen sollen. Dann ist X als topologischer Raum bezüglich der Teilraumtopologie wegzusammenhängend, lokal zusammenhängend und lokal wegzusammenhängend. Nimmt man den Punkt A heraus, so entfallen alle diese Eigenschaften.

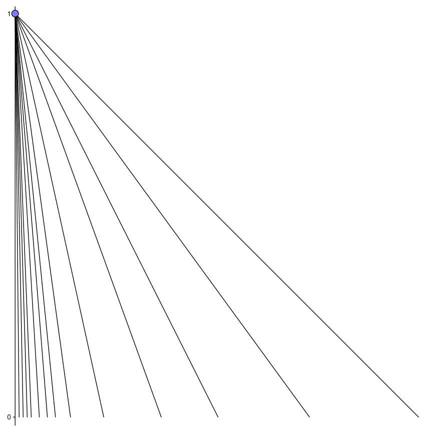

Abbildung 3: Visualisierung der Menge X

. . . .

[16] Der Weg ist gegeben duch $x \mapsto (x, f(x))$.

4 Folgen, Netze und Filter

In metrischen Räumen lassen sich viele topologische Begriffe mit Hilfe von Folgen beschreiben. In topologischen Räumen, die das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, geht das häufig auch noch, aber in beliebigen topologischen Räumen im Allgemeinen nicht mehr. Daher ist ein Ersatz für Folgen gesucht. Hier bieten sich *Netze* oder noch allgemeiner *Filter* an.

4.1 Konvergenz von Folgen

Definition 4.1.1.
Sei X ein topologischer Raum und (x_n) eine Folge in X. (x_n) heißt **konvergent gegen $\boldsymbol{x \in X}$**, wenn es zu jeder Umgebung U einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n \in U \ \forall n \geq n_0. \tag{4.1}$$

Der Punkt x heißt **Grenzwert** oder **Limespunkt** von (x_n). Wir schreiben hierfür

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ oder } x_n \to x \ (n \to \infty). \tag{4.2}$$

Der Punkt x heißt **Häufungspunkt** der Folge, wenn es zu jeder Umgebung U von x unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x_n \in U$.

. . . .
Offenbar genügt es, sich zu Konvergenzuntersuchungen auf eine Umgebungsbasis zurückzuziehen.

Beispiel 4.1.2.

a) Ist X ein metrischer Raum, so stimmt obige Definition mit der bekannten überein.

b) Im Produktraum $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ konvergiert eine Folge (f_n) gegen $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, wenn $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d.h. wenn (f_n) punktweise gegen f konvergiert, denn eine Umgebungsbasis von f ist in der Produkttopologie gegeben durch

$$U(f, E, \varepsilon) = \{g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} : |g(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in E\}, \tag{4.3}$$

wobei $E \subset \mathbb{R}$ endlich sei. Daher heißt diese Topologie auch die *Topologie der punktweisen Konvergenz.*

. . . .

In metrischen Räumen ist der Grenzwert einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt. In topologischen Räumen ist dies im Allgemeinen nicht der Fall. Aber es gilt

Satz 4.1.3.
Es sei X ein Hausdorffraum, (x_n) eine konvergente Folge in X. Dann ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.

Beweis.
Annahme: Es existieren zwei Grenzwerte $x, y \in X$ mit $x \neq y$. X hausdorffsch. $\Rightarrow$ Es existieren Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \varnothing$. Wegen $x_n \to x$ existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U$ für alle $n \geq n_1$ und wegen $x_n \to y$ existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in V$ für alle $n \geq n_2$. Setzen wir $n_0 := \max(n_1, n_2)$, so gilt $x_n \in U \cap V$ für alle $n \geq n_0$. Dies ist ein Widerspruch zu $U \cap V = \varnothing$. $\square$

. . . .

Wie schon eingangs erwähnt, funktionieren gewisse Konzepte nicht nur in metrischen Räumen, sondern auch in Räumen mit erstem Abzählbarkeitsaxiom. Dazu einige Beispiel:

Satz 4.1.4.
Sei X ein topologischer Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllt und $E \subset X$. Dann gilt

$$x \in \overline{E} \Leftrightarrow \exists (x_n) \subset E : x_n \to x \ (n \to \infty). \tag{4.4}$$

Beweis.
„$\Leftarrow$“ ist klar. Diese Implikation gilt in jedem topologischen Raum.
„$\Rightarrow$“
Sei $x \in \overline{E}$. Wähle abzählbare Umgebungsbasis (U_n) von x mit $U_{n+1} \subset U_n$. Da $x \in \overline{E}$ gilt nach Definition von $\overline{E}$: $U_n \cap E \neq \varnothing$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_n \cap E$. Da (U_n) Umgebungsbasis ist, folgt $x_n \to x \ (n \to \infty)$.[17] $\square$

. . . .

Satz 4.1.5.
Seien X, Y topologische Räume, X erfülle das erste Abzählbarkeitsaxiom und $f : X \to Y$ sei eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

a) f ist stetig in $x_0 \in X$.

b) Für jede Folge (x_n) in X mit $x_n \to x_0 \ (n \to \infty)$ gilt $f(x_n) \to f(x_0) \ (n \to \infty)$. (*Folgen*stetigkeit)

[17] Dies ist nur wegen der Umgebungsbasis richtig!

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Es sei V eine Umgebung von $f(x_0)$. Dann ist $U = f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0, da f stetig ist. Wegen $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$. Daraus ergibt sich sofort $f(x_n) \to f(x_0)$ $(n \to \infty)$.[18]
b) $\Rightarrow$ a):
Wir wählen eine abzählbare Umgebungsbasis (U_n) von x_0 mit $U_{n+1} \subset U_n$ und nehmen an, dass f unstetig in x_0 ist. Dann existiert eine Umgebung V von $f(x_0)$ mit $f(U_n) \not\subset V$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in U_n$ gibt mit $f(x_n) \notin V$. Das heißt, $x_m \to x$ $(n \to \infty)$, aber $f(x_n) \not\to f(x_0)$ $(n \to \infty)$. ↯ $\square$

. . . .

Wir wollen jetzt ein Beispiel eines topologischen Raumes konstruieren, in dem obige Ergebnisse nicht mehr gelten.

Definition 4.1.6.

a) Eine geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt **wohlgeordnet**, wenn jede Teilmenge $N \subset M$ ein kleinstes Element besitzt, d.h. es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $m \leq n$ für alle $n \in N$.

b) Sind A und B linear geordnete Mengen und $f : A \to B$ eine bijektive, ordnungserhaltende Abbildung[19], so heißt f ein **Ordnungsisomorphismus** und A, B **ordnungsisomorph**. Wir schreiben dann $A \approx B$. Offenbar wird hierdurch eine Äquivalenzrelation auf der „Menge“ aller linear geordneten Mengen definiert.
Für die Äquivalenzklasse von A schreiben wir $\mathrm{ord}(A)$. Ist A sogar wohlgeordnet, so heißt $\mathrm{ord}(A)$ eine **Ordinalzahl**.

c) Ist A linear geordnet und $x \in A$, so ist das **Anfangssegment** (*initial segment*) von A bezüglich X definiert durch

$$A_x := \{y \in A : y < x\}. \tag{4.5}$$

Sind α, β Ordinalzahlen und A, B wohlgeordnete Mengen mit $\mathrm{ord}A = \alpha$ und $\mathrm{ord}B = \beta$, so schreiben wir $\alpha < \beta$, falls ein $x \in B$ existiert mit $A \approx B_x$. Weiter bedeutet $\alpha \leq \beta$, dass $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$.

d) Für eine Ordinalzahl α sei noch P_α die Menge aller Ordinalzahlen β mit $\beta < \alpha$.

. . . .

Bemerkungen:
Jede wohlgeordnete Menge ist auch linear geordnet. Weiter ist die Menge P_α wohlgeordnet und die ord $P_\alpha = \alpha$.

[18] Diese Implikation gilt wieder in jedem topologischen Raum.
[19] Sind $x, y \in A$ mit $x \leq y$, so gilt $f(x) \leq f(y)$.

Beispiel 4.1.7.
Es gibt eine überabzählbare, wohlgeordnete Menge $(\Omega, \leq)$ von Ordinalzahlen mit folgenden Eigenschaften:

i) Die Menge Ω besitzt ein größtes Element ω_1.

ii) Für alle $\alpha \in \Omega$ mit $\alpha \leq \omega_1$ ist die Menge $\{\beta \in \Omega : \beta \leq \alpha\}$ abzählbar.

Das Element ω_1 heißt *erste überabzählbare Ordinalzahl* und $\omega_0 := \Omega \setminus \{\omega_1\}$ heißt *Menge der abzählbaren Ordinalzahlen*. Das kleinste Element wird mit 0 identifiziert.

Wir versehen $(\Omega, \leq)$ mit der Ordnungstopologie aus Beispiel 1.1.7 h). Die Intervalle $[0, \alpha)$ und $(\alpha, \omega_1]$ mit $\alpha \in \Omega$ bilden eine Subbasis der Topologie. Der zugehörige topologische Raum heißt *Ordinalzahlraum*. Für diesen gelten folgende Aussagen:

a) Es ist ω_1 ein Berührpunkt von Ω_0, aber es gibt keine Folge in Ω_0, die gegen ω_1 konvergiert.

b) Es gibt eine folgenstetige Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, die unstetig ist.

