Skript zum Videokurs

Grundlagen der Funktionalanalysis

B.Sc. Matthias Schulte

Version vom 21. September 2020

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Im vorliegenden Skript wird eine Einführung in die Grundlagen der Funktionalanalysis gegeben, welche zusätzlich mit ausführlichen Videos auf Youtube ausgestaltet wird. Diese sind hier zu finden:

Grundlagen der Funktionalanalysis

In den Videos sind zudem auch Beweise zu den meisten Aussagen ausformuliert, worauf im Rahmen dieses Skripts im Folgenden verzichtet wird.

Inhaltliche Voraussetzungen für diesen Kurs variieren abhängig vom Studiengang – also abhängig davon, ob reine Mathematik oder Ingenieursmathematik. *Unabhängig vom Studienfach* ist eine solide Kenntnis der Analysis in einer Variablen (*Analysis I*) und der linearen Algebra (*Lineare Algebra I+II*) notwendig. Auch sollte das Konzept eines *metrischen Raums* bekannt sein. Bei inhaltlichem Nachholbedarf sei hier an [Kaballo, 2000] für die Analysis und [Fischer, 2014] für die lineare Algebra verwiesen.
Hilfreich, aber nicht zwingend erforderlich ist eine gewisse Vertrautheit mit dem Lebesgueschen Integralbegriff und der Maßtheorie im Allgemeinen – etwa im Umfang einer *Analysis III* oder auch Teilen einer *Stochastik II*. Hier empfiehlt sich zur Auffrischung bzw. Einarbeitung [Elstrodt, 2011].

Die wesentliche Literatur zur Funktionalanalysis besteht aus [Kaballo, 2011], wobei die Inhalte nicht alle abgedeckt und teilweise bunt gemischt werden.
Die Literatur ist ausführlich im Literaturverzeichnis zu finden.

Der Videokurs in seiner gesamten Länge entspricht ungefähr einer klassischen Vorlesung mit zwei Vorlesungsstunden pro Woche, ist also als (2+1)-Vorlesung realisierbar.

Dieses Skript ist auf meiner Homepage verfügbar und wird den Videos entsprechend aktualisiert. Es ist ausdrücklich erlaubt, dieses Skript und auch die Videos zu teilen, wenn dabei mein Name und der Bezug zu obiger Website erhalten bleibt, sprich:

Matthias Schulte, 2020.

Teil 1 - Einführung und Wiederholung

In diesem die Kapitel 1 und 2 umfassenden ersten Teil des Kurses legen wir die wichtigsten Grundlagen, um den Inhalt dieses Kurses verstehen zu können.

1. Mathematische Strukturen

In diesem ersten Kapitel stellen wir noch einmal kurz alle wichtigen mathematischen Strukturen vor, die im Laufe dieses Videokurses noch wichtig sein werden. Dabei werden die einzelnen Begriffe nicht ins Detail ausgeführt, dies geschieht in der zugehörigen Videoreihe.
Inhaltlich abstrahieren wir von Skalarprodukträumen zu normierten und dann zu metrischen Räumen. Danach führen wir den wichtigen Begriff der Vollständigkeit eines Raumes ein und definieren Banach- und Hilberträume, zwei wichtige Klassen von Räumen.

Definition 1.1.
Sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt**, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(SP1) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist bilinear.

(SP2) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist symmetrisch.

(SP3) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist positiv definit.

Dabei ist die Linearität im zweiten Argument für $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ wie folgt zu lesen:
$\langle x, \alpha y \rangle = \overline{\alpha} \langle x, y \rangle$.

. . . .

Definition 1.2.
Das Paar $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, wobei X und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wie in Definition 1.1 definiert seien, heißt **Innenproduktraum**.

. . . .

Beispiel 1.3.

a) Das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$ ist ein Skalarprodukt.

b) Sei $X := \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty\}$. Dann wird durch

$$\langle f, g \rangle := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) \, \mathrm{d}x \tag{1.1}$$

ein Skalarprodukt auf X definiert.

. . . .

Nach diesen ersten Begriffsklärungen bringen wir nun normierte und metrische Räume als Verallgemeinerungen ins Spiel. Diese erlauben eine Verallgemeinerung analytischer Konzepte auf eben diese Räume.

Definition 1.4.
Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
Die Abbildung $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ heißt **Norm**, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(N1) $||\cdot||$ ist positiv definit.

(N2) $||\cdot||$ ist homogen.

(N3) $||\cdot||$ erfüllt die (bekannte) Dreiecksungleichung.

Definition 1.5.
Das Paar $(X, ||\cdot||)$, wobei X und $||\cdot||$ wie in Definition 1.4 definiert seien, heißt **normierter Raum**.

Beispiel 1.6.

a) Der Absolutbetrag auf $\mathbb{R}$ ist eine Norm.

b) Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$||x||_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j|\,, \; x \in X, \tag{1.2}$$

eine Norm auf X. (**1-Norm**)

c) Es sei $X = \mathbb{R}^n$. Dann ist

$$||x||_\infty := \max_{j=1,\dots,n} |x_j|\,, \; x \in X, \tag{1.3}$$

eine Norm auf X. (**∞-Norm**, **Supremumsnorm**)

d) Es sei $X = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \mid \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \;\mathrm{d}x < \infty\}$ für $1 \leq p < \infty$. Dann ist

$$||f||_p := \sqrt[p]{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \;\mathrm{d}x} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \;\mathrm{d}x\right)^{1/p} \tag{1.4}$$

eine Norm auf X. (**L_p-Norm**)

Lemma 1.7.
Sei $X := (X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein Prä-Hilbertraum. Dann ist X auch ein normierter Raum und eine Norm ist gegeben durch

$$||x|| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \quad \text{für } x \in X.$$

Beweis. Siehe Video zu Kapitel 1. ■

Definition 1.8.
Sei X eine beliebige Menge.
Die Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}$ heißt **Metrik**, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(M1) d ist positiv definit.

(M2) d ist symmetrisch.

(M3) d erfüllt die Dreiecksungleichung.

Definition 1.9.
Das Paar (X, d), wobei X und d wie in Definition 1.8 definiert seien, heißt **metrischer Raum**.

Lemma 1.10.
Es sei $X := (X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann ist X auch ein metrischer Raum und eine Metrik ist gegeben durch

$$d(x, y) := ||x - y|| \text{ für } x, y \in X.$$

Beweis. Siehe Video zu Kapitel 1. ■

Mittels dieser Begrifflichkeiten können wir nun das weitere begriffliche Fundament aufbauen, dass die Grundlage des weiteren Vorgehens liefert. Besonders wichtig ist hierbei der nun eingeführte Begriff der *Vollständigkeit*.

Definition 1.11.
Sei $X := (X, d)$ ein metrischer Raum und sei (x_n) eine Folge in X.
Die Folge (x_n) heißt **Cauchyfolge**, wenn folgende Bedingung gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \; d(x_n, x_m) < \varepsilon \; \forall m, n \geq n_0 \tag{1.5}$$

Lemma 1.12.
Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Beweis. Siehe Video zu Kapitel 1. ■

Definition 1.13.
Sei $X := (X, d)$ ein metrischer Raum.
X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in X konvergiert.

Bemerkung 1.14.
Ist eine Folge (x_n) konvergent gegen ein x, so gehört in einem vollständigen metrischen Raum X der Grenzwert zum Raum: $x \in X$. Genauso verhält es sich mit den Häufungspunkten von Folgen in vollständigen metrischen Räumen.

Nachdem nun der Begriff der *Vollständigkeit* definiert ist, können wir zwei wichtige „Typen“ von Räumen definieren und einige wichtige Beispiele geben.

Definition 1.15.

a) Ein **Hilbertraum** ist ein vollständiger Raum, der mit einem Skalarprodukt ausgestattet ist – also ein vollständiger Prä-Hilbertraum.

b) Ein **Banachraum** ist ein vollständiger normierter Raum.

Insbesondere ist also jeder Hilbertraum ein Banachraum.

. . . .

Beispiel 1.16.

a) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein Banachraum.

b) $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist **kein** Banachraum, da man Folgen in $\mathbb{Q}$ konstruieren kann, die gegen irrationale Zahlen konvergieren.[2]

c) Die L_p-*Räume*

$$X := \left\{ f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \; \mathrm{d}x < \infty, \; p \in [1, \infty) \right\} \tag{1.6}$$

sind Banachräume. Für $p = 2$ ist dies sogar ein Hilbertraum.
Bemerkung: Wir werden in Kapitel 3 die L_p-Räume noch einmal sauber definieren, allerdings ist die obige Variante nicht falsch, sondern „lediglich“ ein wichtiger Spezialfall.

[2] Betrachte hierzu beispielsweise das babylonische Wurzelziehen, welches einen simplen Ansatz für diese Art von Folgen realisiert. Siehe dazu auch http://www.mathepedia.de/Naeherung_von_Wurzel_2.aspx. (13.04.2017, 21:21 Uhr)

2. Topologische Grundbegriffe

Auch – oder gerade weil – es in diesem Skript um Funktionalanalysis geht, sind einige (wenige) topologische Grundbegriffe unersetzlich. Als besonders wichtig wird sich dabei die *Dichteeigenschaft* von Mengen herausstellen.
Auch in diesem Kapitel weise ich noch einmal darauf hin, dass die vorgestellten Begriffe nicht alle bis ins Detail ausgearbeitet werden, da dies in den Videos geschieht. Sollte es diesbezüglich zu Verständnisschwierigkeiten kommen, so sei auch hier wieder auf die Literatur verwiesen.

Definition 2.1.
Sei X eine Menge.

a) X heißt **abgeschlossen**, wenn X alle seine Häufungspunkte enthält.

b) X heißt **offen**, wenn X^C (das Komplement von X) abgeschlossen ist.

c) Sei Y eine weitere Menge mit $X \subset Y$. X heißt **dicht in $\boldsymbol{Y}$**, wenn $\overline{X} = X \cup X' = Y$ gilt, wobei X' die Menge aller Häufungspunkte bezeichnet.

d) $\varnothing$ und X sind per Definition sowohl offen als auch abgeschlossen.

. . . .

Beispiel 2.2.
Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$.

a) $x \in X$ heißt **Randpunkt** von A, falls für ein $\varepsilon > 0$ sowohl $U_\varepsilon(x) \cap A \neq \varnothing$ als auch $U_\varepsilon(x) \cap A^C \neq \varnothing$ gilt. Die Menge aller Randpunkte bezeichnen wir mit ∂A.

b) $A^\circ := A \backslash \partial A$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von A. A heißt **offen**, wenn $A = A^\circ$ gilt, also $\partial A \cap A = \varnothing$.

c) $\overline{A} := A \cup \partial A$ heißt **Abschluss** von A. A heißt **abgeschlossen**, wenn $\overline{A} = A$ gilt, also $\partial A \subset A$.

d) Ein Punkt $h \in X$ heißt **Häufungspunkt** von A, wenn es eine Folge $(x_n) \subset A \backslash \{h\}$ gibt mit $x_n \to h$ für $n \to \infty$.

Bemerkung: Die Begriffe offen und abgeschlossen sind relative Begriffe bezüglich der Obermenge. Als Beispiel betrachte das Intervall $I = (-1, 1]$. Dieses ist bezüglich $X = \mathbb{R}$ weder abgeschlossen noch offen, in $X = (-\infty, 1]$ offen und in $X = (-1, \infty)$ abgeschlossen. *Beide Eigenschaften können also beim Übergang zu einer größeren Obermenge verloren gehen.*

. . . .

Lemma 2.3.
Sei X ein metrischer Raum und $A \subset X$. Dann ist A genau dann abgeschlossen in X, wenn A^C offen in X ist.

Beweis. Siehe Video zu Kapitel 2. ■

Bemerkung 2.4.
Sei A eine Menge. Dann gelten folgende wichtige **Nicht**-Äquivalenzen:

a) A abgeschlossen. $\not\Leftrightarrow$ A ist nicht offen.

b) A ist offen. $\not\Leftrightarrow$ A ist nicht abgeschlossen.

Bemerkung 2.5.
Seien $X := (X, ||\cdot||_X), Y := (Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Räume, X dicht in Y und $y \in Y$.
Dann kann y durch eine Folge $(x_n) \subset X$ approximiert werden:

$||x_n - y||_Y \to 0 \ (n \to \infty)$.

Lemma 2.6.
Sei $Y := (Y, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $X \subset Y$ abgeschlossen.
Dann ist $X := (X, d\,|_X)$ ein metrischer Raum und X ist vollständig.

Beweis. Siehe Video zu Kapitel 2. ∎

Bemerkung 2.7.
Sei X dicht in Y, also $\overline{X} = Y$. Wollen wir eine Aussage für Elemente von Y zeigen, so reicht es aus, dies für X zu tun: Dieses Prinzip nennen wir **Dichteschluss**.
Ein kleiner inhaltlicher Vorgriff zur Verdeutlichung:
Es sei $X := C^1[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f$ stetig differenzierbar auf $[a, b]\}$ und
$Y := C[a, b] := \{f : [a, b] \to \mathbb{R} : f$ stetig auf $[a, b]\}$. Dann ist X dicht in Y und es reicht aus, eine Aussage für stetig differenzierbare Funktionen zu zeigen, wenn man sie für stetige Funktionen zeigen will. Dies ist manchmal aufgrund der zusätzlichen Eigenschaft der Differenzierbarkeit einfacher.

Teil 2 - Grundlegendes der Funktionalanalysis

In den Kapiteln 3 bis 11 werden wir nun wichtige elementare Begriffe, Methoden und Sätze der Funktionalanalysis kennenlernen, die es uns in Teil 3 erlauben werden, sehr weitreichende Konsequenzen daraus zu ziehen.

3. Die L_p-Räume

Auch wenn Beispiel 1.16 bzw. Gleichung (1.6) schon eine grobe intuitive Vorstellung der L_p-Räume liefern, werden wir diese nun nochmals mathematisch sauber definieren. Dabei werden einige Begrifflichkeiten aus der Maßtheorie benötigt, zu deren genauer Definition an dieser Stelle auf Anhang A verwiesen sei.

Definition 3.1.
Sei $1 \leq p < \infty$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, Ω eine Menge, Σ eine σ-Algebra in Ω und (Ω, Σ, μ) ein Maßraum mit positivem Maß μ. Wir definieren nun die **$\mathcal{L}_p$-Räume** wie folgt:

$$\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \,\middle|\, f \text{ ist } \Sigma\text{-messbar und } ||f||_{L_p} < \infty \right\} \tag{3.1}$$

Insbesondere ist $\mathcal{L}_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ der Raum der μ-integrierbaren Funktionen auf Ω.

. . . .

Bemerkung 3.2.

a) Diese Räume sind noch nicht die namensgebenden L_p-Räume.

b) Ohne Einschränkung können wir den Maßraum als vollständig auffassen, d.h. jede Teilmenge einer Nullmenge in Σ ist wieder eine Nullmenge (bezüglich des Maßes μ).

c) Wir lassen in der Notation auch Bestandteile des Maßraums weg, wenn klar ist, welche Teile gemeint sind.

d) In Gleichung (1.6) haben wir also $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ als Maßraum gewählt, wobei λ das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ die Lebesgue-messbaren Mengen im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen.

. . . .

Beispiel 3.3.
Für $A \subset \mathbb{N} =: \Omega$ definieren wir $\mu(A) = |A|$. Diese *Zählmaß* induziert die sogenannten *Folgenräume*

$$\ell_p := \left\{ x := (x_j)_{j=0}^{\infty} : ||x||_p := \left(\sum_{j=0}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}. \tag{3.2}$$

. . . .

