Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis II

B.Sc. Matthias Schulte

Version vom 1. November 2019, 20:22 Uhr

Inhaltsverzeichnis

Einleitung, Motivation und Disclaimer

Das vorliegende Skript ist eine digitale Abschrift der Vorlesung **Funktionalanalysis II**, wie sie im **Sommersemester 2019** an der Technischen Universität Dortmund von **Prof. Dr. Rainer Brück** gehalten wurde.

Für etwaige Tippfehler in diesem Skript übernehme ich keine Haftung.

Viel Erfolg (und ein wenig Spaß) mit diesem Skript.

Matthias Schulte, 2019.

4 Hilberträume

4.1 Grundlegende Eigenschaften und Dualraum

Definition 4.1.1. Es sei H ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt. Dann heißt H ein **Prä-Hilbertraum** oder **Innenproduktraum**.
Es gilt dann die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y\rangle} \text{ für } x, y \in H. \tag{4.1}$$

Daher wird durch $||x|| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ eine Norm definiert.
Ist H mit dieser Norm vollständig, so heißt H ein **Hilbertraum**. Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung schreibt sich dann als

$$|\langle x, y\rangle| \leq ||x|| \cdot ||y|| \,. \tag{4.2}$$

....

Beispiel 4.1.2.

a) In $\mathbb{K}^n$ wird durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \;\; x = (x_1, \ldots, x_n), \;\; y := (y_1, \ldots, y_n), \tag{4.3}$$

das kanonische Skalarprodukt definiert. $\mathbb{K}^n$ ist damit ein Hilbertraum.

b) In ℓ^2 wird durch

$$\langle x, y\rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}, \;\; x = (x_n), \;\; y = (y_n) \in \ell_2, \tag{4.4}$$

ein Skalarprodukt definiert und ℓ^2 damit zu einem Hilbertraum.

c) Es sei X ein Maßraum und μ ein positives Maß auf X.[19] Es sei $H := L^2(\mu)$. Dann wird durch

$$\langle f, g\rangle := \int_X f\overline{g} \,\mathrm{d}\mu, \;\; f, g \in H, \tag{4.5}$$

ein Skalarprodukt definiert und damit ist H ein Hilbertraum.

....

[19] Zum Beispiel $X := [0,1]$ und λ das eindimensionale Lebesgue-Maß auf X oder $\mu = \omega \cdot \lambda$ mit einer messbaren Funktion $\omega : [0,1] \to [0, \infty)$.

Satz 4.1.3. Es sei H ein Innenproduktraum und $y \in H$. Dann wird für $x \in H$ durch $\phi_y(x) := \langle x, y\rangle$ ein stetiges lineares Funktional auf H definiert mit $||\phi_y|| = ||y||$.

Beweis. Die Linearität von ϕ folgt aus der Linearität des Skalarprodukts in der ersten Komponente. Aus der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung folgt

$$|\phi_y(x)| = |\langle x, y\rangle| \leq ||y||\,||x||\,.$$

Somit ist $\phi_y \in H'$ und $||\phi_y|| \leq ||y||$. Wegen $\phi_y(y) = ||y||^2$ folgt $||\phi_y|| = ||y||$. ■

. . . .

Eine elementare Rechnung zeigt, dass in Hilberträumen die Parallelogrammgleichung gilt:

$$||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right). \tag{4.6}$$

Man kann zeigen[20], dass sogar die Umkehrung gilt.

Satz 4.1.4. Es sei H ein Innenproduktraum und $\emptyset \neq M \subset H$ konvex und vollständig. Dann existiert genau ein $x_0 \in M$ mit $||x_0|| = \inf\{||x|| : x \in M\}$.

Beweis. Wir setzen $\delta := \inf\{||x|| : x \in M\} \geq 0$.
Anwenden der Parallelogrammgleichung auf $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$ liefert für $x, y \in M$:

$$\frac{1}{4}||x-y|| = \frac{1}{2}||x||^2 + \frac{1}{2}||y||^2 - \frac{1}{4}||x+y||^2 = \frac{1}{2}||x||^2 + \frac{1}{2}||y||^2 - \left|\left|\frac{1}{2}(x+y)\right|\right|^2.$$

Hieraus folgt nun

$$||x-y||^2 \leq 2\left(||x||^2 + ||y||^2\right) - 4\delta^2 \tag{$*$}$$

für $x, y \in M$. Somit folgt die Eindeutigkeit von x_0.
Nach Definition von δ existiert eine Folge (x_n) in M mit $||x_n|| \xrightarrow{n\to\infty} \delta$. Aus $(*)$ folgt, dass (x_n) eine Cauchyfolge in M ist und wegen der Vollständigkeit von M ist (x_n) konvergent gegen ein $x_0 \in M$. Somit haben wir auch die Existenz bewiesen. ■

. . . .

Bemerkung: Die Konvexität von M wird nur für die Eindeutigkeit gebraucht. Die Voraussetzungen des Satzes sind insbesondere erfüllt, wenn H ein Hilbertraum und M abgeschlossen ist.

Definition 4.1.5. Es sei H ein Innenproduktraum und $x, y \in H$ mit $\langle x, y\rangle = 0$. Dann heißen x und y **orthogonal**, in Zeichen $x \perp y$. Ist $M \subset H$ und $x \perp y$ für alle $y \in M$, so schreiben wir $x \perp M$. Weiter sei $M^\perp := \{x \in H : x \perp M\}$. Für $x \in H$ schreiben wir $x^\perp := \{x\}^\perp$.

. . . .

Aus den Eigenschaften des Skalarprodukts folgt, dass $x^\perp$ ein Unterraum von H ist. Da das Funktional ϕ_x aus Satz 4.1.3 stetig und $x^\perp = N(\phi_x)$ ist, ist $x^\perp$ abgeschlossen. Wegen $M^\perp = \bigcap\limits_{x\in M} x^\perp$ ist $M^\perp$ ein abgeschlossener Unterraum von H, unabhängig davon, ob M ein Unterraum ist.