Zum Nachweis von a) nehmen wir an, dass es eine Folge von Ordinalzahlen $(a_n) \subset \Omega_0$ gibt, die gegen ω_1 konvergiert. Dann ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = \omega_1$ und die Mengen $A_n = \{\beta \in \Omega : \beta \leq \alpha_n\}$ sind abzählbar. Dann gilt dies auch für die Vereinigung $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Es bezeichne γ das kleinste Element von $\Omega \setminus B$. Dann gilt $\beta \in B$ genau dann, wenn $\beta < \gamma$. Da B abzählbar ist, gilt dies auch für $B \cup \{\gamma\}$. Da γ eine obere Schranke für die a_n ist, gilt $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \leq \gamma \leq \omega_1$. $\lightning$.
Für Teil b) definieren wir $f : \Omega \to \mathbb{R}$ durch $f(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \Omega_0$ und $f(\omega_1) = 1$. Diese Abbildung ist unstetig in ω_1, aber folgenstetig, da die einzigen Folgen, die gegen ω_1 konvergieren, ab einem Index konstant sein müssen.

Zur Konstruktion von Ω:
$0 := \varnothing$.
$1 := 0 \cup \{0\} = \{\varnothing\} = \{0\}$.
$2 := 1 \cup \{1\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\}$.
$3 := 2 \cup \{2\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\}$.
$\vdots$
$n + 1 := n \cup \{n\} = \{0, 1, \ldots, n\}$.
$\vdots$
$\omega = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
All diese Mengen zusammen ergeben vereinigt $\Omega_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, \omega\}$.
Es bleibt noch, den Nachweis für ω_1 zu führen.[20] Wir wählen eine Ordinalzahl γ, sodass

[20] Wüsste man um die Gültigkeit der speziellen Kontinuumshypothese, so könnte man sofort $\omega_1 := |\mathbb{R}|$ wählen.

P_γ die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ hat. Falls jedes Element von P_γ nur abzählbare Vorgänger hat, so setze $\omega_1 := \gamma$. Im anderen Falle haben einige Elemente von P_γ überabzählbar viele Vorgänger. Dann wähle γ als kleinsten dieser Vorgänger.

. . . .

Dieses Beispiel gibt Anlass, einen Ersatz für Folgen zu suchen. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten.

4.2 Netze

Definition 4.2.1.
Eine geordnete Menge M heißt *gerichtet*, wenn es zu je zwei Elementen $x, y \in M$ ein Element $z \in M$ gibt mit

$$x \prec z \text{ und } y \prec z. \tag{4.6}$$

. . . .

Beispiel 4.2.2.

a) $\mathbb{N}$ ist mit der üblichen Ordnung gerichtet.

b) Für jeden topologischen Raum X und $x \in X$ kann die Menge $\mathcal{U}(x)$ gerichtet werden durch $U_1 \prec U_2$ gdw. $U_2 \subset U_1$.

c) Die Menge $\mathcal{Z}$ aller Zerlegungen $\{x_0, x_1, ..., x_n\} = Z$ eines Intervalls $[a, b]$ kann gerichtet werden durch $Z_1 \leq Z_2$ gdw. Z_1 feiner als Z_2[21].

. . . .

Definition 4.2.3.

a) Sei X ein topologischer Raum. Ein **Netz**[22] in X ist eine Familie $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Elementen $x_\alpha \in X$, wobei die Indexmenge A eine gerichtete Menge ist.

b) Ein Netz in X heißt **konvergent gegen $\boldsymbol{x \in X}$**, wenn es zu jeder Umgebung U von x ein $\alpha_U \in A$ gibt mit $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha_U \prec \alpha$. Ist X ein Hausdorffraum, so ist x eindeutig bestimmt und heißt **Grenzwert** oder **Limespunkt** von (x_α). Schreibweise: $\lim\limits_{\alpha \in A} x_\alpha = x$, $x_\alpha \to x$.

. . . .

Beispiel 4.2.4.

a) Jede Folge (x_n) in X ist ein Netz mit $A = \mathbb{N}$ und die obige Definition der Konvergenz stimmt mit der von Folgen überein.

b) Für einen Punkt x eines topologischen Raumes X werde das Umgebungssystem $\mathcal{U}(x)$ wie oben gerichtet. Gibt es zu jedem U aus $\mathcal{U}(x)$ ein $x_U \in U$, so konvergiert das Netz $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ gegen x.

c) Sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller Zerlegungen eines Intervalls $[a, b]$ wie oben gerichtet und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir definieren zwei Netze:

[21] Also dann, wenn $Z_1 \subset Z_2$.
[22] Oder **verallgemeinerte Folge** oder **Moore-Smith-Folge**.

$\Phi_1 : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ durch $(x_0, x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$ und
$\Phi_2 : \mathcal{Z} \to \mathbb{R}$ durch $(x_0, x_1, ..., x_n) \mapsto \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} f(x)$.
Die Funktion f ist Riemann-integrierbar gdw. beide Netze Φ_1, Φ_2 gegen denselben Grenzwert c konvergieren. Dann ist $c = \int_a^b f(x)\, dx$.

....

Satz 4.2.5.
Sei X ein Hausdorffraum und $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein konvergentes Netz in X. Dann ist der Grenzwert eindeutig bestimmt.
[*Ohne Beweis.*]

....

Satz 4.2.6.
Sei X ein topologischer Raum, $E \subset X$ und $x \in X$. Dann gilt $x \in \overline{E} \Leftrightarrow \exists$ Netz A mit $(x_\alpha)_\alpha \in A \in E^A$ mit $x_\alpha \to x$.

Beweis.
$\Leftarrow$:
Angenommen, es gilt $x \notin \overline{E}$. Dann ist $x \in X \setminus \overline{E}$ offen, also existiert ein $U \in \mathcal{U}(\overline{E})$ mit $x \in U \subset X \setminus \overline{E}$. Also konvergiert x_α nicht gegen x, da es für dieses U keinen Index α_0 geben kann, da $x_\alpha \in E$ gilt.
$\Rightarrow$:
Es ist $A := \mathcal{U}(x)$ gerichtet wie in Beispiel 4.2.2 b). Da $x \in \overline{E}$ folgt nun $U \cap E \neq \varnothing$ für alle $U \in \mathcal{U}(x)$. Ist nun $W \in \mathcal{U}(x)$, so gilt $x_U \in W$ für alle $U \succ W$, woraus $x_n \to X$ folgt. $\square$

Satz 4.2.7.
Es seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung, $x_0 \in X$. Dann gilt:
f ist stetig in x_0 genau dann, wenn für alle Netze $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in X^A$ mit $x_\alpha \to x$ gilt: $f(x_\alpha) \to f(x)$.

Beweis.
$\Rightarrow$:
Sei V eine Umgebung von $f(x_0)$. Da f stetig ist, ist nun $f^{-1}(V)$ eine Umgebung von x_0. Sei nun $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ ein Netz mit $x_\alpha \to x_0$. Dann existiert ein $\beta \in A$ mit $x_\alpha \in U$ für alle $\alpha > \beta$. Somit ist $f(x_\alpha) \in V$ für alle $\alpha > \beta$ und somit gilt $f(x_\alpha) \to f(x_0)$.
$\Leftarrow$:
Angenommen, f sei unstetig in x_0. Dann existiert eine Umgebung V von $f(x_0)$ und zu jedem $U \in \mathcal{U}(x)$ existiert ein $x_U \in U$ mit $f(x_U) \notin V$. Dann gilt $x_U \to x_0$, aber $f(x_U) \not\to f(x_0)$. $\square$

4.3 Filter

Definition 4.3.1. Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge.

a) $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Filter** auf X, falls folgendes gilt:

F1) $X \in \mathcal{F}, \varnothing \notin \mathcal{F}$

F2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$

F3) $F \in \mathcal{F}$ und $F \subset F' \Rightarrow F' \in \mathcal{F}$.

b) $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ heißt **Filterbasis**, falls für alle $F \subset \mathcal{F}$ ein $F' \in \mathcal{F}_0$ existiert mit $F' \subset F$. Dies ist äquivalent zu:

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{F}\ \exists B_0 \in \mathcal{F}_0 : B_0 \subset B_1 \cap B_2. \tag{4.7}$$

c) Ein Filter heißt **frei**, wenn $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F = \varnothing$, sonst heißt er **fixiert**.

d) Seien $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ Filter. $\mathcal{F}_1$ heißt **feiner** als $\mathcal{F}_2$, falls $\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_1$ gilt.

e) Ein Filter $\mathcal{F}$ heißt **Ultrafilter**, wenn es keinen echt feineren Filter gibt.

. . . .

Beispiel 4.3.2.

a) Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge, $\varnothing \not\subset A \subset X$ und $\mathcal{F} = \{F \subset X : A \subset F\}$. Dann ist $\mathcal{F}$ fixierter Filter mit Basis $\{A\}$. $\mathcal{F}$ ist genau dann ein Ultrafilter, wenn $|A| = 1$ gilt, denn:
Falls $\mathcal{G}$ ein feinerer Filter ist, so existiert ein $a \in \mathcal{G}$ mit $\mathcal{F} \cap \{a\} = \emptyset$ und somit wäre $\emptyset \in \mathcal{G}$. $\lightning$
Falls nun $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter mit $|A| \geq 2$ wäre, so wähle $\mathcal{G} = \{F \subset X : \{x\} \subset F\}$ mit $A = \{a, x\}$. Dann ist $\mathcal{G}$ feiner als $\mathcal{F}$. $\lightning$

b) Es sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Dann ist $\mathcal{F} = \mathcal{U}(x)$ ein fixierter Umgebungsfilter.

c) Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ eine Folge. Das System der Mengen $\mathcal{B}$ der Mengen $\{B_k = \{x_n : n \geq k\}\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Filterbasis für den von der Folge erzeugten Filter.

d) $\mathcal{B} := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ ist Basis für einen freien Filter $\mathcal{F}$ auf $\mathcal{R}$. Dieser wird auch *Frechétfilter* genannt. Zur Rekonstruktion dieses Filters bildet man beliebige Obermengen von Basiselementen, die dann aufgrund der Schnittstabilität der Basis wieder im Filter liegen.