Bevor wir nun konkret auf die Definition der L_p-Räume hinarbeiten, werden wir zwei elementare Ungleichungen vorstellen und beweisen, die im Folgenden immer wieder benötigt werden.

Satz 3.4 (*Hölderungleichung*).
Es seien $p, q \in [0, \infty]$ mit $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $f \in \mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ und $g \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mu)$. Dann ist $f \cdot g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mu)$ und es gilt

$$||f \cdot g||_{L_1} \leq ||f||_{L_p} \cdot ||g||_{L_q}. \tag{3.3}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 3. ■

Satz 3.5 (*Minkowskiungleichung*).
Es sei $p \in [0, \infty]$. Dann ist $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ ein Vektorraum und für $f, g \in \mathcal{L}_p$ gilt

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p}. \tag{3.4}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 3. ■

Um nun den Unterschied der L_p-Räume zu den $\mathcal{L}_p$ zu diskutieren, betrachten wir zunächst folgenden wichtigen Begriff.

Definition 3.6.
Es sei V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine **Halbnorm** auf V ist eine Abbildung $p : V \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} =: \mathbb{R}_0^+$ mit

(H1) $p(\lambda x) = |\lambda| \, p(x) \quad \forall \, x \in V, \lambda \in \mathbb{K}$ und

(H2) $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall \, x, y \in V$.

Lemma 3.7.
Für $1 \leq p \leq \infty$ werden auf den Räumen $\mathcal{L}_p(\Omega, \mu)$ durch $||\cdot||_{L_p}$ Halbnormen definiert. Ferner ist $||\cdot||_{L_p} \geq 0$ und es gilt

$$||f||_{L_p} = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \ \mu\text{-fast überall.} \tag{3.5}$$

Folgerung 3.8.
Der Kern der L_p-Halbnormen ist also unabhängig von p stets der *Raum der Nullfunktionen*:

$$\mathcal{N} := \mathcal{N}(\Omega, \Sigma, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} : f(t) = 0 \text{ fast überall}\}. \tag{3.6}$$

Zu einem halbnormierten Raum $(E, ||\cdot||_E)$ kann man einen normierten Raum von Äquivalenzklassen wie folgt assoziieren:
Der Kern $N := \{x \in E : ||x||_E = 0\}$ der zu E gehörigen Halbnorm ist offensichtlich ein Unterraum von E. Wir definieren nun wie folgt eine Äquivalenzrelation auf E:

$$x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in N \Leftrightarrow ||x-y||_E = 0. \tag{3.7}$$

Nun folgt für die Äquivalenzklassen dieser Äquivalenzrelation

$$\tilde{x} = \{y \in E : y \sim x\} = x + N := \{x + n : n \in N\}, x \in E. \tag{3.8}$$

Diese sind affine Unterräume von E „in Richtung von“ N. Stattet man nun den Raum der Äquivalenzklassen mit Addition und Skalarmultiplikation wie folgt aus, so erhalten wir einen

Vektorraum, den wir als **Quotientenraum** E/N bezeichnen; die eingeführten Operationen[3] sehen dabei so aus:

$$\tilde{x} + \tilde{y} := \widetilde{x+y} \text{ und } \alpha\tilde{x} = \widetilde{\alpha x} \text{ für } x, y \in E, \alpha \in \mathbb{K}. \tag{3.9}$$

Auf E/N definieren wir nun durch

$$||\tilde{x}||_E := ||x||_E \,, \quad x \in E, \tag{3.10}$$

eine Norm. Wir nennen nun $(E/N, ||\cdot||_E)$ den zu $(E, ||\cdot||_E)$ **assoziierten normierten Raum**.

Definition 3.9.
Es sei $1 \leq p \leq \infty$. Der zu $\left(\mathcal{L}_p(\Omega, \Sigma, \mu), ||\cdot||_{L_p}\right)$ assoziierte normierte Raum wird mit

$$L_p(\Omega, \Sigma, \mu) = \mathcal{L}_p(\Omega,\Sigma,\mu)/\mathcal{N}(\Omega,\Sigma,\mu) \tag{3.11}$$

bezeichnet. In Worten besteht der L_p-Raum also aus Äquivalenzklassen fast überall gleicher (und messbarer) Funktionen.

Nachdem wir nun die L_p-Räume sauber definiert haben, geben wir an dieser Stelle zwei Sätze zu diesen an, die wir allerdings nicht beweisen werden.

Satz 3.10.
Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $L_p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein Banachraum.

Satz 3.11.
$L_2(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist ein Hilbertraum. Dieser ist der (bis auf isometrische Isomorphie) einzige unendlich dimensionale Hilbertraum.

Wir wollen nun den Raum $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ genauer charakterisieren. Vorher diskutieren wir allerdings noch zwei Beispiele zu den L_p-Räumen.

Beispiel 3.12.
Es sei $\Omega = \mathbb{R}^n$ und λ das Lebesguemaß im $\mathbb{R}^n$ mit zugehöriger σ-Algebra.
Dann sind nichtkonstante Polynomfunktionen $q \not\equiv 0$ nicht in $L_p(\Omega)$ für alle $1 \leq p \leq \infty$. Für jedes *beschränkte* $\Omega' \subset \Omega$ gilt jedoch stets $q \in L_p(\Omega')$.

Beispiel 3.13.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \begin{cases} x & : \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & : \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$. Dann ist f weder stetig noch beschränkt und es gilt auch nicht $f(x) \to 0$ für $x \to \pm\infty$.
Da aber $\mathbb{Q}$ eine Lebesgue-Nullmenge in $\mathbb{R}$ ist, gilt

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, \mathrm{d}\lambda\right)^{1/p} = 0^{1/p} = 0 \text{ für } 1 \leq p < \infty. \tag{3.12}$$

[3] Es müsste streng genommen noch nachgewiesen werden, dass diese Definition der Abbildung unabhängig von der Wahl des Vertreters aus der Äquivalenzklasse ist. Dies ist im vorliegenden Fall aber offensichtlich richtig bzw. der Nachweis dieser Eigenschaft ist trivial.

Somit gilt $f \in L_p(\mathbb{R})$ für $1 \leq p < \infty$.

Es ist eine interessante Fragestellung, ob diese Funktion f auch in $L_\infty(\mathbb{R})$ liegt. Hierzu treffen wir nun folgende Definition, die auch gleichzeitig die bereits angekündigte Charakterisierung von $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ liefert.

Definition 3.14.
Es sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ eine Σ-messbare Funktion. Wenn es eine Konstante $C \geq 0$ gibt, so dass $|f(t)| \leq C$ für fast alle[4] $t \in \Omega$ gilt, so heißt f **wesentlich beschränkt**. Das Infimum dieser Konstanten $C \geq 0$ heißt **wesentliches Supremum** von $|f|$ und wird so bezeichnet:

$$C := \operatorname*{ess-sup}_{t \in \Omega} |f(t)| = ||f||_{L_\infty}. \tag{3.13}$$

Wir schreiben für diesen Fall $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Dieser Raum heißt daher auch **Raum der wesentlich beschränkten Funktionen**.

Beispiel 3.15.

a) Konstante Funktionen, der Sinus, der Kosinus und (bspw.) auch die Gauß'sche Glockenkurve sind wesentlich beschränkt, also in $L_\infty(\mathbb{R})$.

b) Nichtkonstante Polynomfunktionen q, d.h. grad $q \geq 1$, sind nicht in $L_\infty(\mathbb{R}^n)$, da sie nicht wesentlich beschränkt sind.

c) Die Funktion f aus Beispiel 3.13 ist wesentlich beschränkt durch 0, also gilt $f \in L_\infty(\mathbb{R})$. Zusammenfassend gilt somit also $f \in L_p(\mathbb{R})$ für alle $1 \leq p \leq \infty$.

Nach dieser Charakterisierung von $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ beenden wir dieses Kapitel mit folgender

Bemerkung 3.16.
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ **beschränkt**. Dann gilt

$$q \leq p \Rightarrow L_p(\Omega) \subset L_q(\Omega). \tag{3.14}$$

Insbesondere ist also $L_\infty(\Omega) \subset L_p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.

[4] Also überall bis auf eine μ-Nullmenge.

4. Kompakte Räume und der Satz von Arzelà-Ascoli

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit kompakten Mengen. Zunächst charakterisieren wir verschiedene Kompaktheitsbegriffe auf metrischen Räumen und werden diesbezüglich einige einfache Folgerungen ziehen und beweisen. Im zweiten Teil dieses Kapitels arbeiten wir dann auf das Hauptresultat dieses Abschnitts hin: Den *Satz von Arzelà-Ascoli*.

Definition 4.1.
Ein metrischer Raum K heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge in K eine konvergente Teilfolge besitzt.

. . . .

Definition 4.2.
Ein metrischer Raum K heißt **überdeckungskompakt**, wenn für jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung existiert, genauer:
Sei $\mathfrak{U}$ ein System offener Mengen in K mit $K \subset \bigcup\limits_{U \in \mathfrak{U}} U$, so gilt $K \subset U_1 \cup \ldots \cup U_r$ für ein $r < \infty$ und $U_j \in \mathfrak{U}$ für alle $j \in \{1, \ldots, r\}$.

. . . .

Bemerkung 4.3.
In einem metrischen Raum sind diese Begriffe äquivalent.[5]

. . . .

Definition 4.4.
Es sei M ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **relativ kompakt**, falls $\overline{A}$ kompakt in M ist.
Beachte: Dieser Begriff hängt von der Wahl des Oberraums M ab, im Gegensatz zu z.B. „vollständig“ oder „kompakt“.

. . . .

Definition 4.5.
Es sei M ein metrischer Raum.

a) Für $\varepsilon > 0$ heißt $N \subset M$ ein **ε-Netz** von M, falls

$$M \subset \cup \{U_\varepsilon(a) \colon a \in N\} \tag{4.1}$$

gilt.

b) M heißt **präkompakt**, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz von M existiert.

. . . .

Nach diesen grundlegenden Definitionen folgen nun einige alternative Charakterisierungen und Beziehungen zwischen den verschiedenen Kompaktheitsbegriffen.

[5] Der Beweis ist eher topologischer Natur, daher wird hier auf ihn verzichtet.

Lemma 4.6.
Es sei K ein metrischer Raum und (x_n) eine Cauchyfolge in K. Wenn (x_n) eine konvergente Teilfolge $x_{n_j} \to x \in M$ hat, so gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 4. ■

. . . .

Lemma 4.7.
Es seien K und M metrische Räume, wobei K kompakt sei. Ferner sei $f : K \to M$ eine stetige Abbildung. Dann ist f gleichmäßig stetig und $f(K) \subset M$ ist kompakt. Ist f zusätzlich noch injektiv, so ist auch $f^{-1} : f(K) \to K$ stetig.

Beweis. Der Beweis dieser Aussage wird in der Regel in einer Analysis II-Vorlesung gegeben, weshalb wir hier auf ihn verzichten. Zu finden ist er in [Kaballo, 2011], in den Sätzen A.2.6 und A.2.7. ■

. . . .

Bemerkung 4.8.
Nach Lemma 4.6 ist ein kompakter Raum K vollständig, also in jedem Oberraum abgeschlossen. Ist $K \subset X$ und X ein normierter Raum, so ist K beschränkt und abgeschlossen (Satz von Heine-Borel). Die Umkehrung gilt im Allgemeinen **nicht**. Kompakte Mengen $K \subset \mathbb{R}$ besitzen Minimum und Maximum.

. . . .

Satz 4.9. Es sei M ein metrischer Raum. Dann gilt:
M ist kompakt. $\Leftrightarrow$ M ist präkompakt und vollständig.

Beweis. Im Video zu Kapitel 4. ■

. . . .

Folgerung 4.10.

a) Relativ kompakte Mengen sind präkompakt nach Satz 4.9.

b) Ist $A \subset M$ präkompakt, so auch $\overline{A}$ wegen Bemerkung 4.8. Somit sind in vollständigen Räumen die Begriffe „präkompakt“ und „relativ kompakt“ äquivalent.

. . . .

Wir werden ab jetzt konsequent auf die Formulierung und den Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli hinarbeiten. Dieser trifft eine Aussage über präkompakte Teilmengen des Raumes $C(K)$ aller stetigen Abbildungen auf einem kompakten metrischen Raum K. Hierzu müssen wir vorher den Begriff der *Gleichstetigkeit* einführen. Um dies zunächst zu motivieren, betrachten wir folgendes

Beispiel 4.11.
Wir betrachten in $M = C[0, 2\pi]$ die Funktionenfolge (f_n) mit

$$f_n(t) = \cos(2^n t). \tag{4.2}$$

Es gilt stets $||f_n|| := \sup_{t\in[0,2\pi]} |f(t)| = 1$.
Allerdings ist $f_n(2^{-n}\pi) = \cos\pi = -1$ und $f_m(2^{-n}\pi) = \cos(2^{m-n}\pi) = 1$ für $m > n$. Somit

folgt für die Norm der Differenz sofort $||f_n - f_m|| = 2 \neq 0$ für $m \neq n$. Somit hat (f_n) keine Cauchy-Teilfolge. Somit folgt aus Satz 4.9, dass die abgeschlossene Einheitskugel

$$B := \{f \in M \colon \ ||f|| = 1\} \tag{4.3}$$

nicht präkompakt, also erst recht nicht kompakt ist, was ebenfalls sofort aus Satz 4.9 folgt.
Es ist nun weiter

$$\left|\left|f_n'\right|\right| = ||-2^n \sin(2^n t)|| = 2^n. \tag{4.4}$$

Aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung erhalten wir hiermit $|f_n(t) - f_n(s)| \leq 2^n |t - s|$ für $t, s \in [0, 2\pi]$. Somit ist (f_n) gleichmäßig stetig, in Formeln

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t, s \in [0, 2\pi] \colon \ |t - s| < \delta \Rightarrow |f_n(t) - f_n(s)| < \varepsilon \tag{4.5}$$

mit $\delta = 2^{-n}\varepsilon$.
Nun ist aber gleichzeitig $f_n(0) = 1$ und $f_n(2^{-n}\pi) = -1$, d.h. f_n nimmt für jedes $n \in \mathbb{N}$ Maximum und Minimum an. Somit muss δ zwingend von der Form $\delta := \delta(n) \leq \frac{\pi}{2} 2^{-n}\varepsilon$ sein. Nun gilt $\delta(n) \to 0$ für $n \to \infty$, d.h. δ kann nicht unabhängig von n gewählt werden. Anders ausgedrückt:

Die Wahl von δ hängt von der Funktion $f_n \in \{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ ab!

....

Wir wollen nun Bedingungen herleiten, die das Auftreten dieses Phänomens unterdrücken.

Definition 4.12.
Es seien M, N metrische Räume und $\mathcal{H} \subset C(M, N)$. $\mathcal{H}$ heißt **gleichstetig**, falls folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t, s \in M \ \forall f \in \mathcal{H} \colon d(t, s) < \delta \Rightarrow d(f(t), f(s)) < \varepsilon. \tag{4.6}$$

....

Bemerkung 4.13.
$\mathcal{H} \subset C(M, N)$ ist also gleichstetig genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ das δ in (4.2) unabhängig von $f \in \mathcal{H}$ (und $t, s \in M$) wählbar ist.

....

Satz 4.14.
Es seien M, N metrische Räume und (f_n) eine Folge in $C(M, N)$. Ferner existiere $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(t)$ $=: f(t)$ punktweise auf M und die Menge $\mathcal{H} := \{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ sei gleichstetig. Dann ist $\mathcal{H} \cup \{f\}$ gleichstetig und es gilt $f \in C(M, N)$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 4. ∎

....