[20]Siehe zum Beispiel hier (Link zu wikibooks.com).

Satz 4.1.6. Es sei H ein Innenproduktraum und M ein vollständiger Unterraum von H. Dann existieren eindeutig bestimmte stetige lineare Abbildungen $P : H \to M$ und $Q : H \to M^{\perp}$ mit

$$x = Px + Qx \quad \text{für } x \in H. \tag{4.7}$$

Diese Abbildungen haben folgende Eigenschaften:

a) Für $x \in M$ ist $Px = x$ und $Qx = 0$.
Für $x \in M^{\perp}$ ist $Px = 0$ und $Qx = x$.

b) Für $x \in H$ ist $||x - Px|| = \inf \{||x - y|| : y \in M\}$.

c) Für $x \in H$ ist $||x||^2 = ||Px||^2 + ||Qx||^2$.

d) Es gilt $||P|| = ||Q|| = 1$.

Insbesondere ist $H = M \oplus M^{\perp}$. Ist zusätzlich $M \neq H$, so existiert ein $y \in H$ mit $y \neq 0$ und $y \in M^{\perp}$, d.h. $M^{\perp} \neq \{0\}$.

Beweis.

1 i) Für $x \in H$ ist $x + M$ konvex und vollständig. Nach Satz 4.1.4 existiert genau ein $Qx \in x + M$ mit $||Qx|| \leq ||y||$ für alle $y \in x + M$. Setze $Px := x - Qx$. Damit gilt (4.7). Wegen $Qx \in x + M$ ist $Px \in M$ und somit gilt $P : H \to M$. Wir zeigen nun $Qx \in M^{\perp}$, d.h. $\langle Qx, y\rangle = 0$ für $y \in M$.
O.B.d.A. sei $||y|| = 1$ und $z = Qx$. Wegen der Minimaleigenschaft von Q_x folgt für jedes $\alpha \in \mathbb{K}$:

$$\langle z, z\rangle = |z|^2 \leq |z - \alpha y|^2 = \langle z - \alpha y, z - \alpha y\rangle .$$

Somit gilt $0 \leq -\alpha \langle y, z\rangle - \overline{\alpha} \langle z, y\rangle + |\alpha|^2$ oder $2\mathrm{Re}(\alpha \langle y, z\rangle) \leq |\alpha|^2$. Setze nun speziell $\alpha = \langle z, y\rangle$. Dann ist $\langle z, y\rangle = 0$. Also ist $Q : H \to M^{\perp}$.

ii) Es sei $x = x_0 + x_1$ mit $x_0 \in M$ und $x_1 \in M^{\perp}$. Dann ist $x_0 - Px = Qx - x_1$. Da $x_0 - Px \in M$ und $Qx - x_1 \in M^{\perp}$ gilt und zudem $M \cap M^{\perp} = \{0\}$ ist, folgt $Px = x_0$ und $Qx = x_1$. Somit sind P und Q eindeutig.

iii) Es seien nun $x, y \in H$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Mit (4.7) folgt dann

$$\underbrace{P(\alpha x + \beta y) - \alpha Px - \beta Py}_{\in M} = \underbrace{\alpha Qx + \beta Qy - Q(\alpha x + \beta y)}_{\in M^{\perp}} .$$

somit ist die linke Seite gleich der rechten Seite, folglich ist also beides 0. Somit sind P, Q linear.

2 a) und c) folgen direkt aus (4.7) und b) folgt aus der Definition von P und Q. Die Stetigkeit von P, Q ergeben sich aus c).

3 Zusatz: Wähle $x \in H$ mit $x \notin M$ und setze $y = Qx$. Da $x \notin M$ und M abgeschlossen ist, ist $Px \neq x$ nach b), also $y \neq 0$.

■

....

Bemerkung: Obige Abbildungen P, Q heißen **orthogonale Projektionen** von H auf M bzw. $M^\perp$.

Satz 4.1.7 (*Darstellungssatz von Fréchet-Riesz*). Es sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H'$ definiert durch $Ty = \phi_y$ mit ϕ_y wie in Satz 4.1.3. Dann ist T bijektiv, isometrisch und konjugiert linear, d.h. es ist $T(\alpha y) = \overline{\alpha} T(y)$.

Beweis. Nach Satz 4.1.3 ist $\phi_y \in H'$ und T ist isometrisch, also injektiv. Wir müssen also noch zeigen, dass T surjektiv ist.
Sei dazu $\phi \in H'$. Ohne Einschränkung sei $\phi(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in H$, denn sonst ist $\phi = \phi_0$. Es sei ferner $M = N(\phi)$. Dann ist M abgeschlossen und somit vollständig mit $M \neq H$. Mit Satz 4.1.6 folgt $M^\perp \neq \{0\}$, somit existiert ein $z \in M^\perp$ mit $||z|| = 1$. Für $x \in H$ setze $u := \phi(x)z - \phi(z)x$, somit ist $\phi(u) = 0$, also $u \in M$. Daher ist $\langle u, z\rangle = 0$ und es folgt

$$\phi(x) = \phi(x) \langle z, z\rangle = \phi(z) \langle x, z\rangle = \left\langle x, \overline{\phi(z)} z \right\rangle.$$

Es folgt damit $\phi = \phi_y$ mit $y = \overline{\phi(z)} z \in H$. ■

....

4.2 Orthonormalsysteme

Definition 4.2.1. Es sei H ein Innenproduktraum. Eine Teilmenge $S \subset H$ heißt **Orthonormalsystem**, kurz ONS, wenn für alle $x, y \in S$ mit $x \neq y$ gilt: $x \perp y$ und $||x|| = 1$.
Ein ONS heißt **maximal**, wenn für jedes ONS T in H mit $S \subset T$ gilt: $S = T$.

Beispiel 4.2.2.

a) In ℓ^2 ist die Menge $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein ONS.

b) In $L^2[0, \pi]$ sei $e_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ für $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ein ONS.

Wir lösen nun die *Gaußsche Approximationsaufgabe*:

Gegeben: Innenproduktraum H, ONS $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ und $x \in H$.
Gesucht: $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $\left|\left| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right|\right| \to \min!$.