. . . .

Satz 4.3.3.
Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge.

a) Jeder Filter liegt in einem Ultrafilter.

b) Es ist $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter genau dann, wenn für alle $A \subset X$ entweder $A \in \mathcal{F}$ oder $A^C \in \mathcal{F}$ gilt.

c) $\mathcal{F}$ ist ein auf X fixierter Ultrafilter genau dann, wenn ein $x \in X$ existiert mit $\mathcal{F} = \{F \subset X : \{x\} \subset F\}$.

Beweis.

a) Die Menge $\Phi := \{F \subset X : F \text{ Filter auf } X\}$ werde durch Inklusion geordnet. Sei Φ_1 eine total geordnete Teilmenge (*Kette*) von Φ. Dann ist $\bigcup\limits_{\mathcal{E} \in \Phi_1} \mathcal{E}$ eine obere Schranke von Φ_1, die nicht selbst in Φ_1 liegen muss. Somit ist Φ induktiv geordnet und mit dem *Lemma von Zorn* folgt die Existenz eines maximalen Elements in Φ. Somit ist Φ ein Ultrafilter.

b) „$\Rightarrow$“:
Da $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$ gilt, können A und $X \setminus A$ nicht gleichzeitig in $\mathcal{F}$ liegen. Insbesondere kann kein $F_1 \subset A$ mit $F_1 \in \mathcal{F}$ und kein $A_2 \in \mathcal{F}$ mit $A_2 \subset X \setminus A$ existieren. Somit folgt für alle $B \in \mathcal{F}$:

$B \cap A \neq \emptyset$ oder $B \cap (X \setminus A) \neq \emptyset$.

Also ist $\{F \cap A : F \in \mathcal{F}\}$ Basis eines Filters $\mathcal{G}$, der feiner als $\mathcal{F}$ ist. Da $\mathcal{F}$ nach Voraussetzung ein Ultrafilter ist, folgt nun $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ und somit $A \in \mathcal{F}$.
„$\Leftarrow$“:
Angenommen, es existiert ein feinerer Filter $\mathcal{G}$. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{G}$ mit $g \notin \mathcal{F}$, aber $g^C \in \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Somit wäre $\emptyset \in \mathcal{G}$. $\lightning$

c) Folgt aus Teil b).

$\square$

Definition 4.3.4.
Es sei $X \neq \emptyset$ ein topologischer Raum.

a) Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X **konvergiert** gegen $x \in X$, wenn $\mathcal{F} \supset \mathcal{U}(x)$. Wir schreiben dann $\mathcal{F} \to x$ und nennen x **Grenzwert** oder **Limespunkt**.

b) $x \in X$ heißt **Berührpunkt** eines Filters $\mathcal{F}$, wenn $F \cap U \neq \emptyset$ für alle $F \in \mathcal{F}$ und für alle $U \in \mathcal{U}(x)$. Die Menge aller Berührpunkte ist gegeben durch $\bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} \overline{F}$.

Beispiel 4.3.5.

a) Es sei X ein topologischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. Wenn $\mathcal{F}$ den von der Folge (x_n) erzeugten Filter bezeichne, so stimmt die Konvergenz von (x_n) mit der Filterkonvergenz überein.

b) Der Frechétfilter auf $\mathbb{R}$ ist nicht konvergent.

c) Es sei X ein topologischer Raum und $\emptyset \neq E \subset X$. Dann besteht $\overline{E}$ aus den Berührpunkten des Filters $\mathcal{F} = \{F \subset X : E \subset F\}$ und es gilt $\mathcal{F} \to \overline{E}$.

d) Ist $\mathcal{F}$ der von der Filterbasis $\{(0,\varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ auf $\mathbb{R}$ erzeugte Filter, so gilt $\mathcal{F} \to 0$.

Satz 4.3.6.
Es sei X ein topologischer Raum. Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann ein Berührpunkt eines Filters $\mathcal{F}$, wenn es einen feineren Filter $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ gibt mit $\mathcal{G} \to x$.

Beweis.
Besitzt $\mathcal{F}$ einen Berührpunkt x, so ist $\{U \cap F : U \in \mathcal{U}(x), F \in \mathcal{F}\}$ eine Filterbasis eines Filters $\mathcal{G}$, der feiner als $\mathcal{F}$ ist. Offenbar gilt $\mathcal{G} \to x$, da $X \in \mathcal{F}$.
Gilt umgekehrt $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ und $\mathcal{G} \to x$, so gehört jedes $U \in \mathcal{U}(x)$ und jedes $F \in \mathcal{F}$ zu $\mathcal{G}$. Also ist x ein Berührpunkt von $\mathcal{F}$. □

Definition 4.3.7.
Es seien X, Y Mengen, $\mathcal{F}$ ein Filter auf X und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt der Filter $f(\mathcal{F})$ auf Y der das Mengensystem $\{f(F) : F \in \mathcal{F}\}$ als Basis hat, der **Bildfilter** von $\mathcal{F}$ unter f.

Satz 4.3.8.
Es seien X, Y topologische Räume und $E \subset X$. Dann gilt:

a) $x \in \overline{E} \Leftrightarrow$ Es gibt einen Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $E \in \mathcal{F}$ und $\mathcal{F} \to x$.

b) $f : X \to Y$ ist stetig in $x \in X$ genau dann, wenn für alle Filter $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F} \to x$ gilt: $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.

Beweis.

a) Wenn $x \in \overline{E}$ gilt, ist $\{E \cap U : U \in \mathcal{U}(x)\}$ eine Filterbasis eines Filters $\mathcal{F}$ auf X mit $\mathcal{F} \to x$.
Gilt umgekehrt $\mathcal{F} \to x$ und $E \in \mathcal{F}$ für einen Filter $\mathcal{F}$, so ist x Berührpunkt von $\mathcal{F}$, also $x \in \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subset \overline{E}$.

b) Sei zunächst $x \in X$, f stetig in x und $\mathcal{F}$ ein Filter auf X mit $\mathcal{F} \to x$. Zu einer beliebigen Umgebung V von $f(x)$ existiert eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$. Wegen $\mathcal{F} \to x$ ist $U \in \mathcal{F}$ und somit gilt $V \in f(\mathcal{F}) \supset \mathcal{U}(f(x))$, also folgt $f(\mathcal{F}) \to f(x)$.
Umgekehrt setzen wir $\mathcal{F} = \mathcal{U}(x)$. Dann gehört jede Umgebung V von $f(x)$ zum Bildfilter $f(\mathcal{F})$. Nach Definition existiert somit eine Umgebung U von x mit $f(U) \subset V$.

□

....

Satz 4.3.9.
Seien $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ topologische Räume, X eine Menge und $f_\alpha : X \to X_\alpha$ Familien von Abbildungen. X trage die Initialtopologie bezüglich f_α. Dann gilt:
Ein Filter $\mathcal{F}$ auf X konvergiert gegen $x \in X$ genau dann, wenn $f_\alpha(\mathcal{F}) \to f_\alpha(x)$ für alle $\alpha \in A$ gilt.

Beweis.
Falls $\mathcal{F} \to x$ gilt, so gilt auch $f_\alpha(\mathcal{F}) \to f_\alpha(x)$, da die f_α nach Satz 4.3.8 stetig sind.
Umgekehrt wählen wir die Umgebungsbasis

$$\left\{ \bigcap_{\beta \in B} f_\beta^{-1}(U_\beta) : B \subset A \text{ endlich, } U_\beta \in \mathcal{U}(f_\beta(x)) \right\}$$

von x. Nach Voraussetzung existiert zu $U_\beta \in \mathcal{U}(f_\beta(x))$ ein $F_\beta \in \mathcal{F}$ mit $f_\beta(F_\beta) \subset U_\beta$. Somit ist $F = \bigcap_{\beta \in B} F_\beta \in \mathcal{F}$ und zudem gilt $F \subset \bigcap_{\beta \in B} f_\beta^{-1}(U_\beta)$. □

....

Folgerung 4.3.10.
Es seien A eine Indexmenge, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein System topologischer Räume und $\Pi = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ und $\Pi_\alpha : \Pi \to X_\alpha$ die kanonischen Projektionen. Zudem trage Π die Produkttopologie bezüglich der kanonischen Projektionen. Dann gilt:
Ein Filter $\mathcal{F}$ auf Π konvergiert gegen $x \in \Pi$ genau dann, wenn $\Pi_\alpha(\mathcal{F})$ gegen $\Pi_\alpha(x)$ konvergiert.

....

Satz 4.3.11.
Seien X eine Menge und $E \subset X$ nichtleer. Dann gelten:

a) Für einen Filter $\mathcal{F}$ auf X bildet

$$\mathcal{F} \cap E := \{F \cap E : F \in \mathcal{F}\}$$

einen Filter auf E genau dann, wenn $E \in \mathcal{F}$.[23] Diesen Filter nennt man auch Spurfilter.

b) Für einen Ultrafilter $\mathcal{F}$ auf X bildet $\mathcal{F} \cap E$ einen Filter auf E genau dann, wenn $E \in \mathcal{F}$. In diesem Fall ist $\mathcal{F} \cap E$ ein Ultrafilter auf E.