Beispiel 4.15.
Die Menge $\mathcal{H} := \{p_n(t) := t^n \colon n \in \mathbb{N}\} \subset C[0, 1]$ ist nicht gleichstetig, denn die Grenzfunktion $p(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t \neq 1 \\ 1 & : \quad t = 1 \end{cases}$ ist nicht stetig und somit folgt dies direkt aus Satz 4.14. Betrachten wir $\mathcal{H} \subset C[0, \gamma]$ für $0 < \gamma < 1$, so ist $\mathcal{H}$ in diesem Raum gleichstetig, da hier die Folge (p_n) gleichmäßig konvergent ist.

Lemma 4.16.
Es sei $\mathcal{H} \subset C^1[a, b]$ mit

$$||f'||_{\sup} \leq C \text{ für alle } f \in \mathcal{H} \text{ und ein } C > 0. \tag{4.7}$$

Dann ist $\mathcal{H}$ gleichstetig.

Beweis. Im Video zu Kapitel 4. ∎

Satz 4.17.
Es sei K ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{H} \subset C(K)$ präkompakt. Dann ist $\mathcal{H}$ gleichstetig.

Beweis. Im Video zu Kapitel 4. ∎

Satz 4.17 stellt eine Vorstufe des finalen Satzes von Arzelà-Ascoli dar. Die nun folgenden zwei Lemmata stellen Hilfsaussagen bereit, die im Beweis dieses Satzes verwendet werden.

Lemma 4.18.
Es sei A eine abzählbare Menge und (f_n) eine punktweise beschränkte Folge von Funktionen auf A, also:

$$\forall a \in A\colon (f_n(a)) \text{ ist beschränkt in } \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}. \tag{4.8}$$

Dann hat (f_n) eine punktweise konvergente Teilfolge.

Beweis. Im Video zu Kapitel 4. ∎

Lemma 4.19.
Es seien M, N metrische Räume und N sei zudem vollständig. Ferner sei (g_n) eine gleichstetige Folge in $C(M, N)$, welche auf einer dichten Menge $A \subset M$ punktweise konvergiert. Dann ist (g_n) auf ganz M punktweise konvergent und die Konvergenz ist gleichmäßig auf präkompakten Teilmengen von M.

Beweis. Im Video zu Kapitel 4. ∎

Um den Beweis des Satzes von Arzelà-Ascoli möglichst übersichtlich zu führen, benötigen wir nun zunächst noch folgende Begrifflichkeit.

Definition 4.20.
Ein metrischer Raum M heißt **separabel**, falls es in M eine abzählbare dichte Teilmenge gibt.

Beispiel 4.21.

a) $\mathbb{R}^n$ ist separabel, da $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ die obige Bedingung erfüllt.

b) Präkompakte metrische Räume M sind separabel, denn zu $\varepsilon = \frac{1}{j}$ gibt es ein endliches $\frac{1}{j}$-Netz A_j in M und $A := \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$ ist abzählbare dichte Teilmenge in M.

Theorem 4.22 (*Satz von Arzelà-Ascoli*).
Es sei K ein kompakter metrischer Raum und $\mathcal{H} \subset C(K)$. Dann gelten:

a) $\mathcal{H}$ ist präkompakt. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}$ ist beschränkt und gleichstetig.

b) $\mathcal{H}$ ist kompakt. $\Leftrightarrow$ $\mathcal{H}$ ist beschränkt, abgeschlossen und gleichstetig.

Beweis. Im Video zu Kapitel 4. ■

Wir schließen dieses Kapitel mit einem kurzen Satz zu separablen metrischen Räumen.

Satz 4.23.
Es sei M ein separabler metrischer Raum. Dann ist auch jede Teilmenge $N \subset M$ separabel.

Beweis. Im Video zu Kapitel 4. ■

5. Lineare Operatoren

In diesem Kapitel definieren wir den für die Funktionalanalysis elementaren Begriff des *linearen Operators* und betrachten die Stetigkeit solcher Operatoren. Aus diesen Betrachtung motivieren wir den Begriff der Operatornorm und betrachten die wichtige Klasse der *Dualräume*. Abschließend diskutieren wir die Eigenschaften des sogenannten *Diracfunktionals*.

Definition 5.1.
Es seien E, F Vektorräume über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und $T : E \to F$. T heißt **linear**, falls

(L1) $T(x+y) = T(x) + T(y) \;\forall x, y \in E$ und (5.1)

(L2) $T(\alpha x) = \alpha T(x) \;\forall x \in E, \alpha \in \mathbb{K}$ (5.2)

gelten. Ferner definieren wir den **Nullraum** bzw. **Kern von *T*** durch

$$N(T) := T^{-1}(\{0\}) = \{x \in E : T(x) = 0\} \tag{5.3}$$

und das **Bild von *T*** durch

$$R(T) := T(E) = \{T(x) : x \in E\}. \tag{5.4}$$

. . . .

(L1) und (L2) werden gelegentlich ersetzt durch

(L') $T(\alpha x + y) = \alpha T(x) + T(y) \;\forall x, y \in E, \alpha \in \mathbb{K}$. (5.5)

Dass diese Definition äquivalent sind, liegt auf der Hand.

Lemma 5.2.
Es seien E, F Vektorräume über $\mathbb{K}$ und $T : E \to F$ linear. Dann ist $N(T)$ ein Untervektorraum von E und $R(T)$ ein Untervektorraum von F.

Beweis.
Dies ist eine elementare Aussage aus der Linearen Algebra I. ■

. . . .

Definition 5.3.
Es seien E, F normierte Räume und $T : X \to Y$. Dann heißt T ein **Operator**. T heißt **linearer Operator**, falls T Bedingung (5.5) erfüllt.

. . . .

Wir schreiben bei einem Operator anstatt $T(x)$ jetzt einfach Tx.

Satz 5.4.
Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator. Dann sind äquivalent:

a) $\exists C \geq 0 \ \forall x \in X\colon \ ||Tx|| \leq C\,||x||$

b) T ist gleichmäßig stetig auf X.

c) T ist stetig in einem Punkt $a \in X$.

d) Es gilt $||T|| := \sup\limits_{||x|| \leq 1} ||Tx|| < \infty$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 5. ■

Folgerung 5.5.
Ein linearer Operator $T : X \to Y$ ist stetig genau dann, wenn die Einheitskugel $B := B_X = \{x \in X\colon \ ||x|| = 1\}$ von X unter T in eine beschränkte Teilmenge von Y abgebildet wird. Äquivalent dazu ist:
T bildet beschränkte Teilmengen von X auf beschränkte Teilmengen von Y ab.

Man nennt daher lineare Operatoren auch **beschränkte Operatoren**.

Bemerkung 5.6.
Das in Satz 5.4 d) definierte Supremum $||T||$ ist die minimal mögliche Konstante in 5.4 a) (was sofort aus dem Beweis folgt). Hierdurch wird eine Norm auf dem Vektorraum

$$\mathcal{L}(X,Y) := \{T : X \to Y : T \text{ linear und stetig}\} \tag{5.6}$$

definiert. Statt $\mathcal{L}(X,X)$ schreiben wir auch einfach $\mathcal{L}(X)$.

Definition 5.7.
Es seien X, Y normierte Räume und $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

a) $||T||$ heißt **Operatornorm von T**.

b) Der Raum $X' := \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ heißt **Dualraum von X**.

c) Ein $f \in X'$ heißt **stetiges lineares Funktional**.

Lemma 5.8.
Es seien X, Y, Z normierte Räume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Dann ist $ST \in \mathcal{L}(X,Z)$ und es gilt $||ST|| \leq ||S|| \cdot ||T||$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 5. ■

Satz 5.9.
Es seien X, Y normierte Räume.

a) Wenn Y vollständig ist, so ist auch $\mathcal{L}(X,Y)$ vollständig.

b) X' ist ein Banachraum.

Beweis. Im Video zu Kapitel 5. ■

Satz 5.10.
Es seien X, Y normierte Räume und $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt:
$\mathcal{H}$ ist gleichstetig. $\Leftrightarrow C := \sup \{||T|| : T \in \mathcal{H}\} < \infty$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 5. ∎

Satz 5.11.
Es seien X, Y normierte Räume und Y vollständig. Weiter sei (T_n) eine Folge in $\mathcal{L}(X, Y)$ mit $C := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| < \infty$, die auf einer dichten Menge $A \subset X$ punktweise konvergiert.
Dann existiert $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ für alle $x \in X$, es gilt $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $||T|| \leq C$ und die Konvergenz ist gleichmäßig auf präkompakten Teilmengen.

Beweis. Im Video zu Kapitel 5. ∎

Beispiel 5.12.
Es sei K ein kompakter metrischer Raum. Für $a \in K$ definieren wir das **Diracfunktional** $\delta_a \in C(K)' = \mathcal{L}(C(K), \mathbb{K})$ durch

$$\delta_a(f) = \delta_a f := f(a), \;\; f \in C(K). \tag{5.7}$$

Es gilt nun $|\delta_a f| = |f(a)| \leq \sup\limits_{x\in K} |f(x)| = ||f||_{\text{sup}}$.
Für die konstante Funktion $f : t \mapsto 1$ gilt $||f||_{\text{sup}} = 1$ und $|\delta_a f| = 1$ und somit folgt

$$||\delta_a|| = \sup_{f\in E_K} |\delta_a f| = 1 \text{ mit } E_K := \left\{ f \in C(K) \colon \; ||f||_{\text{sup}} = 1 \right\}$$

Wir betrachten nun noch $L := \sum\limits_{j=1}^{r} c_j \delta_{a_j} \in C(K)'$, $a_j \in K$, $c_j \in \mathbb{K}$, $r \in \mathbb{N}$. Es folgt sofort $||L|| \leq \sum\limits_{j=1}^{r} |c_j|$.
Wähle nun $f \in C(K)$ mit $||f|| = 1$ und $c_j f(a_j) = |c_j|$ für $j = 1, \dots, r$ (im Reellen also $f(a_j) = \pm 1$), so ist $L(f) = \sum\limits_{j=1}^{r} |c_j|$. Also folgt insgesamt

$$||L|| = \sum_{j=1}^{r} |c_j| \,. \tag{5.8}$$

6. Tensorprodukte und Approximation

Nun betrachten wir im ersten Abschnitt dieses Kapitels *stetige Zerlegungen der Eins* und darauf aufbauen *Tensorprodukte* – mit dem Ziel, in Kapitel 7 spezielle Funktionenräume untersuchen zu können. Zudem behandeln wir in Satz 6.8 einen Approximationssatz und abschließend in Satz 6.9 eine interessante Aussage zur Separabilität von Funktionenräumen.

Definition 6.1.
Es sei M ein metrischer Raum, Y ein normierter Raum und $f : M \to Y$. Dann heißt

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{t \in M \colon f(t) \neq 0\}} \tag{6.1}$$

Träger der Funktion f.

Definition 6.2.
Hinweis: Die mit $(*)$ gekennzeichneten Aussagen bedürfen eines kurzen Beweises, siehe dazu die Videos zu diesem Kapitel.
Ein metrischer Raum M werde durch offene Kugeln $\left\{U_j = U_{r_j}(s_j)\right\}_{j=1,\dots,n}$ überdeckt. Für die auf M stetigen Funktionen

$$\gamma_j : t \mapsto \begin{cases} 1 - \frac{1}{r_j} d(s_j, t) & : \quad d(s_j, t) < r_j \\ 0 & : \quad d(s_j, t) \geq r_j \end{cases}$$

gilt $\operatorname{supp} \gamma_j \subset B_j = B_{r_j}(s_j)^{(*)}$ und $\gamma(t) := \sum\limits_{j=1}^{m} \gamma_j(t) > 0$ auf $M^{(*)}$. Für $\alpha_j := \frac{\gamma_j}{\gamma} \in C(M)^{(*)}$ hat man

$$0 \leq \alpha_j \leq 1^{(*)}, \ \operatorname{supp} \alpha_j \subset B_j^{(*)} \text{ und } \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1^{(*)}. \tag{6.2}$$

$\{\alpha_j\}_{j=1}^m$ heißt eine der **Überdeckung $\{U_j\}_{j=1}^m$ von M untergeordnete stetige Zerlegung der Eins auf M**. Wir schreiben hierfür auch *ZdE*.

Definition 6.3.
Es sei M eine Menge und E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Dann bezeichnet $\mathcal{F}(M, E)$ den Raum aller Funktionen von M nach E. Insbesondere setzen wir $\mathcal{F}(M) := \mathcal{F}(M, E)$.

Definition 6.4.
Es sei M eine Menge, E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}(M, \mathbb{K})$ und $A \subset E$. Dann definieren wir das *Tensorprodukt* von $\mathcal{H}$ und A durch

$$\mathcal{H} \otimes A := \left\{ \sum_{k=1}^{n} \Phi_k y_k \colon n \in \mathbb{N}, \Phi_k \in \mathcal{H}, y_k \in A \right\} \subset \mathcal{F}(M, E). \tag{6.3}$$

In Worten ist dies also die Menge aller „Linearkombinationen" von Elementen in A und Funktionen in $\mathcal{H}$.

Definition 6.5.
Für eine Menge M und einen $\mathbb{K}$-Vektorraum E bezeichnen wir $\mathcal{F}(M) \otimes E$ als **Raum der E-wertigen Funktionen auf M**.

Lemma 6.6.
Elemente aus $\mathcal{F}(M) \otimes E$ haben endlichdimensionales Bild, also $\dim R(f) < \infty$ für alle $f \in \mathcal{F}(M) \otimes E$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 6. ■

Definition 6.7.
Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V \subset E$. Die **konvexe Hülle** von V wird definiert durch

$$co(V) = \bigcap_{A \supset V} \{A \subset E \text{ konvex}\} = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \colon n \in \mathbb{N}, x_j \in E, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0 \right\}. \tag{6.4}$$

Elemente aus der letzten Menge heißen auch **endliche Konvexkombinationen**.

Satz 6.8 (*Approximationssatz*).
Es sei K ein kompakter metrischer Raum, Y ein normierter Raum und $f \in C(K, Y)$.
Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $g \in C(K) \otimes Y$ mit

1) $g(K) \subset co(f(K))$

2) $||f - g||_{\sup} \leq \varepsilon$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 6. ■

Satz 6.9.
Es sei K ein kompakter metrischer Raum und Y ein separabler normierter Raum. Dann ist auch $C(K, Y)$ separabel.

Beweis. Im Video zu Kapitel 6. ■

7. Spezielle Funktionenräume

Als Anwendung des vorigen Kapitels werden wir nun spezielle Klassen von Funktionen zu Räumen zusammenfassen und einige Eigenschaften diskutieren. Den Anfang machen wir mit Räumen stetiger Funktionen mit kompaktem Träger.

Definition 7.1.
Für $M \subset \mathbb{R}^n$ definieren wir

$$C_C(M) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) \colon \operatorname{supp} f \subset M \text{ ist kompakt}\}. \tag{7.1}$$

Satz 7.2.
Der Raum $C_C(\mathbb{R}^n)$ ist dicht in $L_p(\mathbb{R}^n, \lambda)$ für $1 \leq p < \infty$.

Beweis. Der Beweis dieses Satzes fußt auf einigen maßtheoretischen Aussagen und soll daher an dieser Stelle übersprungen werden. Zu finden ist er bspw. in [Kaballo, 2011] am Ende von Anhang A.3.3. ∎

Satz 7.3.
Für $1 \leq p < \infty$ und jede messbare Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist $L_p(\Omega, \lambda)$ separabel.