Da $M = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$ ein vollständiger Unterraum von H ist, wissen wir nach Satz 4.1.4 und Satz 4.1.6, dass das Problem eindeutig lösbar ist. Wir wollen nun die Lösung konkret bestimmen.
Für beliebige $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ gilt

$$
\begin{aligned}
0 \leq \left|\left| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right|\right|^2 &= \left\langle x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\rangle \\
&= \langle x, x \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \langle x, e_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle e_k, x \rangle + \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_k \overline{\alpha_j} \langle e_k, e_j \rangle \\
&\overset{(*_1)}{=} ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} \overline{\alpha_k} \langle x, e_k \rangle - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\langle x, e_k \rangle} + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \\
&\overset{(*_2)}{=} ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} (\langle x, e_k \rangle - \alpha_k) \left(\overline{\langle x, e_k \rangle} - \overline{\alpha - k} \right) \\
&= ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle - \alpha_k|^2 ,
\end{aligned}
$$

wobei bei $(*_1)$ die Eigenschaft des ONS benutzt und bei $(*_2)$ eine Nulladdition durchgeführt wurde.
Also wird $\left|\left| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right|\right|$ minimal genau dann, wenn $\alpha_k = \hat{x}_k := \langle x, e_k \rangle$ für $k = 1, \dots, n$ gilt.
Die Zahlen $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n$ heißen **Fourierkoeffizienten** von x.
Weiterhin gilt die **Besselsche Gleichung**

$$
\left|\left| x - \sum_{k=1}^{n} \hat{x}_k e_k \right|\right|^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2 \tag{4.8}
$$

und die **Besselsche Ungleichung**

$$
\sum_{k=1}^{n} |\hat{x}_k|^2 \leq ||x||^2 . \tag{4.9}
$$

Wir wollen jetzt auch überabzählbare ONSe betrachten.

Definition 4.2.3. Es sei A eine Indexmenge, E ein normierter Raum und $x_\alpha \in E$ für $\alpha \in A$. Die Familie (x_α) heißt **summierbar zum Wert $x \in E$**, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\mathsf{B}(\varepsilon)$ gibt, so dass für jedes endliche Menge $B \subset A$ mit $\mathsf{B}(\varepsilon) \subset B$ gilt:

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha \right\| < \varepsilon. \tag{4.10}$$

x ist dann eindeutig bestimmt.

. . . .

Lemma 4.2.4. Es sei E ein normierter Raum, A eine Indexmenge, $x_\alpha, y_\alpha \in E$ für $\alpha \in A$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gelten:

a) Ist $\sum\limits_{\alpha \in A} x_\alpha = x$ und $\sum\limits_{\alpha \in A} y_\alpha = y$, so gilt $\sum\limits_{\alpha \in A} (x_\alpha + y_\alpha) = x + y$. Ferner gilt $\sum\limits_{\alpha \in A} \lambda x_\alpha = \lambda x$.

b) Ist E ein Banachraum, so ist $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ summierbar genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\mathsf{B}(\varepsilon) \subset A$ gibt, so dass für jede endliche Menge $B \subset A$ mit $B \cap \mathsf{B}(\varepsilon) = \emptyset$ gilt: $\left\| \sum\limits_{\alpha \in B} x_\alpha \right\| < \varepsilon$. (**Cauchykriterium**)

c) $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist summierbar zum Wert x genau dann, wenn höchstens abzählbar viele $x_\alpha \neq 0$ sind und für jede Abzählung $x_1, x_2, x_3, \dots$ gilt: $\sum\limits_{k \in \mathbb{N}} x_k = x$.

[Hier ohne Beweis.[21]]

. . . .

Lemma 4.2.5. Es sei H ein Innenproduktraum, A eine Indexmenge und $x_\alpha \in H$ für $\alpha \in A$. Dann gelten:

a) Ist $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ summierbar und $x \in H$, so gilt

$$\left\langle \sum_{\alpha \in A} x_\alpha, x \right\rangle = \sum_{\alpha \in A} \langle x_\alpha, x \rangle . \tag{4.11}$$

b) Ist H ein Hilbertraum und sind x_α paarweise orthogonal, so ist (x_α) summierbar genau dann, wenn $\left(||x_\alpha||^2 \right)$ summierbar ist. In diesem Fall gilt:

$$\left\| \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \right\|^2 = \sum_{\alpha \in A} ||x_\alpha||^2 . \tag{4.12}$$

Beweis.

a) Sei $y = \sum\limits_{\alpha \in A}$. Dann gilt für jede endliche Menge $B \subset A$:

$$\left| \langle y, x \rangle - \sum_{\alpha \in B} \langle x_\alpha, x \rangle \right| = \left| \left\langle y - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha, x \right\rangle \right| \le \left\| y - \sum_{\alpha \in B} x_\alpha \right\| ||x|| .$$

Mit Hilfe der Definition folgt hieraus dann leicht die Behauptung.

[21] Ein Beweis dieses Lemmas kann hier gefunden werden.

b) Für $B \subset A$ endlich gilt $\left|\left|\sum_{\alpha\in B} x_\alpha\right|\right|^2 = \sum_{\alpha\in B} ||x_\alpha||^2$. Mit Hilfe des Cauchykriteriums aus Lemma 4.2.4 b) folgt dann die Behauptung.

■

Definition 4.2.6. Es sei H ein Innenproduktraum, A eine Indexmenge, $S := \{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ein ONS und $x \in H$. Dann heißen die Zahlen

$$\hat{x}_\alpha := \langle x, e_\alpha \rangle \tag{4.13}$$

die **Fourierkoeffizienten** von x bezüglich S und die Reihe $\sum_{\alpha\in A} \hat{x}_\alpha e_\alpha$ heißt die **Fourierentwicklung** von x bezüglich S – unabhängig davon, ob die Reihe tatsächlich gegen x konvergiert.