[*Ohne Beweis.*]

. . . .

Folgerung 4.3.12.
Seien X ein topologischer Raum, $E \subset X$ eine nichtleere Teilmenge und $x \in X$. Dann sind äquivalent:

a) $x \in \overline{E}$.

b) Für den Umgebungsfilter $\mathcal{U}(x)$ von x ist $\mathcal{U}(x) \cap E$ ein Filter auf E.

c) Es gibt einen Filter auf E, dessen Bild unter der Injektion $E \hookrightarrow X$ gegen x konvergiert.

. . . .

[23] Beachte: $\mathcal{F} \cap E$ ist nur als Symbol zu lesen!

5 Trennungsaxiome

In metrischen Räumen kann man disjunkte abgeschlossene Mengen immer durch offene Umgebungen trennen. In topologischen Räumen ist dies im Allgemeinen nicht möglich. Zum Beispiel kann man in einem indiskreten Raum noch nicht einmal zwei verschiedene Punkte voneinander trennen. Man benötigt also zu diesem Zweck genügend viele offene Mengen. Dies erreicht man in der Regel durch sogenannte Trennungsaxiome.

5.1 Trennungseigenschaften topologischer Räume

Definition 5.1.1. Ein topologischer Raum X heißt

a) **T_0-Raum**, wenn von je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ mindestens einer eine Umgebung besitzt, die den anderen Punkt nicht enthält.

b) **T_1-Raum**, wenn je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ Umgebungen besitzen, die den anderen Punkt nicht enthält. [24] [25]

c) **T_2-Raum** oder **Hausdorff-Raum**, wenn je zwei verschiedene Punkte $x, y \in X$ disjunkte Umgebungen besitzen.

d) **T_3-Raum**, wenn jede abgeschlossene Menge $A \subset X$ und jeder Punkt $x \in X \setminus A$ disjunkte Umgebungen haben.

e) **T_{3a}-Raum**, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jedem Punkt $x \in X \setminus A$ eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ gibt mit $f(x) = 1$ und $f(a) = 0$ für alle $a \in A$.

f) **T_4-Raum**, wenn je zwei disjunkte, nichtleere, abgeschlossene Mengen disjunkte Umgebungen haben.

. . . .

Die für T_j-Räume geforderten Eigenschaften heißen T_j-Axiome oder auch Trennungsaxiome.

Bemerkung 5.1.2.
Zwischen den Trennungsaxiomen bestehen folgende Beziehungen:

---

[24] T_1-Räume heißen auch *Kolmogorov-Räume*.

[25] Die Umgebungen müssen nicht notwendigerweise disjunkt sein.

a) $T_1 \Rightarrow T_0$. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch: Betrachte hierzu die Topologie $\mathcal{T}_<$ auf $\mathbb{R}$.

b) $T_2 \Rightarrow T_1$. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch: Dazu sei X eine unendliche Menge mit der kofiniten Topologie. Dann ist X ein T_1-Raum, denn sind $x, y \in X$, $x \neq y$, so wähle als Umgebungen von x bzw. y $X \setminus \{y\}$, $X \setminus \{x\}$. Aber X ist kein T_2-Raum, denn sind $x \neq y$ und U, V offene Umgebungen von x bzw. y mit $U \cap V \neq \varnothing$, so folgt

$$X \subset X \setminus (U \cap V) = (X \setminus U) \cup (X \setminus V)$$

und damit wäre X eine endliche Menge.

c) Ein T_3-Raum ist im Allgemeinen kein T_2- und kein T_1-Raum. Beispiel: $X = \{1, 2\}$ mit der indiskreten Topologie.

d) Jeder T_{3a}-Raum X ist auch ein T_3-Raum. Seien dazu $A \subset X$ abgeschlossen und $x \in X \setminus A$. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f(x) = 1$ und $f(a) = 0$ für $a \in A$. Wähle nun $U := f^{-1}([0, 0.5))$ und $V = f^{-1}((0.5, 1])$. Dann sind U, V offen, $U \cap V = \emptyset$, U ist Umgebung von x und V ist Umgebung von a. Somit ist X ein T_3-Raum.

e) Ein T_4-Raum ist im Allgemeinen kein T_3-Raum. Betrachte hierzu $X = \{1, 2, 3, 4\}$ mit der Topologie $\mathcal{T} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Dann sind die abgeschlossenen Mengen gegeben durch $\emptyset, X, \{4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$ und $\{2, 3, 4\}$. Zwei abgeschlossene Mengen sind genau dann disjunkt, wenn eine leer ist. Somit ist X ein T_4-Raum. Es ist ferner nicht möglich, den Punkt 1 von der abgeschlossenen Menge $\{4\}$ zu trennen.

f) Metrische Räume erfüllen alle angegebenen Trennungsaxiome.

. . . .

Satz 5.1.3.
Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

a) X ist ein T_1-Raum.

b) Jede einpunktige Menge ist abgeschlossen.

c) Jede Teilmenge $E \subset X$ ist der Durchschnitt aller ihrer Umgebungen.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Sei $x \in X$. Dann existiert zu jedem $y \in X$ mit $y \neq x$ eine offene Umgebung U_y mit $x \notin U_y$. Somit gilt

$$\{x\} = X \setminus \cup \{U_y : y \in X \setminus \{x\}\}$$

und somit ist $\{x\}$ abgeschlossen.
b) $\Rightarrow$ c):
Sei $E \subset X$. Für jedes $x \in X \setminus E$ ist $X \setminus \{x\}$ eine offene Umgebung von E und $\cap \{X \setminus \{x\} : x \in X \setminus E\} = E$.
c) $\Rightarrow$ a):
Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Da $\{x\}$ der Durchschnitt aller ihrer Umgebungen ist, gibt es eine Umgebung von x mit $y \notin U$. Somit ist X ein T_1-Raum. $\square$

. . . .

Satz 5.1.4.
Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

a) X ist Hausdorffraum.

b) Jeder konvergente Filter $\mathcal{F}$ hat genau einen Grenzwert.

c) Für jeden Punkt x ist der Durchschnitt aller seiner abgeschlossenen Umgebungen gleich der Menge $\{x\}$.

d) Die Diagonale $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subset X \times X$ ist abgeschlossen.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Sei $\mathcal{F}$ ein Filter mit $\mathcal{F} \to x$ und $\mathcal{F} \to y$ mit $x \neq y$. Nach Voraussetzung existieren Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap V = \emptyset$. Weiter gilt $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ und $\mathcal{U}(y) \subset \mathcal{F}$. Somit ist $\emptyset \in \mathcal{F}$. $\lightning$
b) $\Rightarrow$ c):
Sei $x \in X$ und $y \in \cap \left\{\overline{U} : U \in \mathcal{U}(x)\right\}$. Dann ist y ein Berührpunkt von $\mathcal{U}(x)$. Somit existiert ein Filter $\mathcal{F}$ mit $\mathcal{F} \to y$ und $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$. Also gilt $\mathcal{F} \to x$ und somit $x = y$.
c) $\Rightarrow$ a):
Seien $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Nach Voraussetzung existiert eine abgeschlossen Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $y \notin U$. Also ist $X \setminus U$ eine offene Umgebung von y und es gilt $(X \setminus U) \cap U^\circ = \emptyset$. Hieraus folgt a).
a) $\Rightarrow$ d):
Sei $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta$. Daraus folgt zunächst $x \neq y$, weshalb eine offene Umgebung U von x und eine offene Umgebung V von y mit $U \cap V = \emptyset$. Somit ist $U \times V$ eine zu

Δ disjunkte Umgebung von (x,y) und somit ist $(X \times X) \setminus \Delta$ offen. Hieraus folgt die Behauptung.
d) $\Rightarrow$ a):
Sei *Delta* abgeschlossen und $x, y \in X$ mit $x \neq y$. Dann ist $(X \times X) \setminus \Delta$ offen und $(x,y) \in (X \times X) \setminus \Delta$. Somit existiert eine offene Umgebung $U \times V$ von (x,y) mit $(U \times V) \cap \Delta = \emptyset$. U ist also eine offene Umgebung von x und V ist eine offene Umgebung von y mit $U \cap V = \emptyset$. Damit ist X Hausdorffsch. □

. . . .

Beispiel 5.1.5.
Es existiert ein topologischer Raum, der nicht hausdorffsch ist, aber in dem jede konvergente Folge genau einen Grenzwert hat. Sei Ω der Ordinalzahlraum. Auf $(\Omega \times \{1\}) \cup (\Omega \times \{2\})$ wird durch $(\alpha, 1) \sim (\alpha, 2)$ für alle $\alpha \in \Omega$, $\alpha \neq \omega_1$, eine Äquivalenzrelation eingeführt. Nun sei X der zugehörige Quotientenraum. Dieser Raum erfüllt die Vorgaben.

. . . .

Satz 5.1.6.
Ein topologischer Raum X ist genau dann ein T_3-Raum, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ und jeder offenen Umgebung U von x eine offene Umgebung V von x gibt mit:

$$x \in V \subset \overline{V} \subset U. \tag{5.1}$$

Äquivalent dazu ist:
Jeder Punkt x hat eine Umgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen.