Beweis. Im Video zu Kapitel 7. ∎

Lemma 7.4.
Der Raum ℓ_∞ aller beschränkten Folgen von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{K}$ ($\rightarrow$ (3.2)) ist nicht separabel.

Beweis. Im Video zu Kapitel 7. ∎

Räume Hölder-stetiger Funktionen.

Definition 7.5.
Es sei K ein kompakter metrischer Raum, $0 < \alpha \leq 1$ und $f : K \to \mathbb{K}$. Dann heißt f **Hölder-stetig zum Exponenten $\boldsymbol{\alpha}$**, falls es ein $C > 0$ gibt, sodass

$$|f(t) - f(s)| \leq C d(t,s)^\alpha \; \forall t, s \in K \tag{7.2}$$

gilt. Der Raum all dieser Funktionen wird mit

$$\Lambda^\alpha(K) := \left\{ f : K \to \mathbb{K} \colon [f]_\alpha := \sup_{t \neq s} \frac{|f(t) - f(s)|}{d(t,s)^\alpha} < \infty \right\} \tag{7.3}$$

bezeichnet. Gilt Bedingung (7.2) für $\alpha = 1$, so nennt man f **Lipschitz-stetig**.

Lemma 7.6.
Für $0 < \alpha < 1$ ist

$$\lambda^\alpha(K) := \left\{ f \in \Lambda^\alpha(K) \colon \lim_{d(s,t)\to 0} \frac{|f(t) - f(s)|}{d(s,t)^\alpha} = 0 \right\} \tag{7.4}$$

ein abgeschlossener Unterraum. Man sagt, Elemente in λ^α erfüllen eine sogenannte *o-Hölder-Bedingung*.

Beweis. Im Video zu Kapitel 7. ■

Satz 7.7.
Für $0 < \alpha \leq 1$ ist eine in $\Lambda^\alpha(K)$ beschränkte Funktionenmenge $\mathcal{H}$ relativ kompakt in $C(K)$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 7. ■

Räume differenzierbarer Funktionen.

Satz 7.8.
$C^1[a,b]$ ist im Banachraum $\left(C[a,b], ||\cdot||_{\sup}\right)$ nicht abgeschlossen.

Beweis. Im Video zu Kapitel 7. ■

Satz 7.9.
Unter der Norm $||f||_{C^1} := ||f||_{\sup} + ||f'||_{\sup}$ ist $C^1[a,b]$ ein Banachraum.

Beweis. Im Video zu Kapitel 7. ■

Zum Abschluss dieses Kapitels geben wir noch Inklusionszusammenhänge zwischen den betrachteten Räumen an, verzichten jedoch auf den (länglichen) Beweis und skizzieren diesen stattdessen nur grob.

Satz 7.10.
Für $0 < \alpha < \beta < 1$ gelten die Inklusionen

$$C^1[a,b] \subset \Lambda^1[a,b] \subset \Lambda^\beta[a,b] \subset \lambda^\alpha[a,b] \subset \Lambda^\alpha[a,b] \subset C[a,b] \tag{7.5}$$

und die Normabschätzungen

$$||f||_{\sup} \leq ||f||_{\Lambda^\alpha} \leq ||f||_{\Lambda^\beta} \leq ||f||_{\Lambda^1} \leq ||f||_{C^1}\,. \tag{7.6}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 7 (**Skizze**). ■

Als Anwendung dieser bisherigen Ergebnisse lernen wir nun noch ein weiteres Funktional kennen, ein sogenanntes *Integralfunktional*. Zur Vorbereitung betrachten wir

Folgerung 7.11.
Für $1 \leq p < \infty$ ist $C(K)$ dicht in $L_p(K)$, d.h.

$$\overline{C(K)} = L_p(K). \tag{7.7}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 7. ■

. . . .

Beispiel 7.12.
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $g \in L_1(K)$. Wir definieren

$$J(g)(f) := \int\limits_K f(t)g(t) \ \mathrm{d}t, \ \ f \in C(K). \tag{7.8}$$

Dann ist $J(g)$ ein stetiges lineares Funktional, also $J(g) \in C(K)'$, und es gilt

$$||J(g)|| = \int\limits_K |g(t)| \ \mathrm{d}t = ||g||_{L_1}. \tag{7.9}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 7. ■

. . . .

8. Isomorphien und Fortsetzungen

In diesem Kapitel lernen wir den für die folgenden Themen wichtigen Begriff der *Isomorphie* kennen und werden mit ihm ein Fortsetzungsprinzip für stetige lineare Abbildungen beweisen.

Definition 8.1.
Es seien X, Y zwei normierte und M, N zwei metrische Räume.

a) X und Y heißen **isometrisch isomorph**, in Zeichen $X \overset{\sim}{=} Y$, falls es eine **Isometrie** zwischen ihnen gibt, also eine bijektive lineare Abbildung $T : X \to Y$ mit

$$||Tx|| = ||x|| \;\; \forall x \in X. \tag{8.1}$$

b) M und N heißen **homöomorph**, falls es eine **Homöomorphie** zwischen ihnen gibt, also eine bijektive Abbildung $f : M \to N$, sodass f und f^{-1} stetig sind.

c) X und Y heißen **isomorph**, falls es eine lineare Homöomorphie von X auf Y gibt.

d) Eine lineare Abbildung $T : X \to Y$, die nicht notwendigerweise surjektiv sein muss, heißt **Isomorphie/Isometrie von X in Y**, wenn $T : X \to R(T)$ eine Isomorphie/Isometrie von X auf das Bild von X unter T ist.

. . . .

Beispiel 8.2.
Die Abbildung

$$J : C(K) \to \mathbb{R}, \;\; J(g)(f) := \int\limits_K f(t)g(t) \text{ dt} \tag{8.2}$$

aus Beispiel 7.12 ist eine Isometrie von $L_1(K)$ in $C(K)'$ als Abbildung von g. Sie ist insbesondere nicht surjektiv.

Beweis. Im Video zu Kapitel 8. ■

. . . .

Definition 8.3.
Es seien X, Y normierte Räume, $V \subseteq X$ ein Unterraum und $f : V \to Y$ stetig. Eine Funktion $F : X \to Y$ heißt **stetige Fortsetzung** von f auf X, falls F stetig ist und $F\,|_V = f$ gilt, bzw. äquivalent

$$F(x) = f(x) \;\forall x \in V. \tag{8.3}$$

. . . .

Wir werden nun mittels dieses Begriffs ein Fortsetzungsprinzip kennen lernen, mit welchem wir im nächsten Kapitel noch einmal Integrale konstruieren werden, ähnlich wie in Anhang A beschrieben.

Satz 8.4.
Es sei X ein normierter Raum, Y ein Banachraum, $V \subseteq X$ ein Unterraum und $T : V \to Y$ stetig und linear.
Dann existiert *genau eine* stetige Fortsetzung $\overline{T} : \overline{V} \to Y$ von T, diese ist linear und es gilt $||\overline{T}|| = ||T||$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 8. ■

. . . .

Beispiel 8.5.
Es sei $(a, b) \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Wir betrachten eine auf (a, b) stetige, lineare Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$. Dann sind die Voraussetzungen von Satz 8.4 erfüllt und daher gibt es genau eine stetige Fortsetzung $\overline{f} : \overline{(a, b)} = [a, b] \to \mathbb{R}$ von f, welche ebenfalls linear und normgleich ist.
Formelmäßig erhält man diese durch

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \downarrow a} f(x) & : \quad x = a \\ f(x) & : \quad x \in (a, b) \\ \lim\limits_{x \uparrow b} f(x) & : \quad x = b \end{cases} \tag{8.4}$$

Wir schließen dieses (kurze) Kapitel mit folgender

Bemerkung 8.6.

a) Satz 8.4 gilt auch für *halbnormierte* Räume, also solche, die nur mit einer Halbnorm ausgestattet sind.

b) Für V als $\mathbb{K}$-Vektorraum mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ verstehen wir unter einer **Halbnorm** $p : V \to \mathbb{R}_0^+$ eine Abbildung, die folgende Eigenschaften besitzt:

   (H1) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$

   (H2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$

   Wie man sieht, handelt es sich prinzipiell um die Normaxiome, wir verzichten allerdings auf die positive Definitheit.

c) Aufgrund der Eigenschaften (H1) und (H2) ist die Menge

$$Z := \{x \in V : p(x) = 0\} \tag{8.5}$$

   ein Untervektorraum von V. Durch $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in Z$ wird dann eine Äquivalenzrelation definiert und die Menge der Restklassen $\tilde{V}$ ist zusammen mit p ein normierter Raum. Dieser Vorgang ist analog zur Konstruktion der L_p-Räume in Definition 3.9.

d) Für $x \in X$ definieren wir auf $\mathcal{L}(X, Y)'$ die Abbildung $p_x(T) := ||Tx||$. Dann ist p eine Halbnorm und es gilt $p_x(T) = 0$ genau dann, wenn $x \in N(T)$.

. . . .

9. Integralkonstruktion durch Fortsetzung

In diesem Kapitel werden wir das Fortsetzungsprinzip aus Satz 8.4 nutzen, um Integrale auf der Menge einfacher Funktionen auf eine größere Klasse von Funktionen fortzusetzen. Auf diesem Wege erhalten wir nochmals eine Charakterisierung des Lebesgue-Maßes, benutzen dabei allerdings einige algebraische Ideen, die wir nun vorstellen werden.

Definition 9.1.
Es sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}$ ein Teilmengensystem von Ω.

a) $\mathfrak{P}$ heißt **Prä-Ring**, falls für $A, B \in \mathfrak{P}$ die Differenzmenge $A \setminus B$ endliche disjunkte Vereinigung von Mengen in $\mathfrak{P}$ ist.

b) Das System aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Mengen aus $\mathfrak{P}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{R}(\mathfrak{P})$.

. . . .

Definition 9.2.
Wir sagen, ein System $\mathfrak{P}$ über einer Menge Ω **besitzt die Zerlegungseigenschaft**, wenn $\emptyset \in \mathfrak{P}$ gilt und zu Mengen $A_1, \ldots, A_r \in \mathfrak{P}$ disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_s \in \mathfrak{P}$ existieren, so dass jedes A_j die (disjunkte) Vereinigung gewisser Mengen C_k ist.

. . . .

Definition 9.3.
Das System $\mathcal{R}(\mathfrak{P})$ wie in Definition 9.1 b) heißt **Ring von Mengen**, falls für $A, B \in \mathcal{R}(\mathfrak{P})$ auch $A \cap B, A \cup B$ und $A \setminus B$ in $\mathcal{R}(\mathfrak{P})$ liegen.

. . . .

Lemma 9.4.
Es sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}$ ein System von Teilmengen über Ω. Dann sind äquivalent:

a) $\mathfrak{P}$ ist ein Prä-Ring.

b) $\mathcal{R}(\mathfrak{P})$ ist Ring von Mengen in Ω.

c) $\mathfrak{P}$ besitzt die Zerlegungseigenschaft.

Beweis. Im Video zu Kapitel 9. ■

. . . .

Mit dieser begrifflichen Vorarbeit schlagen wir jetzt den Bogen zum Messen von Mengen mittels sogenannter Inhalte.

Definition 9.5.
Es sei $\mathfrak{P}$ ein Prä-Ring auf einer Menge Ω. Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{P} \to [0, \infty)$ heißt **Inhalt** auf $\mathfrak{P}$, wenn sie *additiv* ist, d.h. wenn für disjunkte Mengen $A_1, \ldots, A_r \in \mathfrak{P}$ und $A := \bigcup_{k=1}^{r} A_k \in \mathfrak{P}$ gilt:

$$\mu(A) = \sum_{k=1}^{r} \mu(A_k). \tag{9.1}$$

Bevor wir nun in der Entfaltung der theoretischen Ergebnisse fortfahren, notieren wir kurz einige wichtige Bemerkungen und geben für die bisher entwickelten Begriffe einfache Beispiele.

Bemerkung 9.6.

a) Ein Inhalt im Sinne obiger Definition nimmt stets nur *endliche* Werte an.

b) Für ein Maß auf einer σ-Algebra Σ erhält man einen Inhalt durch die Einschränkung auf den Ring

$$\Sigma_\mu := \{A \in \Sigma \colon \mu(A) < \infty\} \subseteq \Sigma. \tag{9.2}$$

Dabei gilt Gleichheit nur im Fall $\mu(\Omega) < \infty$.

Beispiel 9.7.

a) Das System $\mathfrak{Q}$ aller beschränkten Quader in $\mathbb{R}^n$ ist ein Prä-Ring und für das „anschauliche Volumen“ $\lambda : \mathfrak{Q} \to [0, \infty)$ gilt

$$\lambda(q) = \prod_{j=1}^{n} \underbrace{|I_j|}_{j\text{-te Seitenlänge}} \in [0, \infty) \tag{9.3}$$

b) Für zwei Maßräume $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ wie in Definition A.2 ist

$$\mathfrak{P} := \{A_1 \times A_2 \colon A_1 \in \Sigma_1,\ \mu_1(A_1) < \infty,\ A_2 \in \Sigma_2,\ \mu_2(A_2) < \infty\} \tag{9.4}$$

ein Prä-Ring und durch

$$\mu(A_1 \times A_2) := \mu_1(A_1) \cdot \mu_2(A_2),\ A_j \in \Sigma_j, j = 1, 2, \tag{9.5}$$

wird dein Inhalt $\mu : \mathfrak{P} \to [0, \infty)$ definiert.

Wir kommen nun zur Definition von elementaren Integralen.

Definition 9.8.
Es sei Ω eine Menge und $\mathfrak{P}$ ein Prä-Ring auf Ω.

a) Der Raum der **Treppenfunktionen** auf Ω bezüglich $\mathfrak{P}$ ist definiert als

$$\mathcal{T} := \mathcal{T}(\Omega, \mathfrak{P}) = [\chi_A \colon A \in \mathfrak{P}], \tag{9.6}$$

wobei $[\dots]$ den Spann der enthaltenen Funktionen und χ_A die charakteristische Funktion der Menge A (vgl. Definition A.3) kennzeichnen.

b) Für $\Phi = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{A_j}$ mit $A_j \in \mathfrak{P}$ ist das **elementare Integral** definiert durch

$$I_\mu(\Phi) := \int_\Omega \Phi \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mu(A_j) \in \mathbb{K}. \tag{9.7}$$

Folgerung 9.9.

a) Für $\Phi \in \mathcal{T}$ folgt sofort $|\Phi| \in \mathcal{T}$.

b) $I_\mu(\Phi)$ wie in (9.7) ist aufgrund der Zerlegungseigenschaft 9.2 des Prä-Ringes $\mathfrak{P}$ wohldefiniert.

c) I_μ ist eine positive Linearform der Gestalt

$$I := I_\mu : \mathcal{T}(\Omega, \mathfrak{P}) \to \mathbb{K} \tag{9.8}$$

mit $|I(\Phi)| \leq I(|\Phi|)$ für $\Phi \in \mathcal{T}(\Omega, \mathfrak{P})$.

d) Für $M \subset \Omega$ gilt: $\chi_M \in \mathcal{T} \Leftrightarrow M \in \mathcal{R}(\mathfrak{P})$.
Daraus folgt unmittelbar:
Durch

$$\mu_R(M) := \int\limits_\Omega \chi_M \, \mathrm{d}\mu \tag{9.9}$$

wird μ zu einem Inhalt auf $\mathcal{R}(\mathfrak{P})$ fortgesetzt. Wir schreiben daher auch $\mathcal{T} := \mathcal{T}(\Omega, \mathcal{R}(\mathfrak{P}))$.