Satz 4.2.7 (*Besselsche Ungleichung*). Es sei H ein Innenproduktraum und $\{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ein ONS. Dann gilt

$$\sum_{\alpha\in A} |\hat{x}_\alpha|^2 \leq ||x||^2 . \tag{4.14}$$

Insbesondere sind höchstens abzählbar viele $\hat{x}_\alpha$ ungleich 0.

Beweis. Folgt sofort aus (4.9). ■

Satz 4.2.8. Es sei H ein Hilbertraum und $S := \{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ein ONS. Dann gelten:

a) Für jedes $x \in H$ ist $(\hat{x}_\alpha e_\alpha)$ summierbar.

b) Die Abbildung $P : H \to H$ definiert durch

$$Px := \sum_{\alpha\in A} \hat{x}_\alpha e_\alpha, \; x \in H, \tag{4.15}$$

ist die *orthogonale Projektion* von H auf $\overline{\langle S \rangle}$ (vgl. Satz 4.1.6).

Beweis.

a) Wegen $||\hat{x}_\alpha e_\alpha||^2 = |\hat{x}_\alpha|^2$ folgt dies sofort aus Lemma 4.2.5 b) und der Besselschen Ungleichung.

b) Es ist zu zeigen: $x - Px \in \overline{\langle S \rangle}^\perp = S^\perp$ für alle $x \in H$. Sei dazu $x \in H$ und $e_\beta \in S$. Dann folgt

$$\begin{aligned}\langle x - Px, e_\beta \rangle &= \left\langle x - \sum_{\alpha\in A} \hat{x}_\alpha e_\alpha, e_\beta \right\rangle \\ &= \langle x, e_\beta \rangle - \sum_{\alpha\in A} \hat{x}_\alpha \langle e_\alpha, e_\beta \rangle \\ &= \langle x, e_\beta \rangle - \hat{x}_\beta = 0.\end{aligned}$$

■

....

Definition 4.2.9. Es sei H ein Innenproduktraum. Ein ONS $S := \{e_\alpha \colon \alpha \in A\}$ heißt **vollständig**, in Zeichen VONS, wenn für jedes $x \in H$ gilt:

$$x = \sum_{\alpha \in A} \hat{x}_\alpha e_\alpha. \tag{4.16}$$

....

Bemerkung: Ein VONS heißt auch **orthonormale Basis** oder **Hilbertbasis** von H. Dies ist nicht zu verwechseln mit der algebraischen Basis von H.

Ziel: Zusammenhang zwischen maximalen und vollständigen ONSen herstellen.
Frage: Hat jeder Hilbertraum ein VONS?

Damit können wir dann Hilberträume charakterisieren.

Satz 4.2.10. Es sei $H \neq \{0\}$ ein Hilbertraum und S ein ONS. Dann existiert ein maximales ONS S' in H mit $S' \supset S$. Insbesondere besitzt H ein maximales ONS.

Beweis. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{M}$ aller ONSe $S' \supset S$. Wegen $S \in \mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Ordne nun $\mathfrak{M}$ durch Mengeninklusion. Dies ist eine induktive Ordnung auf $\mathfrak{M}$. Dann folgt die Behauptung aus dem Lemma von Zorn.
Wähle nun $x \in H$ mit $x \neq 0$ und setze $S = \left\{\frac{x}{||x||}\right\}$. Dann ist S ein ONS und die Existenz eines maximalen ONS folgt aus obiger Aussage. ■

....

Satz 4.2.11. Es sei H ein Innenproduktraum und $S \subset H$ ein ONS. Dann sind äquivalent:

a) S ist maximal.

b) Es ist $S^\perp = \{0\}$.

Beweis. b) $\Rightarrow$ a): Klar.
a) $\Rightarrow$ b): Wir nehmen an, dass ein $x \in S^\perp$ existiert mit $x \neq 0$. Dann ist $S' := S \cup \left\{\frac{x}{||x||}\right\} \supsetneq S$ ein ONS, im Widerspruch zur Maximalität. ■

....

Satz 4.2.12. Es sei H ein Innenproduktraum und $S := \{e_\alpha \colon \alpha \in A\}$ ein ONS. Dann sind äquivalent:

a) $\overline{\langle S \rangle} = H$.

b) S ist ein VONS.

c) Für $x, y \in H$ gilt $\langle x, y\rangle = \sum\limits_{\alpha \in A} \hat{x}_\alpha \overline{\hat{y}_\alpha}$.

d) Für $x \in H$ gilt die *Parsevalsche Gleichung*:

$$||x||^2 = \sum_{\alpha \in A} |\hat{x}_\alpha|^2 . \tag{4.17}$$

[Hier ohne Beweis.[22]]

Satz 4.2.13. Es sei H ein Innenproduktraum und S ein ONS. Ist S vollständig, so auch maximal. Ist H ein Hilbertraum, so sind die Begriffe VONS und maximales ONS äquivalent. Insbesondere besitzt jeder Hilbertraum ein VONS.

Beweis. Ist S vollständig und $x \perp S$, so folgt sofort, dass $x = 0$, da alle Fourierkoeffizienten gleich 0 sein müssen. Nach Satz 4.2.11 ist S maximal.
Nun sei umgekehrt S maximal und H ein Hilbertraum. Wir setzen $M := \overline{\langle S\rangle}$. Dann ist M ein abgeschlossener Unterraum von H und damit vollständig. Wäre $H \neq M$, so gäbe es nach Satz 4.1.6 ein $x \neq 0$ mit $x \perp M$. Dies ist ein Widerspruch zu Satz 4.2.11. Damit folgt die Behauptung aus Satz 4.2.12. Die letzte Aussage folgt jetzt sofort aus Satz 4.2.10. ■

Wir betrachten nochmals die Beispiele aus Beispiel 4.2.2 und zeigen, dass diese ONSe sogar vollständig sind.