Beweis.
Sei X ein T_3-Raum, $x \in X$ und U eine offene Umgebung von x. Dann ist $X \setminus U$ abgeschlossen und $x \notin X \setminus U$. Also existieren disjunkte offene Mengen V, W mit $x \in V$ und $X \setminus U \subset W$. Somit ist $X \setminus W$ abgeschlossen und es folgt $U \supset X \setminus W \supset V$. Wegen $V \subset \overline{V}$ folgt hieraus die Behauptung.
Zum Nachweis der umgekehrten Implikation sei $x \in X$ und $A \subset X$ abgeschlossen mit $x \notin A$. Also ist $X \setminus A$ offen. Daher existiert nach Voraussetzung eine Umgebung U von x mit $x \in U \subset \overline{U} \subset X \setminus A$. Also sind U und $X \setminus \overline{U}$ offene Mengen, die X und A trennen. □

. . . .

Satz 5.1.7.
Ein topologischer Raum X ist genau dann ein T_4-Raum, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge A und jeder offenen Menge $U \supset A$ eine offene Menge V gibt mit

$$A \subset V \subset \overline{V} \subset U. \tag{5.2}$$

[*Der Beweis verläuft ähnlich zum vorigen Beweis.*]

. . . .

Topologische Räume, die T_1 und ein weiteres Trennungsaxiom erfüllen, bekommen besondere Namen.

Definition 5.1.8.
Ein topologischer Raum X heißt

a) **regulär**, wenn er T_1 und T_3 erfüllt.

b) **vollständig regulär**, wenn er T_1 und T_{3a} erfüllt.

c) **normal**, wenn er T_1 und T_4 erfüllt.

. . . .

5.2 Fortsetzung stetiger Funktionen

Satz 5.2.1.
Sei X ein topologischer Raum, Y ein Hausdorffraum und $f, g : X \to Y$ stetige Abbildungen. Dann gelten:

a) $A = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen in X.

b) Ist $D \subset X$ dicht und $f|_D = g|_D$, so folgt $f = g$.

c) Der Graph $G_f(f)$ ist abgeschlossen in $X \times Y$.

Beweis.

a) Da Y ein Hausdorffraum ist, ist die Diagonale Δ in $Y \times Y$ abgeschlossen. Die Menge $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ist das Urbild von Δ unter der Abbildung $x \mapsto (f(x), g(x))$ von X nach $Y \times Y$ und somit folgt die Behauptung aus der Stetigkeit von f und g.

b) Die Menge $A := \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ist abgeschlossen und enthält D. Also ist $D \subset A$ und somit auch $\overline{D} \subset A$. Da D dicht in X ist, folgt $A = X$ und somit $f = g$.

c) G_f ist das Urbild von $\Delta \subset Y \times Y$ unter der stetigen Abbildung $(x, y) \mapsto (f(x), y)$ von $X \times Y \to Y \times Y$. Damit folgt die Behauptung.

□

. . . .

Satz 5.2.2.
Seien X ein topologischer Raum, $D \subset X$ dicht, Y ein regulärer Raum und $f : D \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann sind äquivalent:

a) f hat eine stetige Fortsetzung $F : X \to Y$.

b) Für $x \in X$ wird der Filter $\mathcal{U}(x) \cap D = \{U \cap D : U \in \mathcal{U}(x)\}$ unter f auf einen konvergenten Filter in Y abgebildet.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Der von $\mathcal{U}(x) \cap D$ auf X erzeugte Filter ist feiner als $\mathcal{U}(x)$. Daher konvergiert nach Satz 4.3.8 b) der von $F(\mathcal{U}(x) \cap D) = f(\mathcal{U}(x) \cap D)$ erzeugte Filter.
b) $\Rightarrow$ a):
Sei $F(x)$ der Grenzwert von $f(\mathcal{U}(x) \cap D) \subset Y$. Da Y ein Hausdorffraum ist, ist $F(x)$ wohldefiniert. Für $x \in D$ ist $F(x) = f(x)$, da f stetig und $\mathcal{U}(x) \cap D$ der Umgebungsfilter von x in D ist. Es bleibt noch zu zeigen, dass F stetig ist.

Dazu sei $x \in X$ und W eine Umgebung von $F(x)$. Da Y regulär ist, existiert eine abgeschlossene Umgebung V vom $f(x)$ mit $F(x) \in V \subset W$. Nach Definition von F existiert eine Umgebung U von x mit $f(U \cap D) \subset V$. Wir können annehmen, dass U offen ist. Dann gilt $U \subset \mathcal{U}(y)$ für jedes $y \in U$. Somit ist $f(U \cap D) \in f(\mathcal{U}(y) \cap D)$ und $F(y) \in \overline{f(U \cap D)}$. Da V abgeschlossen in, folgt $\overline{f(U \cap D)} \subset V$, also auch $F(U) \subset V \subset W$. Damit ist F stetig. $\square$

. . . .

5.3 Normale Räume

Bezeichnung: Im Folgenden nennen wir eine Abbildung $f : X \to \mathbb{R}$ immer eine *Funktion*.
Frage: „Wie viele“ stetige Funktionen gibt es auf einem topologischen Raum X?

Satz 5.3.1 (Lemma von Urysohn).
Es seien X ein T_4-Raum und $A, B \subset X$ nichtleere, disjunkte und abgeschlossene Mengen. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$, genauer $f : X \to [0,1]$, mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$.
[*Ohne Beweis.*]

. . . .

Folgerung 5.3.2.
Es gilt auch die Umkehrung des obigen Satzes.

. . . .

Folgerung 5.3.3.
Jeder normale topologische Raum ist vollständig regulär.

. . . .

Lemma 5.3.4.
Es sei X ein T_4-Raum, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \to [-1, +1]$ eine stetige Funktion. Dann gibt es eine Folge stetiger Funktionen $g_n : X \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $-1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq g_n(x) \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ für alle $x \in X$.

b) $|f(x) - g_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ für alle $x \in A$.

c) $|g_{n+1}(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ für alle $x \in X$.

d) $|g_n(x) - g_m(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ für alle $x \in X$ und $m, n \geq p$.

[*Ohne Beweis.*]

. . . .

Lemma 5.3.5.
Es sei X ein T_4-Raum, $A \subset X$ eine abgeschlossene Teilmenge und $f : A \to (-1, +1)$ eine stetige Funktion. Dann lässt sich f zu einer stetigen Funktion $F : X \to (-1, +1)$ fortsetzen.
[*Ohne Beweis.*]

. . . .

Satz 5.3.6 (Fortsetzungssatz von Tietze).
Es sei X ein topologischer Raum. X ist ein T_4-Raum genau dann, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ und jeder stetigen Funktion $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Fortsetzung von f zu $F : X \to \mathbb{R}$ gibt.

Beweis.
Sei X ein T_4-Raum, $A \subset X$ abgeschlossen und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Weiter sei $h : \mathbb{R} \to (-1, +1)$ ein beliebiger Homöomorphismus, z.B. $h(x) = \frac{x}{1+|x|}$. Nach Lemma 5.3.5 existiert eine stetige Fortsetzung $F^\star : X \to (-1, +1)$ von $f^\star = h \circ f$. Dann ist $F = h^{-1} \circ F^\star$ eine stetige Fortsetzung von f.
Zum Nachweis der umgekehrten Aussage seien $A, B \subset X$ disjunkte und abgeschlossene Mengen. Dann ist auch $A \cup B$ abgeschlossen. Die Funktion $f : A \cup B \to \mathbb{R}$ mit $f(A) = \{0\}$ und $f(B) = \{1\}$ kann stetig zu $F : X \to \mathbb{R}$ fortgesetzt werden. Dann sind $F^{-1}((-\infty, \frac{1}{2}))$ und $F^{-1}((\frac{1}{2}, \infty))$ disjunkte offene Mengen, die A und B trennen.[26] □

. . . .

[26] $(-\infty, \frac{1}{2})$ ist Umgebung von A, $(\frac{1}{2}, \infty)$ Umgebung von B.

5.4 Zerlegungen der Eins

In der Analysis und der Maßtheorie ist es manchmal nützlich, Funktionen in solche mit kleinen Trägern zu zerlegen.

Definition 5.4.1.
Es sei X ein topologischer Raum, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $E := \{x \in X : f(x) \neq 0\}$. Dann heißt $\operatorname{supp}(f) := \overline{E}$ der **Träger** von f.

. . . .

Definition 5.4.2.
Sei X ein topologischer Raum und A eine Indexmenge.

a) Ein System $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Teilmengen von X heißt **Überdeckung** von X, wenn $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha = X$.
(U_α) heißt **offene Überdeckung** von X, wenn jedes U_α offen ist. (Analoges gilt für abgeschlossene Überdeckungen.)

b) Ein System $\mathcal{E} = (E_\alpha)_{\alpha \in A}$ von Teilmengen von X heißt **lokalendlich**, wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine Umgebung U von x gibt, die nur endlich viele der E_α schneidet. Weiter heißt $\mathcal{E}$ **punktendlich**, wenn jeder Punkt $x \in X$ nur in endlich vielen der E_α liegt.

. . . .

Offenbar ist jede lokalendliche Überdeckung von X auch punktendlich. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht:
Dazu sei $X := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ versehen mit der von $\mathbb{R}$ induzierten Topologie und $\mathcal{E} = \left\{\left\{\frac{1}{n}\right\} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{X\}$. Dann ist $\mathcal{E}$ eine punktendliche, aber keine lokalendliche Überdeckung von X, da jede Umgebung von 0 unendlich viele der Punkte $\frac{1}{n}$ enthält.