Beweis.
Ergibt sich unmittelbar aus den Definitionen. ■

Definition 9.10.
Es sei Ω eine Menge und $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Die Menge

$$\mathrm{tr}(f) := \{t \in \Omega \colon f(t) \neq 0\} \tag{9.10}$$

heißt **Träger** von f.

Bemerkung 9.11.
Im Falle eines metrischen Raums M gilt

$$\overline{\mathrm{tr}(f)} = \mathrm{supp}(f) \tag{9.11}$$

wie in Definition 6.1, wobei der Abschluss in M gebildet wird.

Wir werden nun Satz 8.4 dazu benutzen, um das elementare Integral wie oben definiert auf einen größeren und *vollständigen* Funktionenraum $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{P}, \mu)$ fortzusetzen. Dazu müssen wir allerdings eine geeignete Halbnorm wählen, welche wir nun entwickeln.

Definition 9.12.
Für eine Menge $\mathcal{F}$ von $\mathbb{C}$-wertigen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{F}^+$ die Menge der Funktionen in $\mathcal{F}$ mit Werten in $[0, \infty)$.

Definition 9.13.

a) Eine Reihe positiver Treppenfunktionen $\Phi_k \in \mathcal{T}^+$ der Form $\sum \Phi_k$ heißt **μ-Majorante** für $f : \Omega \to \mathbb{C}$, falls

$$\sum_{k=1}^{\infty} I(\Phi_k) < \infty \ \underline{\text{und}} \ |f(t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t) \tag{9.12}$$

für alle $t \in \Omega$ gilt, für die die Reihe konvergiert.

b) Die Zahl $\sum\limits_{k=1}^{\infty} I(\Phi_k) \geq 0$ heißt **μ-Obersumme von f**.

c) Wir schreiben $\mathcal{L} := \mathcal{L}(\Omega, \mathfrak{P}, \mu)$ für die Menge aller Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$, für die eine μ-Majorante existiert.

....

Lemma 9.14.
Für $f \in \mathcal{L}$ definiert

$$||f||_\mu := \int_\Omega^* |f(t)| \ \mathrm{d}\mu := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} I_\mu(\Phi_k) \colon \ \sum \Phi_k \text{ ist } \mu\text{-Majorante von } f \right\} \tag{9.13}$$

eine Halbnorm, die sogenannte **μ-Halbnorm**.

....

Folgerung 9.15.

a) Für $f : \Omega \to \mathbb{C}$ gilt:
$f \in \mathcal{L} \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}$.
In diesem Fall gilt $||f||_\mu = |||f|||_\mu$.

b) $\mathcal{L}$ ist ein Vektorraum, auf dem durch (9.13) eine Halbnorm definiert wird.

....

Um nun Satz 8.4 auf dieses Integral anzuwenden, benötigen wir einen vorbereitenden Satz, den wir hier allerdings nicht beweisen werden. Ein Beweis kann in [Kaballo, 2011], Satz A.3.2 gefunden werden.

Satz 9.16.
Für einen Inhalt μ auf einem Prä-Ring $\mathfrak{P}$ in einer Menge Ω sind äquivalent:

a) μ ist σ-additiv auf $\mathfrak{P}$.

b) μ_R wie in (9.9) ist σ-additiv auf dem Ring $\mathcal{R}(\mathfrak{P})$.

c) Für jede Folge (M_n) in $\mathcal{R}(\mathfrak{P})$ mit $M_{n+1} \subseteq M_n$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} M_n = \emptyset$ gilt $\mu_R(M_n) \to 0$.

d) Für jede monoton fallende, punktweise gegen 0 konvergente Folge $\Phi_n \downarrow 0$ in $\mathcal{T}$ gilt $I_\mu(\Phi_n) \to 0$.

e) Es gilt $|I_\mu(\Phi)| \leq ||\Phi||_\mu$ für alle $\Phi \in \mathcal{T}$.

f) Es gilt

$$|I_\mu(\Phi)| \leq I_\mu(|\Phi|) = ||\Phi||_\mu \;\; \forall \Phi \in \mathcal{T}. \tag{9.14}$$

....

Bemerkung 9.17.
Für das anschauliche Volumen (9.3) von Quadern auf $\mathfrak{Q}$ sind die Aussagen aus Satz 9.16 erfüllt.

....

Wir beenden nun dieses Kapitel mit der
Konstruktion integrierbarer Funktionen.
Es sei hierzu μ ein Inhalt auf einem Prä-Ring $\mathfrak{P}$ mit der Eigenschaft (9.14). Wir definieren

$$\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{P}, \mu) := \overline{\mathcal{T}(\Omega, \mathcal{P}, \mu)}, \tag{9.15}$$

wobei der Abschluss im Raum $\left(\mathcal{L}(\Omega, \mathfrak{P}, \mu), ||\cdot||_\mu\right)$ gebildet wird.[6]
Eine Funktion $f \in \mathcal{L}$ gehört genau dann zu $\mathcal{L}_1$, wenn es eine Folge (ψ_j) in $\mathcal{T}$ gibt, sodass gilt:

$$||f - \psi_j||_\mu \to 0 \;(j \to \infty). \tag{9.16}$$

Nun wenden wir Satz 8.4 an:
Das Integral I_μ besitzt hiernach eine eindeutig bestimmte stetige lineare Fortsetzung

$$\overline{I_\mu} : \mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{P}, \mu) \to \mathbb{C} \tag{9.17}$$

mit $\left|\left|\overline{I_\mu}\right|\right| = 1$. (Beachte: Hier steht die Operatornorm.)
Wir schreiben nun

$$\int\limits_\Omega f \;\mathrm{d}\mu := \int\limits_\Omega f(t) \;\mathrm{d}\mu(t) := \overline{I_\mu}(f) \tag{9.18}$$

für $f \in \mathcal{L}_1$.
Gilt $f \in \mathcal{L}_1$, so folgt sofort $|f| \in \mathcal{L}_1$ und wegen der Voraussetzung (9.14) gilt ferner

$$\int\limits_\Omega |f(t)| \;\mathrm{d}\mu(t) = \int_\Omega^* |f(t)| \;\mathrm{d}\mu(t) = ||f||_\mu \tag{9.19}$$

für $f \in \mathcal{L}_1$.[7]

[6] An dieser Stelle geht implizit schon sehr viel der geleisteten Vorarbeit ein. Dass der Abschluss gerade in diesem (*halbnormierten*) Raum gebildet wird, rechtfertigt im Nachhinein die Definition der passenden Halbnorm, für die Halbnorm musste der Theorieteil zu Treppenfunktionen entwickelt werden (inklusive der Vorleistung über Prä-Ringe) und die Voraussetzung an den Prä-Ring benutzt Satz 9.16. Trotz dieser auf den ersten Blick banalen Schlussfolgerungen in diesem Kapitel wurde also die gesamte vorher entwickelte Theorie benötigt!

[7] Man könnte an dieser Stelle noch weiter machen und einen Zusammenhang von $\mathcal{L}_1$ zu der Menge $\mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$ der messbaren Mengen auf einer σ-Algebra Σ auf einer beliebigen Menge Ω suchen. In der Tat findet man einen solchen, es gilt nämlich $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathfrak{P}, \mu) = \mathcal{L}(\Omega, \mathfrak{P}, \mu) \cap \mathcal{M}(\Omega, \Sigma)$, vgl. [Kaballo, 2011], Satz A.3.12.

Beispiel 9.18.
Das Integral $\overline{I_\lambda} : \mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{Q}, \lambda) \to \mathbb{C}$ auf $\mathbb{R}^n$ heißt **Lebesgue-Integral**.[8]

[8] Hier findet sich also nun als „krönender" Abschluss die angekündigte alternative Charakterisierung des Lebesgue-Maßes.

10. Spezialfall endlichdimensionaler Räume

Nach dem Einschub zur Integralkonstruktion mittels Fortsetzung im letzten Kapitel ziehen wir uns nun kurz auf den Fall endlichdimensionaler Räume zurück. Wir werden zeigen, dass auf $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind und daraus eine weitreichende Folgerung ziehen: *Lineare Operatoren zwischen endlichdimensionalen Räumen sind immer stetig.*

Erinnerung.
Wir setzen $\ell_p^n = \left(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_p\right)$ mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ und

$$||x||_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{1/p}, \quad x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n. \tag{10.1}$$

Satz 10.1.
Alle Normen auf $\mathbb{K}^n$ sind äquivalent, d.h. für zwei Normen $||\cdot||$ und $||\cdot||'$ auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum gilt

$$\exists c, C > 0 \ \forall x \in \mathbb{K}^n \colon c\,||x|| \leq ||x||' \leq C\,||x||\,. \tag{10.2}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 10. ■

. . . .

Satz 10.2.
Es sei V ein normierter Raum mit $\dim V = n < \infty$. Dann gilt:

1) $V \overset{\sim}{=} \ell_1^n$

2) V ist vollständig.

Beweis. Im Video zu Kapitel 10. ■

. . . .

Satz 10.3.
Es sei X ein normierter Raum und die Einheitskugel B_X sei präkompakt. Dann gilt $\dim X < \infty$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 10. ■

. . . .

Als kleine Anwendung dieser Erkenntnis betrachten wir nun die Existenz von sogenannten *Bestapproximationen*.

Satz 10.4.
Es sei X ein normierter Raum, $V \subseteq X$ ein Unterraum mit $\dim V < \infty$ und $x \in X$.
Dann existiert ein $v_0 \in V$ mit

$$||x - v_0|| =: d_V(x) := \inf\{||x - v|| : v \in V\}\,. \tag{10.3}$$

v_0 heißt **Bestapproximation** von x in V.

Beweis. Im Video zu Kapitel 10. ■

....

Als Abschluss für dieses Kapitel werden wir nun den Grund kennenlernen, warum endlichdimensionale Räume im Sinne der Funktionalanalysis trivial sind.

Satz 10.5. Jede lineare Abbildung von einem endlichdimensionalen normierten Raum in einen normierten Raum Y ist stetig.

Beweis. Im Video zu Kapitel 10. ■

....-

11. Lineare Integral- und Differentialoperatoren

In diesem Kapitel wollen wir nun *lineare* Integraloperatoren genauer betrachten und insbesondere wichtige Normabschätzungen herleiten. Dazu betrachten wir geeignet gewählte Normen und wenden explizit bereits bewiesene Sätze an, insbesondere den Satz von Arzelá-Ascoli. Abschließend werden wir sehen, warum die Untersuchung von Differentialoperatoren auf ähnliche Weise nicht oder nur sehr eingeschränkt möglich ist.

Definition 11.1.
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\kappa \in C(K^2)$. Wir definieren für $t \in K$

$$S := S_\kappa : f \mapsto (Sf)(t) := \int\limits_K \kappa(t,s) f(s) \, \mathrm{d}s. \tag{11.1}$$

Dann heißt S **linearer Integraloperator** und κ ein **stetiger Kern**.

....

Wir interpretieren κ als kontinuierliche Fortsetzung einer quadratischen Matrix (a_{ij}).
Mit dieser Interpretation motivieren wir nun folgende

Definition 11.2.
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\kappa \in C(K^2)$ ein stetiger Kern. Wir definieren

$$||\kappa||_{\mathrm{SI}} := \sup_{s \in K} \int\limits_K |\kappa(t,s)| \, \mathrm{d}t \tag{11.2}$$

und

$$||\kappa||_{\mathrm{ZI}} := \sup_{t \in K} \int\limits_K |\kappa(t,s)| \, \mathrm{d}s. \tag{11.3}$$

$||\kappa||_{\mathrm{SI}}$ heißt **Spaltenintegral-Norm**, $||\kappa||_{\mathrm{ZI}}$ **Zeilenintegral-Norm**.

....

Folgerung 11.3.
Es gilt stets $||\kappa||_{\mathrm{SI}} \leq \lambda(K)\, ||\kappa||_{\sup}$ und $||\kappa||_{\mathrm{ZI}} \leq \lambda(K)\, ||\kappa||_{\sup}$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 11. ■

....

Satz 11.4.
Der Integraloperator S_κ aus 11.1 bildet $L_1(K)$ in $C(K)$ ab.

Beweis. Im Video zu Kapitel 11. ■

....

Folgerung 11.5.
Es gilt

a) $||Sf||_{\sup} \leq ||\kappa||_{\sup} \, ||f||_{L_1}$

b) $||Sf||_{\sup} \leq ||\kappa||_{\text{ZI}} \, ||f||_{L_\infty}$

Beweis.
Folgt sofort aus dem Beweis von Satz 11.4. ■

Satz 11.6.
S_κ bildet *beschränkte* Teilmengen von $L_1(K)$ in *gleichstetige* Teilmengen von $C(K)$ ab.

Beweis. Im Video zu Kapitel 11. ■

Folgerung 11.7.
S_κ bildet *beschränkte* Teilmengen von $L_p(K)$ in *relativ kompakte* Teilmengen von $C(K)$ ab.

Beweis. Im Video zu Kapitel 11. ■

Bemerkung 11.8.
Es gilt

$$||S_\kappa||_{\mathcal{L}(C(K))} = ||\kappa||_{\text{ZI}} \,. \tag{11.4}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 11. ■

Wir diskutieren nun wie angekündigt wichtige Normabschätzungen von S_κ.

Satz 11.9. Es seien $1 < p < \infty$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zudem sei $S := S_\kappa$ wie in 11.1. Dann gelten die Abschätzungen

1) $||S_\kappa f||_{L_2} \leq ||\kappa||_{L_2(K^2)} \, ||f||_{L_2}$, $f \in L_2(K)$.

2) $||S_\kappa f||_{L_1} \leq ||\kappa||_{\text{SI}} \, ||f||_{L_1}$, $f \in L_1(K)$.

3) $||S_\kappa f||_{L_p} \leq ||\kappa||_{\text{ZI}}^{1/q} \, ||\kappa||_{\text{SI}}^{1/p} \, ||f||_{L_p}$, $f \in L_p(K)$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 11. ■

Wir haben nun also insgesamt gezeigt, dass lineare *Integral*operatoren als stetige lineare Operatoren auf einem Banachraum realisiert werden können. Wir werden nun sehen, dass dies für lineare *Differential*operatoren **nicht** gilt.

Beispiel 11.10.
Es sei $b > 0$ und $D : f \mapsto \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, $f \in C^1[0, b]$, der übliche Differentialoperator. Dieser ist linear und unstetig als Operator von $(C^1[0, b], ||\cdot||_{\sup})$ nach $(C^1[0, b], ||\cdot||_{\sup})$, denn aus $||f_n||_{\sup} \to 0$ folgt *nicht* $||f_n'||_{\sup} \to 0$:
Wir definieren $f_n(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$||f_n||_{\sup} = \sup_{t\in[0,b]} \frac{1}{n} \cdot \sin(nt) = \frac{1}{n} \to 0 \ (n \to \infty),$$

aber

$$||f_n'||_{\sup} = \sup_{t\in[0,b]} \frac{1}{n} \cdot n \cdot \cos(nt) = \sup_{[0,b]} \cos(nt) = 1 \not\to 0 \ (n \to \infty).$$

Wegen $||Df||_{\sup} \leq ||f||_{C^1}$ ist hingegen $D : (C^1[0,b], ||\cdot||_{C^1}) \to (C[0,b], ||\cdot||_{\sup})$ stetig, wobei $||\cdot||_{C^1}$ die in Satz 7.9 eingeführte Norm bezeichnet.

....