Beispiel 4.2.14.

a) Es sei $H = \ell^2$ und $S := \{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ die Menge der Einheitsvektoren. Offensichtlich ist $\overline{\langle S\rangle} = \ell^2$. Damit ist S vollständig.

b) Allgemeiner sei A eine Indexmenge, $H = L^2(\mu)$, wobei μ das Zählmaß auf A ist. Alternative Beschreibung:

$$\ell^2(A) = \left\{x : A \to \mathbb{K} \colon \left(|x(\alpha)|^2\right)_{\alpha\in A} \text{ ist summierbar}\right\}. \tag{4.18}$$

Für $\alpha \in A$ sei $e_\alpha \in \ell^2(A)$ definiert durch $e_\alpha(\zeta) = (\delta_{\zeta,\alpha})_{\alpha\in A}$. Dann ist $S := \{e_\alpha : \alpha \in A\}$ ein VONS.

c) Es sei $H := L^2[0, 2\pi]$. Dann ist mit $e_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ durch $S := \{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ ein ONS gegeben. Es ist S die Menge aller trigonometrischen Polynome und nach dem Weierstraßschen Approximationssatz liegen diese dicht in $(C[a, b], ||\cdot||_{\max})$, daher auch bezüglich der $||\cdot||_2$-Norm, denn $||\cdot||_2 \le \sqrt{2\pi}\, ||\cdot||_{\max}$ für $f \in C[0, 2\pi]$. Die Vollständigkeit dieses ONS folgt nun aus dem nächsten Satz.

Satz 4.2.15. Für $1 \le p < \infty$ ist $C[a, b]$ dicht in $L^p[a, b]$.
[Hier ohne Beweis.[23]]

Satz 4.2.16. Es sei H ein Hilbertraum. Dann ist H' isometrisch isomorph zu H.

Beweis. Wir wählen ein VONS $S := \{e_\alpha : \alpha \in A\}$ und definieren $T : H \to H$ durch $Tx := \sum_{\alpha\in A} \overline{\hat{x}_\alpha} e_\alpha$. Dann ist T eine konjugiert lineare Isometrie von H auf H. Nach dem Satz von Fréchet-Riesz existiert zu $\varphi \in H'$ genau ein x_φ mit $\varphi(x) = \langle x, x_\varphi\rangle$. Nun definieren wir $\phi : H' \to H$ durch $\phi(\varphi) := Tx_\varphi$. Dann ist ϕ ein isometrischer Isomorphismus. ■

[22] Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.
[23] Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.

Satz 4.2.17. Jeder Hilbertraum ist reflexiv.

Beweis. Wir benutzen die Bezeichnungen des vorigen Beweises.
Durch $\langle \phi, \psi \rangle := \langle x_\psi, x_\phi \rangle$ wird ein Skalarprodukt auf H' definiert, das die Norm von H' induziert. Wir zeigen jetzt, dass die kanonische Einbettung $J_H : H \to H''$ surjektiv ist.
Dazu sei $F \in H''$ gegeben. Nach dem Satz von Fréchet-Riesz gibt es genau ein $\varphi_F \in H'$ mit $F(\varphi) = \langle \varphi, \varphi_F \rangle$ für alle $\varphi \in H'$. Nun folgt $F(\varphi) = \langle x_{\varphi_F}, x_\varphi \rangle = \varphi(x_{\varphi_F}) = (J_H x_{\varphi_F})(\varphi)$, also ist $J_H x_{\varphi_F} = F$ und J_H somit surjektiv. ■

. . . .

Bemerkung: Für zwei Mengen X, Y schreiben wir $\operatorname{card}(X) \leq \operatorname{card}(Y)$, falls es eine injektive Abbildung von X auf Y gibt.

Satz 4.2.18. Es seien H ein Hilbertraum und T, S vollständige ONSe. Dann sind T und S gleichmächtig.

Beweis. Ist S endlich, so ist die Behauptung klar.
Sei also $\operatorname{card}(S) \geq \operatorname{card}(\mathbb{N})$. Für $x \in S$ sei $T_x := \{y \in T \colon \langle x, y \rangle \neq 0\}$. Nach Bessel-Ungleichung ist $\operatorname{card}(T_x) \leq \operatorname{card}(\mathbb{N})$, da in T_x nur Fourier-Koeffizienten enthalten sind und daher nur abzählbar viele ungleich 0 sind. Wegen Satz 4.2.13 ist S maximal, also ist $\operatorname{card}(T) \leq \operatorname{card}(S) \cdot \operatorname{card}(\mathbb{N}) = \operatorname{card}(S)$. Analog zeigt man $\operatorname{card}(S) \leq \operatorname{card}(T)$. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Bernstein-Schröder. ■

. . . .

Satz 4.2.19. Es sei H ein Hilbertraum. Dann existiert eine Indexmenge A, sodass H isometrisch isomorph zu $\ell^2(A)$ ist.

Beweis. Wir wählen ein VONS $S := \{e_\alpha \colon \alpha \in A\}$ und definieren $T : H \to \ell^2(A)$ durch $(Tx)(\alpha) = \langle x, e_\alpha \rangle = \hat{x}_\alpha$. Wegen der Besselungleichung ist tatsächlich $Tx \in \ell^2(A)$. T ist offenbar linear und wegen der Parsevalschen Gleichung eine Isometrie. Wir müssen nun noch zeigen, dass T surjektiv ist.
Dazu sei $(x_\alpha)_{\alpha \in A} \in \ell^2(A)$. Wir setzen $x = \sum\limits_{\alpha \in A} x_\alpha e_\alpha$. Wie im Beweis von 4.2.8 a) zeigt man, dass die Reihe konvergiert, d.h. $x \in H$. Damit ist $(Tx)(\alpha) = (x_\alpha)_{\alpha \in A}$. ■

. . . .

Schließlich wollen wir noch separable Hilberträume charakterisieren.