Satz 5.4.3.
Es sei X ein normaler Raum, $F \subset X$ abgeschlossen und $\mathcal{E} = (E_\alpha)_{\alpha \in A}$ ein punktendliches System offener Mengen, das F überdeckt. Dann gibt es eine offene Überdeckung $\mathcal{G} = (G_\alpha)_{\alpha \in A}$ von F mit $\overline{G_\alpha} \subset E_\alpha$.
[*Ohne Beweis.*]

Definition 5.4.4.
Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von X. Dann heißt ein System von Funktionen $f_\alpha : X \to \mathbb{R}$ eine zu $\mathcal{U}$ **passende Zerlegung der Eins**, wenn Folgendes gilt:

a) $f_\alpha(x) \geq 0$ für alle $x \in X$ und alle $\alpha \in A$.

b) $(\operatorname{supp} f_\alpha)_{\alpha \in A}$ bilden ein lokalendliches System.

c) Für $\alpha \in A$ ist $\operatorname{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$.

d) Es gilt $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in X$.

Hierbei ist zu beachten, dass wegen b) die Summe in d) für jedes $x \in X$ endlich ist. Sind alle f_α stetig, so ist auch diese Summe stetig.

Satz 5.4.5.
Es sei X ein normaler Raum und $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine lokalendliche, offene Überdeckung von X. Dann gibt es eine zu $\mathcal{U}$ passende Zerlegung der Eins.
[*Ohne Beweis.*]

Folgerung 5.4.6.
Es sei X ein normaler Raum, F eine abgeschlossene Teilmenge von X und $\mathcal{U} = (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine lokalendliche, offene Überdeckung von F. Dann gibt es eine Familie $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ stetiger Funktionen $f_\alpha : X \to [0,1]$, sodass $f_\alpha(x) = 0$ für $x \notin U_\alpha$ und $\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$ für alle $x \in F$.
[*Ohne Beweis.*]

Zerlegungen der Eins erlauben es, Untersuchungen über Funktionen auf die Untersuchung von Funktionen mit kleinen Trägern zurückzuführen. In der Integrationstheorie werden z.B. lokalkompakte Räume untersucht und Integrale als positive Linearformen auf den Funktionen mit kompakten Trägern definiert. Diese Definition lässt sich mittels Zerlegungen der Eins auf größere Funktionenklassen ausdehnen. Ein anderes Beispiel betrifft Mannigfaltigkeiten. Diese Räume besitzen für jeden Punkt eine Umgebung, die homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ ist. Durch Verwendung von Zerlegungen der Eins lassen sich Untersuchungen von Funktionen, die auf einer Mannigfaltigkeit definiert sind, auf die Betrachtung von Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}^n$ definiert sind und außerhalb einer kompakten Menge verschwinden (d.h. gleich 0 sind). Schließlich werden Zerlegungen der Eins bei Beweisen von Metrisationssätzen benutzt. Dies sind Sätze, die hinreichende oder notwendige Bedingungen für die Metrisierbarkeit von topologischen Räumen sind.

6 Kompakte Räume

6.1 Kompakte Räume

Definition 6.1.1. Sei X ein topologischer Raum. X heißt **kompakt**, wenn jede offen Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt, d.h.:
Ist $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ eine Überdeckung von X, so existiert eine endliche Menge $B \subset A$, sodass $(U_\beta)_{\beta\in B}$ bereits eine Überdeckung von X ist.
Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **kompakt**, wenn sie in der Teilraumtopologie kompakt ist.
Vorsicht: Manche Autoren setzen noch die Hausdorffeigenschaft voraus.

....

Ein diskreter Raum X ist genau dann kompakt, wenn X eine endliche Menge ist. Ein indiskreter Raum ist immer kompakt. $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

Satz 6.1.2.
Sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

a) X ist kompakt.

b) Zu jeder Familie $(A_\alpha)_{\alpha\in A}$ abgeschlossener Mengen von X mit $\bigcap\limits_{\alpha\in A} A_\alpha = \emptyset$ gibt es eine endliche Teilmenge $B \subset A$ mit $\bigcap\limits_{\beta\in B} A_\beta = \emptyset$. (*endliche Durchschnittseigenschaft*)

c) Jeder Filter $\mathcal{F}$ auf X hat einen Berührpunkt.

d) Jeder Ultrafilter ist konvergent.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Man gehe zum Komplement über und benutze die De Morganschen Regeln.
b) $\Rightarrow$ c):
Annahme: Der Filter $\mathcal{F}$ habe keinen Berührpunkt. Dann ist $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} F = \emptyset$. Nach Voraussetzung existieren $F_1, \ldots, F_m \in \mathcal{F}$ mit $F_1 \cap \ldots \cap F_m = \emptyset$, also ist $\emptyset \in \mathcal{F}$. $\lightning$
c) $\Rightarrow$ d):
Die Voraussetzung impliziert, dass jeder Ultrafilter $\mathcal{F}$ einen Berührpunkt x hat. Dann muss $\mathcal{F} \to x$ gelten, da jeder Ultrafilter den Umgebungsfilter (von x) enthalten muss.
d) $\Rightarrow$ a):
Wir nehmen an, dass (U_α) eine offene Überdeckung ist, die keine endliche Teilüberdeckung hat. Für jede endliche Teilmenge $B \subset A$ gilt $A_B := X \setminus \bigcup\limits_{\beta\in B} U_\beta \neq \emptyset$. Weiterhin sind die

A_B paarweise *nicht* disjunkt und bilden daher die Basis eines Filters $\mathcal{F}$. Dieser ist nach dem Lemma von Zorn in einem Ultrafilter $\mathcal{V}$ enthalten, der nach Voraussetzung gegen ein $x \in X$ konvergiert. Damit ist $\mathcal{V}$ feiner als der Umgebungsfilter von x (da er diesen enthält) und es gilt

$x \in U_\alpha \Rightarrow U_\alpha \in \mathcal{V}$.

Nach Konstruktion von $\mathcal{V}$ gilt aber $X \setminus U_\alpha \in \mathcal{V}$ und somit gilt $\emptyset \in \mathcal{V}$. ↯ □

. . . .

Folgerung 6.1.3.
Es sei X ein kompakter Raum und (x_n) eine Folge in X. Dann hat (x_n) einen Häufungswert.

Beweis.
Wir betrachten den von der Folge erzeugten Filter $\mathcal{F}$. Dieser hat nach obigem Satz einen Berührpunkt x, welcher dann auch sofort ein Häufungswert von (x_n) sein muss. □

. . . .

Satz 6.1.4 (Subbasensatz von Alexander).
Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie von X. Es ist X genau dann kompakt, wenn jede Überdeckung mit Mengen aus $\mathcal{S}$ eine endliche Teilüberdeckung hat.

Beweis.
Die Implikation „⇒“ ist klar.
Wir nehmen nun für die Rückrichtung an, dass X nicht kompakt ist. Dann existiert ein Ultrafilter $\mathcal{V}$ auf X, der nicht konvergiert. Somit existiert zu jedem $x \in X$ eine Umgebung $U_x \in \mathcal{S}$ aber $U_x \notin \mathcal{V}$. Es ist also $\bigcup\limits_{x \in X} U_x = X$. Dann existiert nach Voraussetzung eine endliche Teilmenge $Y \subset \mathcal{S}$ mit $\bigcup\limits_{y \in Y} U_y = X$. Da $U_y \notin \mathcal{V}$ ist, ist $X \setminus U_y \in \mathcal{V}$. Somit folgt $\bigcap\limits_{y \in Y} X \setminus U_y \in \mathcal{V}$, also insbesondere $\emptyset \in \mathcal{V}$. ↯ □

. . . .

Beispiel 6.1.5.
Es sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall in $\mathbb{R}$ mit der Teilraumtopologie versehen. Eine Subbasis ist gegeben durch die Intervall $[a, c)$, $a < c < b$, und $(d, b]$ mit $a < d < b$. Nun sei U eine Überdeckung durch solche Subbasenelemente.
Setzen wir $C' = \sup \{c : [a, c) \in U\}$, dann existiert ein $d_1 < c'$ mit $(d_1, b] \in U$ und c_1 mit $d_1 < c_1 \leq c'$ mit $[a, c_1] \in U$. Also ist $[a, c_1) \cup (d_1, b] = [a, b]$ und aus dem Subbasensatz 6.1.4 folgt, dass $[a, b]$ kompakt ist.

In einem Hausdorff-Raum gibt es einen engen Zusammenhang zwischen kompakten und abgeschlossenen Mengen. Dazu:

Lemma 6.1.6.
Es sei X ein Hausdorff-Raum und $K \subset X$ kompakt. Dann existiert zu jedem $x \in X \setminus K$ eine Umgebung U von K und eine Umgebung V von x mit $U \cap V = \emptyset$.

Beweis.
Da X ein Hausdorff-Raum ist, existiert zu jedem $y \in K$ eine offene Umgebung U_y von y und eine offene Umgebung V_y von x mit $U_y \cap V_y = \emptyset$. Dann ist $(U_y)_{y \in K}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $K' \subset K$, sodass $U := \bigcup\limits_{y \in K'} U_y \supset K$ eine offene Umgebung von K ist. Setze nun $V := \bigcap\limits_{y \in K'} V_y$. Dann ist V eine offene Umgebung von x, da V als endlicher Durchschnitt aller offenen Mengen definiert ist. Ferner gilt $V \cap U = \emptyset$, woraus die Behauptung folgt. □

Satz 6.1.7.
Es sei X ein topologischer Raum. Dann gelten:

a) Ist X kompakt und A abgeschlossen in X, so ist A kompakt.

b) Ist X Hausdorffraum und $K \subset X$ kompakt, so ist K abgeschlossen.

Beweis.

a) Diese Ausssage ergibt sich direkt aus der Charakterisierung der Kompaktheit durch abgeschlossene Mengen in Satz 6.1.2 b).

b) Folgt direkt aus vorigem Lemma.