Abschließend wollen wir nun drei Lösungsideen angeben, um dieses Problem zu umgehen, ohne diese jedoch im Detail aufzugreifen:

1) Formuliere das Problem als *Integral*gleichung um.

2) Realisiere $T : D(T) \to X$ als unbeschränkten linearen Operator in X, wobei $D(T)$ der Definitionsbereich von T ist. Dieser Ansatz führt auf die sogenannte *Spektraltheorie*.

3) Realisiere T als stetigen linearen Operator auf einem nicht-normierbaren Raum, z.B. einem Raum von C^∞-Funktionen.

Mit diesen Ansätzen lassen sich viele Untersuchungen für Differentialoperatoren angehen, trotzdem bleibt diese ein schwieriges (aber oft auch wichtiges und interessantes) Problem der Funktionalanalysis. Für weiterführende Informationen zu diesen Ansätzen sei auf [Kaballo, 2014] verwiesen.

Teil 3 - Prinzipien der Funktionalanalysis

Ausgehend von der Vollständigkeit metrischer Räume behandeln wir in diesem Teil nun zunächst den Baireschen Kategoriensatz und das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Darauf aufbauend betrachten wir Eigenschaften offener Abbildungen und legen daraufhin die grundlegenden Begrifflichkeiten zu Banachalgebren, die wir dann auf Integralgleichungen und Spektraltheorie anwenden wollen. Es folgt als Abschluss dieses Teils der Satz von Hahn-Banach.

12. Der Satz von Baire

Mit diesem Kapitel beginnen wir die Diskussion von *Prinzipien der Funktionalanalysis*. In den ersten Kapiteln in diesem Block werden wir besonders Konsequenzen aus der Vollständigkeit gewisser Räume herleiten. Eine solche Aussage liefert der Satz von Baire, auch Bairescher Kategoriensatz genannt. Um diesen in angemessener Form formulieren und beweisen zu können, betrachten wir vorher noch einige andere Resultate und Sprechweisen.

Satz 12.1 (*Satz von Osgood*).
Es sei M eine punktweise beschränkte (vgl. (4.8)) Menge stetiger Funktionen auf $\mathbb{R}$. Dann gibt es ein nichtleeres offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$, auf dem M gleichmäßig beschränkt ist, d.h. folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\exists S \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ \forall f \in M\colon\ |f(x)| \le S. \tag{12.1}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 12. ■

. . . .

Um obiges Phänomen in einen passenden begrifflichen Rahmen zu bringen, führen wir nun einige wichtige Sprechweisen ein.

Definition 12.2 (*Bairesche Kategorien*).
Es sei M ein metrischer Raum.

a) $A \subseteq M$ heißt **nirgends dicht**, falls das Innere des Abschlusses von A leer ist:

$$\overline{A}^{\circ} = \emptyset. \tag{12.2}$$

b) Eine abzählbare Vereinigung nirgends dichter Teilmengen von M heißt **mager** oder **von erster Kategorie**.

c) Nicht magerer Teilmengen von M heißen **von zweiter Kategorie**.[9]

. . . .

Bemerkung 12.3.
Teilmengen und abzählbare Vereinigungen magerer Mengen sind wieder mager.

. . . .

Beispiel 12.4.

a) Jede einpunktige Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist nirgends dicht, folglich sind also abzählbare Teilmengen mager in $\mathbb{R}$. Insbesondere ist $\mathbb{Q}$ mager in $\mathbb{R}$ (beachte: $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ ist nicht vollständig!).

b) Es sei X ein normierter Raum und V Unterraum. Wenn V einen inneren Punkt hat, sagen wir $v_0 \in V^{\circ}$, so folgt aus $U_\delta^X(v_0) \subseteq V$ für $\delta > 0$ sofort $V = X$. Ist V also ein echter Unterraum von X, so ist V nirgends dicht in X.

[9] Man findet auch ab und zu den Begriff einer *fetten Menge*, auf welchen wir in diesem Kurs jedoch verzichten werden.

c) Es sei $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine (eventuell algebraische) Basis eines normierten Raumes X. Dann sind die Unterräume

$$V_n := [x_1, \dots, x_n]\,,\ n \in \mathbb{N}, \tag{12.3}$$

nirgends dicht in X, also $X = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} V_n$ mager.

Mit diesem Vorschub können wir nun den Satz von Baire formulieren.

Theorem 12.5 (*Satz von Baire*).
Es sei M ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist jede offene Teilmenge von M von zweiter Kategorie.

Beweis. Im Video zu Kapitel 12. ∎

Folgerung 12.6.
Jeder metrische Raum M ist von zweiter Kategorie.

Folgerung 12.7.
Es sei X ein Banachraum. Dann hat jede Basis von X entweder endlich viele oder überabzählbar viele Elemente.

Beweis. Im Video zu Kapitel 12. ∎

Wir werden nun eine wichtige Anwendung des Satzes von Baire diskutieren und somit die Wirkung dieses Satzes in Beweisen kennenlernen.

Satz 12.8.
Wir betrachten zwei metrische Räume M und Y sowie eine Folge (f_n) in $C(M, Y)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ für alle $x \in M$. Dann ist die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f mager in M.

Beweis. Im Video zu Kapitel 12. ∎

Folgerung 12.9.
In einem vollständigen metrischen Raum ist nach dem Satz von Baire die Funktion f (wie in 12.8 definiert) auf einer nichtleeren Menge zweiter Kategorie stetig.

Bemerkung 12.10.
Ist f (wie in 12.8 definiert) ein linearer Operator, so folgt wegen Satz 5.4 aus der Stetigkeit in einem Punkt sofort die Stetigkeit auf dem ganzen Raum.

Folgerung 12.11.
Es seien nun X, Y *normierte* Räume, X sei vollständig und (T_n) eine Folge in $\mathcal{L}(X, Y)$, für die

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = T(x)\ \forall x \in X$$

gilt. Dann ist $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 12. ■

. . . .

Wir schließen dieses Kapitel nun mit einigen äquivalenten Formulierungen des Satzes von Baire.

Bemerkung 12.12.
Die Aussage des Satzes von Baire 12.5 ist äquivalent zu folgenden Formulierungen:

- Ist M ein vollständiger, metrischer Raum, so besitzt eine *magerer* Menge $S \subseteq M$ keinen inneren Punkt.
- In einem vollständigen metrischen Raum M ist ein abzählbarer Durchschnitt offener *und* dichter Mengen in M dicht.

. . . .

13. Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Wir kommen nun zu einem weiteren Prinzip der Funktionalanalysis, dem *Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*. Hierbei untersuchen wir insbesondere Folgen linearer Operatoren zwischen normierten Räumen, bei denen entweder einer oder beide vollständig sind.

Definition 13.1.
Es seien X, Y normierte Räume. Eine Menge $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ stetiger linearer Operatoren heißt **gleichmäßig beschränkt**, wenn die Menge der Operatornormen beschränkt ist:

$$C := \sup\{||T|| : T \in \mathcal{H}\} < \infty. \tag{13.1}$$

....

Theorem 13.2 (*Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*).
Es seien X, Y normierte Räume und $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ eine Menge stetiger linearer Operatoren. Weiter gebe es eine Menge $Z \subset X$, sodass Z von zweiter Kategorie ist und die Mengen $\{Tz : T \in \mathcal{H}\}$ für jedes $z \in Z$ in Y beschränkt sind. Dann gilt:

$$\sup\{||T|| : T \in \mathcal{H}\} < \infty,$$

das heißt $\mathcal{H}$ ist gleichmäßig beschränkt.

Beweis. Im Video zu Kapitel 13. ■

....

Beispiel 13.3.
Es sei X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Wählen wir $Z = X$, dann ist Z als offene Teilmenge nach Theorem 12.5 von zweiter Kategorie und somit ist nach Satz 13.2 jede Menge $\mathcal{H} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ gleichmäßig beschränkt.

....

Wir kommen nun zu einem weiteren wichtigen Satz, dem Satz von Banach-Steinhaus. Eine seiner Teilaussagen haben wir bereits in 5.4 kennengelernt.

Satz 13.4 (*Satz von Banach-Steinhaus*).
Es seien X ein Banachraum und Y ein normierter Raum. Ferner sei (T_n) eine Folge von Operatoren in $\mathcal{L}(X,Y)$, sodass

$$Tx := \lim_{n\to\infty} T_n x \tag{13.2}$$

für alle $x \in X$ existiert. Dann gelten:

1) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.

2) $||T|| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| < \infty$.

3) $T_n \to T$ gleichmäßig auf allen kompakten Teilmengen von X.

Beweis. Im Video zu Kapitel 13. ■

....

Satz 13.5.
Es seien X, Y Banachräume und (T_n) eine Folge in $\mathcal{L}(X, Y)$. Dann sind äquivalent:

a) (T_n) konvergiert gleichmäßig auf kompakten Mengen in X.

b) (T_n) konvergiert punktweise auf X.

c) (T_n) konvergiert punktweise auf einer dichten Teilmenge von X und es gilt $\sup\{||T_n|| : n \in \mathbb{N}\} < \infty$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 13. ■

....

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch eine Anwendung des Satzes von Banach-Steinhaus auf ein numerisches Problem geben, dabei allerdings auf den Beweis verzichten. Dieser kann in [Schulte, 2017a], Satz 2.2, gefunden werden.

Satz 13.6 (*Satz von Szegö*).
Es sei (Q_n) eine Folge von Näherungsquadraturen der Form

$$Q_n(f) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{n,k} f(t_{n,k}).$$

Dann gilt:
(Q_n) konvergiert für jedes $f \in C([0,1])$ gegen $\int_0^1 f(t)\, dt$ genau dann, wenn die folgenden beiden Bedingungen gelten:

(Q1) $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=0}^{n} |\alpha_{n,k}| < \infty$

(Q2) $Q_n p \to \int\limits_0^1 p(t)\, dt \ (n \to \infty)$ für alle Polynome p.

....

14. Der Satz von der offenen Abbildung

Ausgehend von der Definition einer offenen Abbildung zeigen wir, dass die Quotientenabbildung wie in Kapitel 3 beschrieben offen ist und eine Möglichkeit zur *Zerlegung* linearer Operatoren bietet. Von diesem Ausgangspunkt entwickeln wir den namensgebenden *Satz von der offenen Abbildung* und werden durch die Anwendungsmöglichkeiten dieses Satzes erkennen, dass er ohne Weiteres als Prinzip der Funktionalanalysis aufgefasst werden kann.

Definition 14.1.
Es seien M, N metrische Räume. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt **offen**, wenn für jede offene Menge $D \subseteq M$ auch $f(D)$ in N offen ist. Dies ist äquivalent zu der Bedingung:

$$\forall x \in M\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\colon f\left(U_\varepsilon^X(x)\right) \supseteq U_\delta^N(f(x)) \tag{14.1}$$

....

Bemerkung 14.2.

a) In einem normierten Raum X gilt

$$U_\varepsilon(x) = x + U_\varepsilon(0) = x + \varepsilon U_1(0)\ \forall \varepsilon > 0. \tag{14.2}$$

b) Ein linearer Operator $T : X \to Y$ ist also genau dann offen, wenn gilt:

$$\exists \delta > 0\colon f\left(U_1^X(0)\right) \supset U_\delta^Y(0). \tag{14.3}$$

c) Aus (14.3) folgt: Lineare offene Abbildungen sind stets surjektiv.

Beweis. Im Video zu Kapitel 14. ■

....

Bemerkung 14.3.
Es sei X ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V \subseteq X$ ein Unterraum. Die Quotientenabbildung $\pi := \pi_V : X \to Q := {}^X\!/_V$ (vgl. (3.9)) ist linear und es gilt $\pi(U_1^X(0)) = U_1^Q(0)$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 14. ■

....

Diese Art der Quotientenbildung benutzen wir nun für eine Zerlegung von Operatoren. Diese ist eher topologischer Natur, weshalb wir hier auf den Beweis verzichten werden.[10]

Satz 14.4.
Es seien X, Y normierte Räume, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ und $\hat{T}\colon \hat{X} := {}^X\!/_{N(T)} \to Y$ sei definiert durch

[10] Man betrachtet die Identifizierungstopologie bezüglich f auf dem Raum X und folgert daraus die Behauptung. Der Beweis hierzu kann in [von Querenburg, 2001], Satz 3.20, nachgelesen und dann sinngemäß auf die vorliegende Situation übertragen werden.

$\hat{T}(\hat{x}) := \hat{T}(\pi x) := Tx$ für $x \in X$. Dann ist $\hat{T}$ wohldefiniert, es gilt $T = \hat{T} \circ \pi$, $\hat{T}$ ist injektiv und es gilt $R(\hat{T}) = R(T)$. Ferner ist $\hat{T}$ stetig genau dann, wenn T stetig ist.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] & Y \\ \hat{X} \arrow[ur, "\hat{T}"'] & \end{tikzcd}$$

Wir wollen nun ein weiteres Prinzip der Funktionalanalysis kennenlernen, den für dieses Kapitel namensgebenden *Satz von der offenen Abbildung*, welcher auf dem Satz von Baire beruht. Hierzu benötigen wir ein wenig (technische) Vorarbeit.

Definition 14.5.
Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ linear. Dann heißt

$$\Gamma(T) := \{(x, Tx) \colon x \in X\} \tag{14.4}$$

Graph von T.

Bemerkung 14.6.

a) $\Gamma(T)$ ist ein Unterraum von $X \times Y$.

b) $\Gamma(T)$ ist abgeschlossen genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in X gilt:
$x_n \to x$ in X und $Tx_n \to y$. $\Rightarrow y = Tx$.

Die nachfolgenden zwei Lemmata benötigen wir zum Beweis des Satzes von der offenen Abbildung. Wir notieren der Einfachheit halber im folgenden $U_1^X(0) =: U$ und $U_1^Y(0) =: V$.

Lemma 14.7.
Es seien X, Y normierte Räume und $T : X \to Y$ ein linearer Operator, sodass $R(T)$ von zweiter Kategorie in Y ist. Dann gilt:

$$\exists \delta > 0 \colon \overline{T(U)} \supseteq \delta V \tag{14.5}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 14. ∎

Lemma 14.8.
Es sei X ein Banachraum, Y ein normierter Raum und $T : X \to Y$ ein linearer Operator mit abgeschlossenem Graphen, so dass (14.5) gilt. Dann folgt

$$(1 + \varepsilon)T(U) \supseteq \overline{T(U)} \; \forall \varepsilon > 0. \tag{14.6}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 14. ∎

Theorem 14.9 (*Satz von der offenen Abbildung*).
Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $R(T)$ von zweiter Kategorie in Y. Dann ist T eine offene Abbildung.

Beweis. Im Video zu Kapitel 14. ■

....

Einen wichtigen Spezialfall dieses Satzes bildet

Satz 14.10 (*Satz vom inversen Operator*).
Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ bijektiv. Dann ist auch $T^{-1} : Y \to X$ stetig.

Beweis. Im Video zu Kapitel 14. ■

....

Für die weiteren Resultate dieses Kapitels benötigen wir einen Satz, der die Vollständigkeit des Quotientenraums garantiert. Da der Beweis eher maßtheoretischer Natur ist, wollen wir an dieser Stelle auf ihn verzichten. Zu finden ist er in [Kaballo, 2011], Satz 1.8.

Satz 14.11.
Es sei X ein Banachraum und $V \subseteq X$ ein abgeschlossener Unterraum. Dann ist auch $Q := {}^{X}/_{V}$ ein Banachraum.

....