Satz 4.2.20. Es sei H ein Hilbertraum und $\dim H = \infty$. Dann sind äquivalent:

a) H ist separabel.

b) Jedes VONS ist abzählbar.

c) Es gibt ein abzählbares VONS.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b):
Es sei V ein VONS. Dann gilt $||x - y|| = \sqrt{2}$ für alle $x, y \in S$ mit $x \neq y$.
Annahme: S sei überabzählbar. Nun sei A eine (beliebige) abzählbare Teilmenge von S und für $x \in A$ sei $B_x := \left\{y \in H \colon ||x - y|| < \frac{1}{2}\right\}$. Sind $y, z \in B_x \cap S$ für ein $x \in A$, so ist $||y - z|| < 1$, also ist $y = z$ wegen $1 < \sqrt{2}$. Daher enthält $B_x \cap S$ höchstens einen Punkt. Da S überabzählbar ist, gibt es ein $y \in S$ mit $y \notin \bigcup\limits_{x \in A} B_x$. Somit ist A nicht dicht in H, was ein Widerspruch zur Separabilität ist, da A beliebig war.

b) $\Rightarrow$ c):
Ist klar.
c) $\Rightarrow$ a):
Folgt aus Satz 4.2.12 und Lemma 3.1.7. ■

Folgerung 4.2.21. Es sei H ein separabler Hilbertraum. Dann ist H isometrisch isomorph zu ℓ^2.

Satz 4.2.22 (*Fischer-Riesz*). Die Hilberträume $L^2[0,1]$ und ℓ^2 sind isometrisch isomorph.

Abschließend wollen wir die erzielten Ergebnisse über Hilberträume noch in der Sprache der klassischen Fourieranalysis formulieren.
Ist $f \in L^1[0,2\pi]$, so sind die Fourier-Koeffizienten von f definiert durch

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} \, \mathrm{d}t, \; n \in \mathbb{Z}. \tag{4.19}$$

Wir betrachten die formale Fourierreihe

$$f(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n e^{int} \tag{4.20}$$

und deren Teilsummen

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}_n e^{int}, \; N \in \mathbb{Z}. \tag{4.21}$$

Da $L^2[0,2\pi] \subset L^1[0,2\pi]$ gilt, sind die Fourierkoeffizienten auch für L^2-Funktionen definiert und mit der Besselschen Ungleichung folgt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}_n \right|^2 < \infty. \tag{4.22}$$

Ist umgekehrt (c_n) eine Folge in ℓ^2, d.h. mit $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, so existiert nach dem Satz von Fischer-Riesz ein $f \in L^2[0,2\pi]$ mit $\hat{f}_n = c_n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.
Die Parsevalsche Gleichung lautet nun

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}_n \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \mathrm{d}t \text{ oder } \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}_n \overline{\hat{g}_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} \, \mathrm{d}t, \; f \in L^2[0,2\pi]. \tag{4.23}$$

Schließlich gilt noch $\lim\limits_{N \to \infty} ||f - S_N||_2 = 0$ für $f \in L^2[0,2\pi]$, d.h. die Teilsummen der Fourierreihen konvergieren im quadratischen Mittel gegen f.

4.3 Operatoren in Hilberträumen

Satz 4.3.1. Es seien H und K Hilberträume. Dann existiert zu jedem Operator $T \in L(H,K)$ ein eindeutig bestimmter Operator $T^* \in L(K,H)$ mit

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle \text{ für } x \in H,\ y \in K. \tag{4.24}$$

T^* heißt der zu T **adjungierte Operator**. Weiterhin gilt:

a) $||T^*|| = ||T||$.

b) $(\alpha S + \beta T)^* = \overline{\alpha} S^* + \overline{\beta} T^*$.

c) $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$, $S \in L(K,M)$, M geeigneter Hilbertraum.

d) $T^{**} = T$.

e) $||TT^*|| = ||T^*T|| = ||T||^2$.

f) $N(T) = R(T^*)^\perp$, $N(T^*) = R(T)^\perp$.

Beweis.

- Die Eindeutigkeit folgt sofort aus (4.24).
- Es seien $\phi : H \to H'$ und $\psi : K \to K'$ die konjugiert linearen Isometrien aus dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz. Weiter sei $T' : K' \to H'$ der duale Operator von T gemäß Satz 3.2.1. Wir setzen $T^* := \phi^{-1} \circ T' \circ \psi \in L(K,H)$. Dann erfüllt T Gleichung (4.24).
- Die Aussagen a) bis c) ergeben sich aus den entsprechenden Aussagen über T' aus Satz 3.2.1.
- d) folgt sofort aus (4.24) und der Eindeutigkeit.
- Für $x \in H$ gilt

  $$||Tx||^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle x, T^*Tx\rangle \le ||x||^2\, ||T^*T||\,.$$

  Daher gilt $||T||^2 \le ||T^*T|| \le ||T^*||\,||T|| \le ||T||^2$ nach a), also gilt $||T||^2 = ||T^*T||$. Mit $||T||^2 = ||T^*||^2 = ||T^{**}T^*|| = ||TT^*||$ folgt dann e).
- Es ist

  $$x \in N(T) \Leftrightarrow Tx = 0 \Leftrightarrow \langle Tx, y\rangle = 0\ \forall y \in K \Leftrightarrow \langle x, T^*y\rangle = 0\ \forall y \in K \Leftrightarrow x \in R(T^*)^\perp.$$

  Somit ist $N(T) = R(T^*)^\perp$. Hieraus folgt $N(T^*) = R(T^{**})^\perp = R(T)^\perp$. Damit ist auch f) bewiesen.

■

Bemerkung:

- Man beachte, dass es einen Unterschied zwischen T^* und dem dualen Operator T' gibt. Die Abbildung $T \mapsto T'$ ist linear, während die Abbildung $T \mapsto T^*$ konjugiert linear ist.

- Ist T ein Operator zwischen endlichdimensionalen Räumen, so wird T durch eine Matrix A dargestellt. T' entspricht dann die transponierte Matrix A^T, T^* die konjugiert transponierte Matrix $\overline{A}^T$.

Wir betrachten jetzt spezielle Klassen von Operatoren. Den identischen Operator bezeichnen wir mit $id : H \to H$, $x \mapsto id(x) = x$. Weitere Bezeichnungen sind I_H oder I.

Definition 4.3.2. Es seien H, K Hilberträume und $T \in L(H, K)$.