□

Aus der Kompaktheit eines abgeschlossenen Intervalls folgt nun der *Satz von Heine-Borel* für $\mathbb{R}$.

Satz 6.1.8.
Eine Menge $K \subset \mathbb{R}$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis.
Folgt aus 6.1.5 und 6.1.7. □

Bemerkung:
Eine kompakte Teilmenge eines kompakten Raumes muss im Allgemeinen nicht abgeschlossen sein, wenn X nicht Hausdorffsch ist.

Satz 6.1.9.
Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Dann ist X normal, also insbesondere auch regulär.

Beweis.
Es seien $A, B \subset X$ disjunkt und abgeschlossen. Dann sind A, B nach Satz 6.1.7 a) ebenfalls kompakt. Da X Hausdorffsch ist, existiert zu jedem $x \in A$ eine Umgebung U_x von x und V_x von B mit $U_x \cap V_x = \emptyset$ (wie im Beweis von 6.1.6). Somit ist $(U_x)_{x \in A}$ eine offene Überdeckung von A und wegen der Kompaktheit von A existiert eine endliche Teilmenge $A' \subset A$ mit $U := \bigcup_{x \in A'} U_x \supset A$ offen. Dann ist $V := \bigcap_{x \in A'} V_x$ eine offene Umgebung von B und daher $U \cap V = \emptyset$. Somit ist A normal. □

....

Wir zeigen jetzt, dass Kompaktheit unter stetigen Abbildungen erhalten bleibt.

Satz 6.1.10.
Es seien X, Y topologische Räume, X kompakt und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist auch $f(X) \subset Y$ kompakt in Y.

Beweis.
Sei $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von $f(X)$ und $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ für $\alpha \in A$. Da f stetig ist, ist U_α offen und daher $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, existiert eine endliche Teilmenge $B \subset A$, sodass $(U_\beta)_{\beta \in B}$ eine offene Überdeckung von X ist. Somit ist von f auch $(V_\beta)_{\beta \in B}$ eine endliche offene Überdeckung von $f(X)$ und damit folgt die Behauptung. □

....

Folgerung 6.1.11 (Satz vom Minimum und Maximum).
Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann nimmt f auf X Maximum und Minimum an, d.h.:

$$\exists x_1, x_2 \in X : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in X. \tag{6.1}$$

Beweis.
Folgt aus 6.1.10 und dem Satz von Heine-Borel 6.1.8. □

....

Satz 6.1.12.
Es seien X, Y topologische Räume, X kompakt, Y Hausdorffsch und $f : X \to Y$ stetig. Dann ist f abgeschlossen. Ist f zusätzlich injektiv bzw. bijektiv, so ist f eine Einbettung/Homöomorphismus.

Beweis.
Sei $A \subset X$ abgeschlossen. Dann ist A nach Satz 6.1.7 a) kompakt und somit ist nach Satz 6.1.10 auch $f(A)$ kompakt. Mit Satz 6.1.7 b) folgt weiter, dass $f(A)$ auch abgeschlossen ist. Also bildet f abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen ab und ist somit eine abgeschlossene Abbildung.
Ist f zusätzlich injektiv, so ist $f : X \to f(X)$ offen, denn für eine offene Menge $U \subset X$ ist $f(X \setminus U) = f(X) \setminus f(U)$ abgeschlossen in $f(X)$, also ist $f(U)$ offen in $f(X)$. Somit ist $f : X \to Y$ eine Einbettung. □

. . . .

Satz 6.1.13 (Satz von Tychonoff).
Es sei A eine Indexmenge, $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie nichtleerer topologischer Räume und $\prod = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ mit der Produkttopologie versehen. Dann gilt:
Es ist $\prod$ kompakt genau dann, wenn X_α für alle $\alpha \in A$ kompakt sind.

Beweis.
„$\Rightarrow$“:
Wenn $\prod$ kompakt ist, sind die kanonischen Projektionen $\Pi : \prod \to X_\alpha$ stetig und somit die Bildräume $\Pi(\prod) = X_\alpha$ für alle $\alpha \in A$ kompakt.
„$\Leftarrow$“:
Nun seien alle X_α kompakt und $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter auf $\prod$. Dann sind die Bildfilter $\Pi_\alpha(\mathcal{F})$ für alle $a \in \mathcal{A}$ Ultrafilter in X_α, also konvergent gegen ein $x_\alpha \in X_\alpha$. Nach Folgerung 4.3.10 folgt $\mathcal{F} \to (x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod$ und somit ist $\prod$ kompakt. □

. . . .

Satz 6.1.14 (Satz von Heine-Borel im $\mathbb{R}^n$).
Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis.
Es sei K kompakt. Dann hat die offene Überdeckung $\{U_m(0) : m \in \mathbb{N}\}$ eine endliche Teilüberdeckung und somit ist K beschränkt. Die Abgeschlossenheit folgt sofort aus Satz 6.1.7 b).
Nun sei K beschränkt und abgeschlossen. Dann liegt K in einem Würfel $W = [-M, M]^n$. W ist nach dem Satz von Tychonoff 6.1.13 kompakt, da $[-M, M]$ kompakt ist. Mit Satz 6.1.8 folgt dann, dass auch K kompakt ist. □

. . . .

6.2 Lokalkompakte Räume

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt auf Hausdorff-Räume.

Definition 6.2.1.
Ein topologischer Raum X heißt **lokalkompakt**, wenn X Hausdorffsch ist und jeder Punkt $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt.

. . . .

Offensichtlich ist jeder kompakte Hausdorff-Raum auch lokalkompakt.

Satz 6.2.2.
Es sei X ein lokalkompakter Raum. Dann ist X regulär.

Beweis.
Sei $x \in X$ und $K \subset X$ eine kompakte Umgebung von x. Dann ist K nach Satz 6.1.7 b) abgeschlossen und nach Satz 6.1.9 regulär. Ist nun U eine beliebige Umgebung von x, so ist $U \cap K$ eine Umgebung von x in K. Da K regulär ist, existiert eine Umgebung V von x mit $x \in V \subset \overline{U} \subset U \cap K$. Aber V ist auch eine Umgebung von $x \in X$, da K eine Umgebung von x ist. Weiterhin ist $\overline{V}$ abgeschlossen. Somit ist nach Satz 5.1.6 X regulär. □

. . . .

Satz 6.2.3.
Es sei X ein lokalkompakter Raum und $x \in X$. Dann bilden die kompakten Umgebungen von x eine Umgebungsbasis von x.

Beweis.
Sei $x \in X$ und $K \subset X$ eine kompakte Umgebung von x. Da X nach dem vorigen Satz regulär ist, bilden die abgeschlossenen Umgebungen V von x eine Umgebungsbasis von x nach Satz 5.1.6. Jedes $V \cap K$ ist nun kompakt und daher bilden diese $V \cap K$ eine kompakte Umgebungsbasis. □

. . . .

Beispiel 6.2.4.

a) Da in $\mathbb{R}^n$ jede beschränkte und abgeschlossene Menge kompakt ist, ist $\mathbb{R}^n$ lokalkompakt. Außerdem ist jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ lokalkompakt.

b) Ist X ein lokalkompakter Raum, so ist der Durchschnitt einer offenen und abgeschlossenen Menge als Teilraum lokalkompakt.

   Beweis.
   Sei $Y = U \cap F$ mit $U \subset X$ offen und $F \subset X$ abgeschlossen und $x \in Y$. Daraus folgt $x \in U$ und $x \in F$. Da U offen und X lokalkompakt ist, existiert eine kompakte

Umgebung $V \subset U$ von x. Setze nun $W := V \cap F$. Aus der Hausdorffeigenschaft von X folgt nun, dass W eine kompakte Umgebung von x in Y ist. □

Insbesondere ist jede offene und jede abgeschlossene Teilmenge von X lokalkompakt.

c) $\mathbb{Q}$ ist in $\mathbb{R}$ nicht lokalkompakt.

. . . .

Satz 6.2.5 (Alexandroff-Kompaktifizierung).
Es sei X ein lokalkompakter Raum, der nicht kompakt ist. Dann gibt es bis auf Homöomorphie genau einen kompakten Hausdorff-Raum $\hat{X}$, der einen zu X homöomorphen Unterraum X_1 enthält, so dass $\hat{X} \setminus X_1$ aus genau einem Punkt „∞" besteht. Weiter ist X_1 dicht in $\hat{X}$.

Beweis.
Zur Konstruktion von $\hat{X}$:
Sei ∞ ein Punkt, der nicht in X liegt. Wir setzen $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. Die offenen Mengen von $\hat{X}$ seien die offenen Mengen in X und die Mengen der Form $\hat{X} \setminus K$, wobei $K \subset X$ kompakt ist.[27] Um zu zeigen, dass hierdurch eine Topologie definiert wird, beachten wir folgende Tatsachen:

1) Eine endliche Vereinigung kompakter Mengen in einem Hausdorff-Raum ist ein kompakter Hausdorffraum.

2) $(\hat{X} \setminus K) \cap K$ ist nach Satz 6.1.7 b) offen in X.

3) In einem Hausdorff-Raum sind die Durchschnitte kompakter Mengen wieder kompakt.

4) Der Durchschnitt einer kompakten Hausdorffschen Menge[28] mit einer abgeschlossenen Menge ist wieder kompakt.