Satz 14.12.
Es seien X, Y Banachräume und $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann gilt:
$R(T)$ ist abgeschlossen. $\Leftrightarrow$ Es gilt die Abschätzung

$$\exists \gamma > 0 \ \forall x \in X\colon \ ||Tx|| \geq \gamma \, ||\hat{x}|| = \gamma \, ||\pi x|| = \gamma d_{N(T)}(x). \tag{14.7}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 14. ■

....

Satz 14.13 (*Satz vom abgeschlossenen Graphen*).
Es seien X, Y Banachräume und $T : X \to Y$ linear, sodass $\Gamma(T)$ abgeschlossen ist. Dann ist T stetig.

Beweis. Im Video zu Kapitel 14. ■

....

Zum Abschluss dieses Kapitels betrachten wir noch eine typische Anwendung des Satzes 14.13 bei Beweisen.

Satz 14.14 (*Satz von Hellinger-Toeplitz*).
Es sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ ein *symmetrischer* linearer Operator, d.h. es gelte

$$\langle Tx \mid y \rangle = \langle x \mid Ty \rangle \ \forall x, y \in H. \tag{14.8}$$

Dann ist T stetig.

Beweis. Im Video zu Kapitel 14. ■

....

15. Banachalgebren und Neumannsche Reihe

In diesem Kapitel legen wir theoretische Grundlagen für die Untersuchung von Integralgleichungen. Hierzu diskutieren wir Banachalgebren und beweisen den wichtigen Satz 15.3 über die Neumannsche Reihe. Abschließend betrachten wir Quotientenbildung auf Banachalgebren.

Definition 15.1.
Eine **Banachalgebra** $\mathcal{A} = (X, \cdot)$ ist ein Banachraum X über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ mit einer Multiplikation $X \times X \to X$, welche Assoziativ- und Distributivgesetz erfüllen und für die zusätzlich folgende Bedingungen gelten:

(B1) $(\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha(xy)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $x, y \in X$.

(B2) $||xy|| \leq ||x||\,||y||$, $x, y \in X$.

(B3) Es gilt $||e|| = 1$ für ein Einselement $e \in X$.

Wir interessieren uns im Folgenden nur für Banachalgebren *mit* Einselement.

Beispiel 15.2.

a) Für einen kompakten Raum K ist $C(K)$ mit punktweiser Multiplikation eine *kommutative* Banachalgebra.

b) Ist X ein Banachraum, so ist $\mathcal{L}(X) := \mathcal{L}(X, X)$ eine *nicht kommutative* Banachalgebra (z.B. $X = \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n)$).

c) Für einen kompakten Raum K und eine Banachalgebra $\mathcal{A} = (X, \cdot)$ ist $C(K, X)$ mit der punktweisen Multiplikation eine Banachalgebra. Ist X kommutativ, so auch $C(K, X)$.

d) Abgeschlossene Unteralgebren[11] von Banachalgebren sind wieder Banachalgebren.

Satz 15.3.
Es sei $\mathcal{A} = (X, \cdot)$ eine Banachalgebra und $x \in X$ mit $||x|| < 1$. Dann ist die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \tag{15.1}$$

in X absolut konvergent mit

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = (e - x)^{-1}. \tag{15.2}$$

Die Reihe in (15.1) heißt **Neumannsche Reihe**.

Beweis. Im Video zu Kapitel 15. ∎

[11] $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Multiplikation, die mit der Vektorraumstruktur verträglich ist.

....
Wir betrachten nun ein Beispiel, welches die Verwendung der Neumannschen Reihe in einem Kontext offenbart, der auf den ersten Blick überhaupt keine Verbindung zur Funktionalanalysis hat.

Beispiel 15.4 (*Input-Output-Analyse nach Leontieff*).
Eine Volkswirtschaft verfüge über Industrien $I_1, \ldots, I_n$, die gewisse Outputs erzeugen. Um einen Output im Wert von einem Euro zu erzeugen, benötigt Industrie I_j Inputs der Industrien I_k im Wert von t_{kj} Euro für $k = 1, \ldots n$. Dabei gelte sinnvollerweise

$$0 \leq t_{kj},\ k, j = 1, \ldots, n,\ \sum_{k=1}^{n} t_{kj} < 1,\ j = 1, \ldots, n. \tag{15.3}$$

Produziert nun I_k einen Output im Wert von x_k Euro, so stehen für die restlichen Konsumenten noch $x_k - \sum_{j=1}^{n} t_{kj} x_j$ Outputs zur Verfügung.
Problem: Produziere genau so viel, dass eine gegebene Nachfrage $d = (d_1, \ldots, d_n)^T$ befriedigt werden kann.

Wir schreiben hierzu $x := (x_1, \ldots, x_n)^T$ für den Produktionsvektor und führen die Matrix $T := (t_{kj})_{k,j=1,\ldots,n} \in M_{\mathbb{R}}(n)$ ein. Zu lösen ist nun die Gleichung

$$x - Tx = d \Leftrightarrow (I - T)x = d.$$

Aufgrund der Voraussetzungen in (15.3) gilt für die Spaltensummennorm von T:

$$||T||_{\text{SS}} = \max_{j=1,\ldots,n} \sum_{k=1}^{n} |t_{kj}| < 1. \tag{15.4}$$

Somit ist Satz 15.3 anwendbar und es existiert $(I - T)^{-1}$ mit

$$d = (I - T)^{-1} x. \tag{15.5}$$

Wegen $s := \sum_{k=0}^{\infty} x^k = (I - T)^{-1}$ gilt $s_0 := e$ und $s_{n+1} = e + x s_n$. Somit lässt sich die obige Lösung iterativ berechnen, bis eine zufriedenstellende Genauigkeit auftritt.

....
Nach diese praktischen Beispiel betrachten wir nun eine abstraktere Anwendung der Neumannschen Reihe.

Definition 15.5.
Es sei $\mathcal{A} = (X, \cdot)$ eine Banachalgebra. Ein *echter* Unterraum $\mathcal{I} \subsetneq X$ heißt **zweiseitiges Ideal** in X, falls

$$X\mathcal{I}X := \{xuy \colon x, y \in X, u \in \mathcal{I}\} \subset \mathcal{I} \tag{15.6}$$

gilt.

....

Folgerung 15.6.
Wegen $\mathcal{I} \neq X$ ist $e \notin \mathcal{I}$ und wegen $xx^{-1} = e$ enthält $\mathcal{I}$ auch keine invertierbaren Elemente von X.

. . . .

Satz 15.7.
Es sei $\mathcal{A} = (X, \cdot)$ eine Banachalgebra und $\mathcal{I}$ ein zweiseitiges Ideal in X. Dann ist auch ${}^{X}/_{\mathcal{I}}$ eine Banachalgebra.

Beweis. Im Video zu Kapitel 15. ■

. . . .

16. Lineare Integralgleichungen

Wir werden nun eine grundlegende Unterteilung von Integralgleichungen kennenlernen und ihre Lösbarkeit diskutieren. Da die Beweise häufig nur auf Anwendung der Neumannschen Reihe aus Satz 15.3 beruhen, werden wir einige Aussagen nicht explizit beweisen.

Definition 16.1.
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\kappa \in C(K^2)$ ein stetiger Kern. Die Integralgleichung

$$f(t) - \int\limits_K \kappa(t,s) f(s)\, \mathrm{d}s = g(t), \; t \in K, \tag{16.1}$$

heißt **Fredholmsche Integralgleichung**.
Beachte: Die Grenzen des Integrals sind „konstant".

....

Satz 16.2.
Die Integralgleichung (16.1) hat gemäß Satz 15.3 und Formel (11.4) im Falle

$$||\kappa||_{\mathrm{ZI}} = \sup_{t \in K} \int\limits_K |\kappa(t,s)| \;\, \mathrm{d}s < 1$$

für jedes $g \in C(K)$ genau eine Lösung $f \in C(K)$.

....

Satz 16.3.
Es sei (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum und $\kappa : \Omega^2 \to \mathbb{K}$ ein messbarer Kern, sodass eine der Abschätzungen aus Satz 11.9 die Aussage

$$||S_\kappa||_{\mathcal{L}(L_p(\Omega))} < 1$$

ergibt. Dann hat die Gleichung (16.1) nach Satz 15.3 für jedes $g \in L_p(\Omega)$ genau eine Lösung $f \in L_p(\Omega)$.

....

Satz 16.4.
Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $\kappa \in C(K^2)$. Gilt

$$||S_\kappa||_{\mathcal{L}(L_p(\Omega))} < 1,$$

so gibt es zu $g \in C(K)$ genau eine Lösung $f \in L_p(K)$ von $(I - S_\kappa)f = g$.[12]

....

Integralgleichungen wie in (16.1) lassen sich auch mit *matrixwertigen* Kernen betrachten.

Wir kommen nun zur zweiten Sorte Integralgleichungen, die sich als wichtig erweisen.

[12]Unter dieser Voraussetzung ist der Operator $I - S_\kappa$ sogar bijektiv.

Definition 16.5.
Es sei $\kappa \in C(J^2, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))$ ein stetiger matrixwertiger Kern auf einem kompakten Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Der Operator

$$V\colon C(J,\mathbb{K}^n) \to C(J,\mathbb{K}^n),\ (Vf)(t) := (V_\kappa)f(t) := \int\limits_a^t \kappa(s,t)f(s)\ \mathrm{d}s,\ a,t \in J,\ f \in C(J,\mathbb{K}^n), \tag{16.2}$$

heißt **Volterra-Operator**.

Satz 16.6.
Ein Volterra-Operator V wie in (16.2) ist linear und erfüllt die Abschätzung

$$\left|\left|V^j\right|\right| \leq \frac{(t-a)^j}{j!}\,||\kappa||_{\sup}^j \text{ für } j \in \mathbb{N}. \tag{16.3}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 16. ■

Definition 16.7.
Es sei $\kappa \in C(J^2, \mathbb{M}_{\mathbb{K}}(n))$ ein stetiger matrixwertiger Kern auf einem kompakten Intervall $J \subset \mathbb{R}$. Die Integralgleichung

$$f(t) - \int\limits_a^t \kappa(s,t)f(s)\ \mathrm{d}s = (I-V)f(t) = g(t) \tag{16.4}$$

heißt **Volterrasche Integralgleichung**.

Satz 16.8.
Die Integralgleichung (16.4) ist für alle $g \in C(J,\mathbb{K}^n)$ durch

$$f = (I-V)^{-1}g \in C(J,\mathbb{K}^n) \tag{16.5}$$

eindeutig lösbar und lässt sich (ähnlich wie in Beispiel 15.4) iterativ berechnen.

Beweis. Im Video zu Kapitel 16. ■

Bemerkung 16.9.
Für die iterative Berechnung von (16.5) hat man mit $c := (b-a)\,||\kappa||_{\sup}$ die Fehlerabschätzung

$$\left|\left|f - \sum_{j=0}^n V^j g\right|\right|_{\sup} \leq e^c \frac{c^{n+1}}{(n+1)!}\,||g||_{\sup}\,, \tag{16.6}$$

die Konvergenz ist also schneller als linear.

Beweis. Im Video zu Kapitel 16. ■

. . . .

Weitere Untersuchungen von Integralgleichungen werden wir im Rahmen dieses Kurses nicht anstellen. Interessierte seien an [Kaballo, 2011], Abschnitt 4.4 bis 4.6 verwiesen.

17. Grundbegriffe der Spektraltheorie

In diesem Kapitel werden wir einen Einblick in die Spektraltheorie geben. Ausgehend von den Grundbegriffen *Spektrum* und *Resolvente* leiten wir die wichtige *Resolventengleichung* her und diskutieren das Konzept von Eigenwerten und Eigenvektoren von Operatoren.

Idee: Erweitere das Konzept von Eigenwerten und Eigenvektoren von Matrizen auf den „unendlichdimensionalen“ Fall.

Definition 17.1.
Es sei $\mathcal{A} = (X, \cdot)$ eine Banachalgebra und $x \in X$. Die Zahl

$$r(x) := \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{||x^k||} \in [0, ||x||], \tag{17.1}$$

heißt **Spektralradius** von x.

. . . .

Definition 17.2.
Es sei $\mathcal{A} = (X, \cdot)$ eine Banachalgebra. Mit

$$G(X) := GX := \{x \in X \mid \exists y \in X : xy = yx = e\} \tag{17.2}$$

bezeichnen wir die **Gruppe der invertierbaren Elemente** von X.

. . . .

Ab nun bezeichne $||\cdot||$ die Norm auf dem Banachraum X.

Satz 17.3.
$G(X)$ ist offen in X und die Inversion $a \mapsto a^{-1}$ ist stetig. Sie ist ferner eine Homöomorphie (vgl. Definition 8.1) von $G(X)$ auf sich selbst.

Beweis. Im Video zu Kapitel 17. ■

. . . .

Wir führen nun die wichtigsten Begriffe der Spektraltheorie ein.

Definition 17.4.
Es sei $\mathcal{A} = (X, \cdot)$ eine Banachalgebra und $x \in X$.

a) Die Menge

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \lambda e - x \notin G(X)\} \tag{17.3}$$

heißt **Spektrum** von x.

b) Die Menge

$$\rho(x) := \mathbb{K} \setminus \sigma(x) \tag{17.4}$$

heißt **Resolventenmenge** von x.

c) Die Abbildung

$$R_x : \rho(x) \to G(X),\ \lambda \mapsto (\lambda e - x)^{-1} \tag{17.5}$$

heißt **Resolvente** von x.

Folgerung 17.5.

a) $\rho(x)$ ist offen in $\mathbb{K}$, da $G(X)$ offen in X ist.

b) Die Resolvente R_x ist stetig, da die Inversion auf $G(X)$ stetig ist.

Folgerung 17.6.
Die Resolvente ist im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ holomorph auf $\rho(x)$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 17. ∎

Definition 17.7.
Für $\lambda, \mu \in \rho(x)$ heißt die Gleichung

$$R_x(\lambda) - R_x(\mu) = -(\lambda - \mu)R_x(\lambda)R_x(\mu) \tag{17.6}$$

Resolventengleichung. Sie gilt nach dem Beweis von Folgerung 17.5.

Satz 17.8.
$\sigma(x)$ ist kompakt in X für jedes $x \in X$. Insbesondere ist $\sigma(x)$ nichtleer.

Beweis. Der Beweis folgt in Kapitel 18, direkt hinter Folgerung 18.10. ∎

Folgerung 17.9.
Für $|\lambda| > r(x)$ existiert

$$R_x(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k. \tag{17.7}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 17. ∎

Folgerung 17.10.
Es gilt $||R_x(\lambda)|| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - ||x||}$ für $|\lambda| > ||x||$.

Beweis. Folgt sofort aus (17.7). ∎

Definition 17.11.
Es sei X ein Banachraum. Für $T \in \mathcal{L}(X)$ heißt $\lambda \in \mathbb{K}$ ein **Eigenwert** von T, falls es ein $0 \neq x \in X$ gibt mit

$$Tx = \lambda x. \tag{17.8}$$

x heißt dann **Eigenvektor** von T zum Eigenwert λ.

Folgerung 17.12.

a) Es gilt: $N(\lambda I - T) \neq \{0\} \Rightarrow \lambda I - T \notin G\mathcal{L}(X)$.

b) $\lambda I - T \in G\mathcal{L}(X) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(T)$.

c) Falls $\dim X < \infty$ ist, so gilt: $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \chi_T(\lambda) := \det(\lambda I - T) = 0$.