- T heißt **unitär**, wenn $TT^* = I_K$ und $T^*T = I_H$ gilt.
- Ist $K = H$, so heißt T **selbstadjungiert**, falls $T^* = T$ ist.
- Ist $K = H$, so heißt T **normal**, wenn $T^*T = TT^*$ gilt.

....

Offensichtlich gilt für $K = H$: Ist T selbstadjungiert oder unitär, so ist er auch normal.
Ist H ein reeller Hilbertraum, so nennt man einen selbstadjungierten Operator auch **symmetrisch** und einen unitären Operator auch **orthogonal**.

Satz 4.3.3 (*Hellinger-Toeplitz*). Es sei H ein Hilbertraum und $T : H \to H$ linear und es gelte

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle$$

für $x, y \in H$. Dann ist $T \in L(H)$ und daher selbstadjungiert.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, dass T stetig ist. Dies zeigen wir mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen unter Verwendung von Lemma 2.4.4.
Dazu sei (x_n) eine Folge in H mit $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} y$. Wegen der Stetigkeit des Skalarprodukts gilt

$$\langle y, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Tx_n, y \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, Ty \rangle = \langle 0, Ty \rangle = 0.$$

Damit folgt die Behauptung. ∎

....

Satz 4.3.4. Es sei H ein komplexer Hilbertraum und $T \in L(H)$. Dann sind äquivalent:

a) T ist selbstadjungiert.

b) $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in H$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b):
Für $x \in H$ gilt $\langle Tx, x \rangle = \langle x, T^*x \rangle = \langle x, Tx \rangle = \overline{\langle Tx, x \rangle}$. Damit folgt die Behauptung.
b) $\Rightarrow$ a):
Für $\lambda \in \mathbb{C}$ betrachten wir die reelle Zahl

$$\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y \rangle = \langle Tx, x \rangle + \overline{\lambda} \langle Tx, y \rangle + \lambda \langle Ty, x \rangle + |\lambda|^2 \langle Ty, y \rangle . \tag{$*_1$}$$

Komplexe Konjugation ergibt

$$\langle T(x + \lambda y), x + \lambda y \rangle = \langle Tx, x \rangle + \lambda \langle y, Tx \rangle + \overline{\lambda} \langle x, Ty \rangle + |\lambda|^2 \langle Ty, y \rangle . \tag{$*_2$}$$

Setze in ($*_1$) $\lambda = 1$ und in ($*_2$) $\lambda = \mathrm{i}$ und setze anschließend beide Gleichungen gleich. Damit erhalten wir

$$\langle Tx, y\rangle + \langle Ty, x\rangle = \langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle \text{ und } \langle Tx, y\rangle - \langle Ty, x\rangle = -\langle y, Tx\rangle + \langle x, Ty\rangle .$$

Addition dieser beiden Gleichungen und Anwenden von Satz 4.3.3 liefert die Behauptung. ■

. . . .

Satz 4.3.5. Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ selbstadjungiert. Dann gilt

$$||T|| = \sup_{x \in B_H} |\langle Tx, x\rangle| . \tag{4.25}$$

Beweis. Wir setzen $M := \sup\limits_{x \in B_H} |\langle Tx, x\rangle|$. Dann gilt $||T|| \geq M$.
Wegen $T^* = T$ ist

$$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle Ty, x\rangle = 2\langle Tx, y\rangle + 2\overline{\langle Tx, y\rangle} = 4\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle .$$

Mit $|\langle Tx, x\rangle| \leq M\,||x||^2$ für $x \in H$ erhält man aus der Parallelogrammgleichung

$$4\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle \leq M\left(||x+y||^2 + ||x-y||^2\right) = 2M\left(||x||^2 + ||y||^2\right).$$

Daher gilt $\mathrm{Re}\,\langle Tx, y\rangle \leq M$ für $x, y \in B_H$. Ist $\langle Tx, y\rangle = e^{\mathrm{i}\vartheta}\,|\langle Tx, y\rangle|$, so ersetzen wir x durch $e^{\mathrm{i}\vartheta}x$ und erhalten $|\langle Tx, y\rangle| \leq M$. Durch Supremumsbildung über B_H folgt nun die Behauptung. ■

. . . .

Folgerung 4.3.6. Es sei H ein Hilbertraum, $T \in L(H)$ selbstadjungiert und $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in B_H$. Dann ist $T \equiv 0$.

. . . .

Bemerkung:
Dieser Eindeutigkkeitssatz ist i.A. falsch, wenn H ein reeller Hilbertraum und T nicht selbstadjungiert ist. Beispiel: $H = \mathbb{R}^2$, T Drehung um 90 Grad. Ist aber H komplex, so gilt der Satz auch ohne die Voraussetzung, dass T selbstadjungiert ist.

Satz 4.3.7. Es sei H ein komplexer Hilbertraum und $\langle Tx, x\rangle = 0$ für alle $x \in H$. Dann ist $T \equiv 0$.

Beweis. Nach Satz 4.3.4 ist T selbstadjungiert. Nun folgt die Behauptung. ■

. . . .

Satz 4.3.8. Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$. Dann sind äquivalent:

a) T ist normal.

b) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$ für $x, y \in H$.

c) $||Tx|| = ||T^*x||$ für $x \in H$.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Da T normal ist, folgt $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, T^*Ty\rangle = \langle x, TT^*y\rangle = \langle T^*x, T^*y\rangle$.

b) $\Rightarrow$ c):
Setze $x = y$.
c) $\Rightarrow$ a):
Es folgt

$$\langle T^*Tx, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = ||Tx||^2 = ||T^*T||^2 = \langle T^*x, T^*x\rangle = \langle TT^*x, x\rangle .$$

Bilde nun die Differenz aus linker und rechter Seite und wende Folgerung 4.3.6 an. Dann folgt die Behauptung. ■

Folgerung 4.3.9. Es sei H ein Hilbertraum und $T \in L(H)$ normal. Dann gilt $N(T) = N(T^*) = R(T)^\perp = R(T^*)^\perp$.