Wegen 1) und 2) sind endliche Durchschnitte offener Mengen wieder offen. Wegen 3) und 4) sind beliebige Vereinigungen offener Mengen wieder offen. Aus der Definition der Topologie sieht man sofort, dass der Unterraum $X_1 = \hat{X} \setminus \{\infty\}$ homöomorph zu X ist.

Behauptung: $\hat{X}$ ist kompakter Hausdorff-Raum.

Beweis. Es ist $\hat{X}$ ein Hausdorff-Raum, da X ein Hausdorff-Raum ist und jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung $K(x)$ hat, denn $\hat{X} \setminus K(x)$ ist eine Umgebung von ∞, die ∞

[27] An dieser Stelle kommt die Lokalkompaktheit zum Tragen: Sonst könnte es sein, dass es gar keine kompakten Mengen gibt.

[28] X topologischer Raum, $M \subset X$ mit Teilraumtopologie. M heißt *Hausdorffsche Menge*, wenn M kompakt und als Teilraum Hausdorffsch ist.

von x trennt. $\hat{X}$ ist zudem kompakt, da jede offene Überdeckung von $\hat{X}$ eine Menge der Form $\hat{X} \setminus K$ besitzt. $\diamondsuit$

Zur Eindeutigkeit von $\hat{X}$:
Sei nun X' ein weiterer topologischer Raum, der die Bedingungen des Satzes erfüllt. Dabei sei X'' ein zu X homöomorpher Unterraum von X', so dass $X' \setminus X''$ nur aus einem Punkt ∞' besteht.
Nun sei $f : X \to X''$ ein Homöomorphismus. Wir definieren $F : \hat{X} \to X'$ durch $F(x) = f(x)$ für $x \in X$ und $F(\infty) = \infty'$. Dann ist F bijektiv und in jedem Punkt $x \in X$ stetig. Das Komplement jeder offenen Umgebung von ∞' ist eine abgeschlossene Teilmenge des kompakten Raumes X'. Da $f^{-1}(K')$ für jede kompakte Menge $K' \subset X''$ wieder kompakt ist (vgl. Satz 6.1.10), folgt nun:
F ist auch stetig in ∞. Für F^{-1} argumentiert man ähnlich. $\square$

. . . .

Bemerkung:
Die obige Kompaktifizierung heißt auch *1-Punkt-Kompaktifizierung* (Im Gegensatz zu anderen Kompaktifizierungen, z.B. Stone-Ćech) und ∞ der *unendliche ferne Punkt*.

Bemerkung: [Zur Anwendung in der Funktionalanalysis]
Ein topologischer Vektorraum, der eine kompakte Menge mit inneren Punkten enthält, ist endlichdimensional. Weiter ist ein topologischer Vektorraum, der lokalkompakt ist, ebenfalls endlichdimensional.

Beispiel:
Die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}^n$ ist homöomorph zu $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Aus der Definition der Einpunktkompaktifizierung folgt sofort

Satz 6.2.6.
Es seien X, Y lokalkompakte Räume und $\hat{X}, \hat{Y}$ ihre Einpunktkompaktifizierungen. Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann durch die Definition $\hat{f}(\infty_X) = \infty_Y$ stetig fortsetzbar zu $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$, wenn für jede kompakte Menge $K \subset Y$ auch $f^{-1}(K)$ kompakt in X ist.

. . . .

Bemerkung:
Solche Abbildungen heißen auch *eigentliche Abbildungen*.

Satz 6.2.7.
Es seien X, Y lokalkompakte Räume und $f : X \to Y$ eine eigentliche Abbildung. Dann ist f abgeschlossen und $f(X)$ lokalkompakt.

Beweis.
Die Fortsetzung $\hat{f} : \hat{X} \to \hat{Y}$ ist nach Satz 6.1.12 abgeschlossen. Nun sei $A \subset X$ abgeschlossen in X. Dann ist $A \cup \{\infty_X\}$ abgeschlossen in $\hat{X}$. Wegen $\hat{f}(A \cup \{\infty_X\}) = f(A) \cup \{\infty_Y\}$ ist auch f abgeschlossen. Daher ist $f(X) = \hat{f}(\hat{X}) \cap Y$ der Durchschnitt einer abgeschlossenen und einer offenen Menge und daher lokalkompakt nach Beispiel 6.2.4 b). □

Definition 6.2.8.
Ein lokalkompakter Raum heißt **σ-kompakt**, wenn er als abzählbare Vereinigung von kompakten Teilräumen darstellbar ist. Ein solcher Raum heißt auch **abzählbar in Unendlich**.

Beispiel:
Ein diskreter Raum X ist genau dann σ-kompakt, wenn X eine höchstens abzählbare Menge ist. $\mathbb{R}^n$ ist σ-kompakt, denn es ist

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k]^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{U_k(0)}. \tag{6.2}$$

Satz 6.2.9.
Es sei X ein lokalkompakter Raum. Dann gelten:

a) Es ist X genau dann σ-kompakt, wenn der bei der Einpunktkompaktifizierung hinzugefügte Punkt ∞ eine abzählbare Umgebungsbasis hat.

b) Es ist X genau dann σ-kompakt, wenn es eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ offener Mengen mit folgenden Eigenschaften gibt:
   1) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\overline{U_n}$ kompakt.
   2) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $\overline{U_n} \subset U_{n+1}$.
   3) Es ist $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von X.

Beweis.

a) Folgt sofort aus der Definition von σ-Kompaktheit und der Topologie von X.

b) Wenn die Eigenschaften 1) bis 3) erfüllt sind, so ist X offenbar σ-kompakt.
Zum Beweis der Umkehrung zeigen wir zunächst: In einem lokalkompakten Raum X gibt es zu jeder kompakten Menge K eine offene Menge V und eine kompakte Menge K' mit $K \subset V \subset K'$, d.h. jede kompakte Menge besitzt eine Umgebung, deren Abschluss kompakt ist.

Beweis.
Zu jedem $x \in K$ existiert eine offene Umgebung $K(x)$ mit kompaktem Abschluss. Dann ist $\{K(x) : x \in K\}$ eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, existieren $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit $V = \bigcup_{j=1}^{n} K(x_j) \supset K$ und V offen. Somit ist $\overline{V}$ kompakt, da $\overline{K(x_j)}$ kompakt sind und es folgt $K \subset V \subset \overline{V} =: K'$. ◊

Da X σ-kompakt ist, existiert eine Folge kompakter Mengen K_n mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = X$.
Wir konstruieren nun die Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ induktiv.
Induktionsanfang:
Nach dem eben Bewiesenen existiert eine offene Menge U_1 mit kompaktem Abschluss und $K_1 \subset U_1 \subset \overline{U_1}$.
Induktionsschluss:
Induktiv wählen wir zu der kompakten Menge $\overline{U_n} \cup K_{n+1}$ eine offene Menge U_{n+1} mit kompaktem Abschluss und $\overline{U_n} \cap K_{n+1} \subset U_{n+1}$.
Anschließend verifiziert man, dass mit dieser Folge die Bedingungen 1) bis 3) erfüllt sind.

□

. . . .

Bemerkung:
Aus diesem Satz folgt leicht, dass jede offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ σ-kompakt ist.

Beweis.
Setze $U_n = U_n(0) \cap \left\{x \in \Omega : \operatorname{dist}(x, \mathbb{R} \setminus \Omega) > \frac{1}{n}\right\}$. Diese Menge ist kompakt, da sie beschränkt und abgeschlossen ist. Sie ist zudem offensichtlich monoton und eine Überdeckung. Daraus folgt mit Satz 6.2.9 die Behauptung.

Ersetzt man in der Formulierung offen durch abgeschlossen, so gilt die Behauptung auch und man muss lediglich den Abschluss von U_n bilden, damit der Beweis erhalten bleibt. □

6.3 Weitere Kompaktheitsbegriffe

Definition 6.3.1.
Ein Hausdorff-Raum X heißt **abzählbar kompakt**, wenn jede abzählbare, offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

. . . .

Ist X ein Hausdorff-Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt (d.h. eine abzählbare Basis besitzt), so sind die Begriffe abzählbar kompakt und kompakt äquivalent, denn es gilt offenbar folgendes Ergebnis.

Satz 6.3.2 (Satz von LINDELÖF).
Es sei X ein topologischer Raum, der das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so enthält jede offene Überdeckung von X eine abzählbare Teilüberdeckung.
[*Ohne Beweis.*]

. . . .

Topologische Räume, die das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen, werden auch *Lindelöfräume* genannt. Abzählbar kompakte Räume lassen sich durch Folgen charakterisieren. Es gilt hier auch die Umkehrung von Folgerung 6.1.3.

Satz 6.3.3.
Ein Hausdorff-Raum X ist genau dann abzählbar kompakt, wenn jede Folge (x_n) in X einen Häufungswert besitzt.
[*Ohne Beweis.*]

. . . .

Definition 6.3.4.
Es sei X ein Hausdorff-Raum. Dann heißt X **folgenkompakt**, wenn jede Folge (x_n) in X eine konvergente Teilfolge besitzt.

. . . .

Bemerkung:
Aus Folgenkompaktheit folgt sofort abzählbare Kompaktheit. Die Umkehrung gilt i.A. nicht.

Satz 6.3.5.
Es sei X ein Hausdorff-Raum, der das erste Abzählbarkeitsaxiom (vgl. Definition 1.2.4 b) erfüllt. Dann sind Folgenkompaktheit und abzählbare Kompaktheit von X äquivalent.
[*Ohne Beweis.*]

. . . .

Satz 6.3.6.
Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die drei Begriffe *kompakt*, *folgenkompakt* und *abzählbar kompakt* äquivalent.
[*Ohne Beweis.*]