Beweis. Klar nach Definition. ∎

Beispiel 17.13.
Wir wählen speziell $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $\mathcal{A} := (\mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n), \cdot)$. $\mathcal{A}$ ist nach 15.2 b) eine Banachalgebra.
Für $M \in \mathbb{M}_{\mathbb{R}}(n)$ gilt nun

$$\sigma(M) = \{\lambda \in \mathbb{R} \colon \lambda I - M \notin GL_n(\mathbb{R})\} = \{\lambda \in \mathbb{R} \colon \lambda \text{ ist Eigenwert von } M\}.$$

Die Resolventenmenge ist dann gegeben durch

$$\rho(M) = \{\lambda \in \mathbb{R} \colon \lambda \text{ ist } \textbf{kein} \text{ Eigenwert von } M\} = \mathbb{R} \setminus \sigma(M).$$

Die Resolventenabbildung lautet dann $R_M : \rho(X) \to GL_n(\mathbb{R}),\ \lambda \mapsto (\lambda I - M)^{-1}$. Konkreter gilt also

$$(\lambda I - M)v = \begin{cases} 0 & : \quad \lambda \text{ Eigenwert von } M \\ \left(R_M^{-1}(\lambda)\right) v & : \quad \lambda \text{ kein Eigenwert von } M \end{cases} = \begin{cases} 0 & : \quad v \in \operatorname{Eig}_\lambda(M) \\ \left(R_M^{-1}(\lambda)\right) v & : \quad v \notin \operatorname{Eig}_\lambda(M) \end{cases}.$$

Die bekannten Begrifflichkeiten gehen also aus der neuen Theorie hervor.

Beispiel 17.14.
Wir definieren für $1 \leq p \leq \infty$ auf ℓ_p den sogenannten *Links-Shift-Operator* durch

$$S_-(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots) := (x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots). \tag{17.9}$$

Es gilt $||S|| := \sup\limits_{||x||_{\ell_p}=1} ||S_-(x)|| = 1$ und somit $\sigma(S_-) \subset \mathbb{D} := \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| \leq 1\}$.

Für $|\lambda| < 1$ gilt

$$S_-(1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots) = (\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4, \ldots) = \lambda \cdot (1, \lambda, \lambda^2, \lambda^3, \ldots),$$

d.h. λ ist ein Eigenwert von S_-. $\Rightarrow \mathbb{D}^\circ \subset \sigma(S_-)$.
Nach Satz 17.8 ist das Spektrum kompakt, also folgt $\sigma(S_-) = \mathbb{D}$.
Beachte: Punkte auf $\partial\mathbb{D}$ sind nur für $p = \infty$ auch Eigenwerte, ansonsten nur Spektralwerte.

18. Der Satz von Hahn-Banach

In Satz 8.4 haben wir bereits ein einfaches Fortsetzungsprinzip kennengelernt, welches wir nun verallgemeinern und erweitern wollen. Dazu benötigen wir einige neue Begrifflichkeiten.

Definition 18.1.
Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Der Raum

$$E^\star := \{T : E \to \mathbb{K} \colon T \text{ ist linear}\} \tag{18.1}$$

heißt **algebraischer Dualraum** von E und seine Elemente heißen **Linearformen** auf E. Es gilt $E' \subset E^*$.

. . . .

Definition 18.2.
Es sei E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Ein **sublineares Funktional** ist eine Abbildung $p : E \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(S1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $x, y \in E$.

(S2) $p(tx) \leq tp(x)$, $x \in E$, $t \geq 0$.

. . . .

Beispiel 18.3.
Normen und Halbnormen sind sublineare Funktionale.

. . . .

Wir werden nun mehrere Versionen des Satzes von Hahn-Banach formulieren und beweisen. Dafür benötigen wir folgende Vorarbeit.

Definition 18.4.

a) Es sei M eine Menge und $\prec$ eine Relation auf M. $\prec$ heißt **Halbordnung** auf M, falls gilt:

   (H1) $x \prec x$ für alle $x \in M$.

   (H2) $x \prec y \wedge y \prec z \Rightarrow x \prec z$ für alle $x, y, z \in M$.

   (H3) $x \prec y \wedge y \prec x \Rightarrow x = y$ für alle $x, y \in M$.

b) $m \in M$ heißt **maximal**, falls gilt:

$$m \prec x \Rightarrow x = m. \tag{18.2}$$

c) $C \subset M$ heißt **Kette** oder **total geordnet**, falls gilt:

$$x, y \in C \Rightarrow x \prec y \text{ oder } y \prec x. \tag{18.3}$$

. . . .

Lemma 18.5 (*Lemma von Zorn*).
Es sei $(M, \prec)$ eine halbgeordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat. Dann besitzt M ein maximales Element.

...

Wir kommen nun zu den Versionen des Satzes von Hahn-Banach.

Theorem 18.6 (*Satz von Hahn-Banach über* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Es sei E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $V_0 \subset E$ ein Unterraum von E. Ferner sei $p : E \to \mathbb{R}$ sublinear und $f_0 : V_0 \to \mathbb{R}$ linear mit

$$f_0(x) \leq p(x) \ \forall x \in V_0. \tag{18.4}$$

Dann gibt es eine Linearform $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f|_{V_0} = f_0$ und

$$-p(-x) \leq f(x) \leq p(x), \ x \in E. \tag{18.5}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 18. ■

...

Wir wollen nun Theorem 18.6 auch auf $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ forsetzen. Dafür benutzen wir

Bemerkung 18.7.
Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$z = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{i}\mathrm{Re}(\mathrm{i}z). \tag{18.6}$$

...

Theorem 18.8 (*Satz von Hahn-Banach über* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$).
Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $V_0 \subset E$ ein Unterraum von E. Ferner sei $p : E \to \mathbb{R}$ eine Halbnorm und $f_0 : V_0 \to \mathbb{K}$ linear mit $|f_0(x)| \leq p(x)$ für alle $x \in V_0$.
Dann gibt es eine Linearform $f : E \to \mathbb{K}$ mit $f|_{V_0} = f_0$ und

$$|f(x)| \leq p(x), \ x \in E. \tag{18.7}$$

Beweis. Im Video zu Kapitel 18. ■

...

Wir formulieren nun einen wichtigen Spezialfall gesondert:

Theorem 18.9 (*Satz von Hahn-Banach*).
Es sei X ein normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $V_0 \subset X$ ein Unterraum von X und $f_0 \in V_0'$ eine stetige Linearform auf V_0.
Dann hat f_0 eine Fortsetzung zu einer stetigen Linearform $f \in X'$ auf X mit $||f|| = ||f_0||$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 18. ■

...

Folgerung 18.10.
Es sei X ein Banachraum und $0 \neq x \in X$. Dann gibt es eine stetige Linearform $f \in X'$ mit $f(x) \neq 0$.

....

(*Im Video zu Kapitel 18 folgt nun der Beweis von Satz 17.8.*)
Wir verallgemeinern nun noch das Ergebnis aus Folgerung 18.10.

Satz 18.11.
Es sei X ein normierter Raum, $V \subset X$ ein abgeschlossener Unterraum und $x_1 \in X/V$.
Dann gibt es eine stetige Linearform $f \in X'$ mit $f\,|_V = 0$ und $f(x_1) \neq 0$.

Beweis. Im Video zu Kapitel 18. ■

....

Dieser Satz lässt sich als *Trennungssatz für Punkte abgeschlossener Unterräume* interpretieren, da anschaulich V und x_1 getrennt werden. Einen ähnlichen Satz kann man zur Trennung konvexer Mengen beweisen, was wir allerdings im Rahmen dieses Kurses nicht durchführen werden. Bei Interesse kann dieser Abschnitt in [Kaballo, 2011], Abschnitt 10.2, nachgelesen werden.
Zum Abschluss dieses Kapitels formulieren wir Satz 18.11 noch äquivalent um:

Satz 18.12.
Es sei X ein normierter Raum und $V \subset X$ ein Unterraum von X, sodass für jede stetige Linearform $f \in X'$ aus $f\,|_V = 0$ bereits $f \equiv 0$ folgt. Dann ist V dicht in X.

....

Diese Formulierung ist vor allem in der Approximationstheorie nützlich.

Epilog

Mit den Fortsetzungssätzen von Hahn-Banach endet dieser Kurs: Ich denke, alle wesentlichen *Grundlagen* sind abgehandelt.

Von diesem Standpunkt aus gibt es nun vielfältige Möglichkeiten, weiterzumachen. Ich möchte hier einige Möglichkeiten aufzählen und auch schon den Nachfolgekurs motivieren:

Fortgeschrittene Konzepte der Funktionalanalysis.

- Dual zu den L_p-Räumen lassen sich *Sobolev-Räume* betrachten. Diese kontrollieren neben der Integrierbarkeit auch die Differenzierbarkeit bis zu einer vorgegebenen Ordnung. Wir werden diese im Nachfolgekurs im Rahmen der Distributionstheorie behandeln, man kann diese Räume aber auch angewandt betrachten, z.B. im Rahmen *finiter Elemente.*
- Die vorgestellten Konzepte sollten auch ausreichen, um einem Kurs über Spektraltheorie folgen zu können, etwa im Umfang von [Kaballo, 2011], Kapitel 11 bis 13. Wir werden die *Grundlagen* dieser *Operatortheorie* im Nachfolgekurs ansprechen, insbesondere Selbstadjungiertheit von Operatoren.
- Eine weitere Verzweigungsmöglichkeit ist das Studium der *Hilberträume* und der linearen Operatoren auf diesen. Dies werden wir im Nachfolgekurs anstreben und dabei als wesentliches Hilfsmittel die Fourier-Transformation kennenlernen.
- Es wäre auch möglich, diesen Kurs in Richtung von *partiellen Differentialgleichungen* oder der *Variationsrechnung* fortzuführen. Dies sind jedoch Aspekte, denen wir im Nachfolgekurs nur bedingt Rechnung tragen werden.
- Zu guter Letzt möchte ich die *Distributionstheorie* nicht verschweigen, welche den Funktionenbegriff verallgemeinert. Hier werden wir in einem Nachfolgekurs ebenfalls weitermachen und dabei insbesondere *schwache Ableitungen* kennenlernen, ein Konzept, welches auch den Sobolev-Räumen innewohnt.

Der Nachfolgekurs ist ebenfalls auf meiner Homepage zu finden.

Zu guter Letzt hoffe ich, dass ich mit diesem Kurs und diesem Skript ein wenig Wissen (und nicht zu Letzt auch ein wenig Freude) an der Materie vermitteln konnte. Sollte dies auch nur für einen Zuschauer zutreffen, so hat es sich für mich bereits gelohnt.

Matthias Schulte, 2020.

A. Einige Grundbegriffe der Maßtheorie

Dieser kurze Ausflug in die Maßtheorie orientiert sich inhaltlich stark an Anhang A in [Kaballo, 2011]. Eine etwas ausführlichere Darstellung des gewählten Zugangs findet sich zudem in [Schulte, 2017b], vollständig (und mit Beweisen) wird dieses Thema in [Elstrodt, 2011] dargestellt.

Es sei Ω eine Menge.

Definition A.1.
Es sei Σ ein System von Teilmengen von Ω. Σ heißt **σ-Algebra**, falls gilt

(σ1) $\Omega \in \Sigma$

(σ2) $E \in \Sigma \Rightarrow E^C \in \Sigma$

(σ3) $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} E_j \in \Sigma$

. . . .

Definition A.2.
Eine Abbildung $\mu : \Sigma \to [0, \infty)$ heißt **positives Maß** auf Σ, wenn sie σ-additiv ist:

$$(E_j)_{j\in\mathbb{N}} \text{ disjunkt, } \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j =: E \Rightarrow \mu(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_k) \tag{A.1}$$

$(\Omega, \Sigma, \mu) =: \Omega$ heißt **Maßraum**.

. . . .

Definition A.3.
Für eine Menge $M \subset \Omega$ sei

$$\chi_M : \Omega \to \{0, 1\},\ t \mapsto \begin{cases} 1 & : \quad t \in M \\ 0 & : \quad t \notin M \end{cases} \tag{A.2}$$

die **charakteristische Funktion** von Ω.

. . . .

Definition A.4.
Der Raum $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\Omega, \Sigma) = [\chi_E : E \in \Sigma]$ heißt **Raum der einfachen Funktionen**[13]. Eine Funktion f heißt **einfach**, wenn ihre Bildmenge endlich ist.

. . . .

Bemerkung A.5.
Jede Funktion $\varepsilon \in \mathcal{E}$ kann in der Form

$$\varepsilon = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \chi_{E_j},\ r \in \mathbb{N}, \tag{A.3}$$

[13] [...] bezeichnet dabei das Erzeugnis.

mit disjunkten $E_j \in \Sigma$ und $\alpha_j \in \Omega$ geschrieben werden.

. . . .

Definition A.6.
Für $\varepsilon \in \mathcal{E}$ mit $\varepsilon > 0$ setzen wir

$$\int\limits_{\Omega} \varepsilon \; \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{r} \alpha_j \mu(E_j) \in [0, \infty] \tag{A.4}$$

und "$0 \cdot \infty = 0$".

. . . .

Definition A.7.

a) Es sei Y ein metrischer Raum. Dann heißt $f : \Omega \to Y$ **Σ-messbar**, falls $f^{-1}(D) \in \Sigma$ für jede offene Menge $D \subset Y$.

b) Für eine messbare Funktion $f : \Omega \to [0, \infty)$ definieren wir mittels

$$\int\limits_{\Omega} f \; \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int\limits_{\Omega} \varepsilon \; \mathrm{d}\mu : \varepsilon \in \mathcal{E},\; 0 \leq \varepsilon \leq f \right\} \in [0, \infty] \tag{A.5}$$

das **Integral von $\boldsymbol{f}$ bezüglich $\boldsymbol{\mu}$.**

c) f heißt **integrierbar**, wenn $\int\limits_{\Omega} |f| \; \mathrm{d}\mu < \infty$ gilt.

. . . .

Beispiel A.8.
Wir betrachten Quader $Q := \prod\limits_{j=1}^{n} I_j \subset \mathbb{R}^n$. Das „anschauliche“ Volumen ist dann gegeben durch

$$\lambda(Q) = \prod_{j=1}^{n} |I_j| \in [0, \infty]. \tag{A.6}$$

Fordert man nun noch Translationsinvarianz, so existiert genau ein Maß, welches λ sinnvoll auf eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^n$ fortsetzt, nämlich gerade das **Lebesguemaß** $\lambda = \lambda^n$ auf $\mathbb{R}^n$.

. . . .

Literaturverzeichnis

[Elstrodt, 2011] Elstrodt, J. (2011). Maß- und Integrationstheorie. Springer, Heidelberg.

[Fischer, 2014] Fischer, G. (2014). Lineare Algebra. Springer Spektrum, Wiesbaden.

[Kaballo, 2000] Kaballo, W. (2000). Einführung in die Analysis I. Spektrum, Heidelberg.

[Kaballo, 2011] Kaballo, W. (2011). Grundkurs Funktionalanalysis. Spektrum, Heidelberg.

[Kaballo, 2014] Kaballo, W. (2014). Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie. Spektrum, Heidelberg.

[Schulte, 2017a] Schulte, M. (2017a). Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit. Seminarvortrag. Verfügbar unter http://www.mschulte-mathematik.de/Seminare-und-Abschlussarbeiten.htm; besucht am 28.03.2018.

[Schulte, 2017b] Schulte, M. (2017b). Mehrdimensionale Integralrechnung, Vektoranalysis und Differentialgleichungen. Kapitel 4. Verfügbar unter http://www.mschulte-mathematik.de/Abgeschlossene-Projekte.htm; besucht am 21.02.2018.

[von Querenburg, 2001] von Querenburg, B. (2001). Mengentheoretische Topologie. Springer, Heidelberg.