Beweis. Folgt aus Satz 4.3.1 f) und Satz 4.3.8. ■

Satz 4.3.10. Es seien H, K Innenprodukträume und $T \in L(H, K)$. Dann sind äquivalent:

a) T ist Isometrie.

b) $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ für $x, y \in H$.

Beweis.
b) $\Rightarrow$ a):
Setze $x = y$.
a) $\Rightarrow$ b):
Es seien $x, y \in H$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann gilt

$$\langle T(x + \lambda y), T(x + \lambda y)\rangle = ||Tx||^2 + 2\mathrm{Re}\overline{\lambda} \langle Tx, Ty\rangle + |\lambda|^2 ||y||^2 .$$

Andererseits gilt

$$\langle T(x + \lambda y), T(x + \lambda y)\rangle = ||x + \lambda y||^2 = ||x||^2 + 2\mathrm{Re}\overline{\lambda} \langle x, y\rangle + |\lambda|^2 ||y||^2 .$$

Subtraktion beider Gleichungen liefert

$$\mathrm{Re}\overline{\lambda} \langle Tx, Ty\rangle = \mathrm{Re}\overline{\lambda} \langle x, y\rangle .$$

Man setzt nun $\lambda = 1$ (dann fertig, wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) und dann $\lambda = \mathrm{i}$ (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) und erhält die Behauptung. ■

Satz 4.3.11. Es seien H, K Hilberträume und $T \in L(H, K)$. Dann sind äquivalent:

a) T unitär.

b) T surjektiv und $\langle Tx, Ty\rangle = \langle x, y\rangle$ für $x, y \in H$.

c) T ist ein isometrischer Isomorphismus.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Es sei $z \in K$. Wir setzen $x = T^*z \in H$. Dann ist $Tx = TT^*z = Iz = z$. Somit ist T surjektiv. Weiter folgt $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, T^*Ty \rangle = \langle x, y \rangle$.
b) $\Rightarrow$ a):
Für $x, y \in H$ gilt $\langle T^*Tx, y \rangle = \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$. Somit gilt $\langle T^*Tx - x, y \rangle = 0$ für alle $x, y \in H$ und somit ist $T^*T = I$. Analog zeigt man $TT^* = I$.
b) $\Leftrightarrow$ c):
Folgt aus Satz 4.3.10. ■

. . . .

5 Schwache Topologien

5.1 Topologische Vorbereitungen

Definition 5.1.1. Es sei X eine Menge und $\mathcal{F} \neq \emptyset$ eine Familie von Abbildungen $f : X \to Y_f$, wobei jedes Y_f ein topologischer Raum ist[24]. Sei $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ das System aller endlichen Durchschnitte der Mengen $f^{-1}(V)$ mit $f \in \mathcal{F}$ und $V \subset Y_f$ offen. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und jedes $f \in \mathcal{F}$ ist stetig. $\mathcal{T}$ ist die schwächste solche Topologie.
$\mathcal{T}$ heißt die **von $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ induzierte Topologie auf $\boldsymbol{X}$** oder kurz **$\boldsymbol{\mathcal{F}}$-Topologie** auf X.

....

Nun sei jedes Y_f ein Hausdorffraum und $\mathcal{F}$ punktetrennend auf X, d.h. zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert ein $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x) \neq f(y)$. Dann ist X ein Hausdorffraum.

Beispiel 5.1.2. Es sei A eine Indexmenge und $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine Familie topologischer Räume mit $X_\alpha \neq \emptyset$ für alle $\alpha \in A$. Weiter sei

$$X := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \left\{ f : \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha : f(\alpha) \in X_\alpha \right\} \tag{5.1}$$

das kartesische Produkt der X_α. Nach dem Auswahlaxiom gilt $X \neq \emptyset$. Dann ist die *Produkttopologie* die $\{\pi_\alpha\}$-Topologie auf X, wobei $\pi_\alpha : X \to X_\alpha,\ x \mapsto x(\alpha)$ die kanonischen Projektionen sind.
Ist Y ein weiterer topologischer Raum und $f : Y \to X$ eine Abbildung, so ist f stetig genau dann, wenn alle Koordinatenabbildungen $f_\alpha := \pi_\alpha \circ f : Y \to X_\alpha$ stetig sind.
Ist jedes X_α ein Hausdorffraum, so auch X, denn sind $x = (x_\alpha)$ und $y = (y_\alpha)$ aus X mit $x \neq y$, so existiert $\alpha \in A$ mit $x_\alpha \neq y_\alpha$. Somit gilt $\pi_\alpha(x) \neq \pi_\alpha(y)$, somit ist $\{\pi_\alpha : \alpha \in A\}$ punktetrennend.

....

Jetzt benötigen wir einen der wichtigsten Sätze über die Produkttopologie. Dazu sind einige Vorbereitungen nötig.

Definition 5.1.3. Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. $\mathcal{S}$ heißt **Subbasis** von $\mathcal{T}$, wenn die Menge aller endlichen Durchschnitte von Elementen aus $\mathcal{S}$ eine Basis von $\mathcal{T}$ bilden.
Ist $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ und $\cup\{U \subset X : U \in \mathcal{S}'\} = X$, so nennt man $\mathcal{S}'$ eine **$\boldsymbol{\mathcal{S}'}$-Überdeckung von $\boldsymbol{X}$**.

....

Satz 5.1.4 (*Subbasensatz von Alexander*). Ist X ein topologischer Raum, $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Topologie und jede $\mathcal{S}$-Überdeckung von X besitze eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist X kompakt.

Beweis. Wir nehmen an, dass X nicht kompakt ist und betrachten das System $\mathcal{P}$ aller Überdeckungen von X, die keine endliche Teilüberdeckung besitzen.
Nach Annahme ist $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Wir führen auf $\mathcal{P}$ eine Ordnung durch die Mengeninklusion $\subset$ ein. Dann ist $\mathcal{P}$ induktiv geordnet, denn ist $\mathcal{K}$ eine Kette in $\mathcal{P}$, so ist $\bigcup\limits_{K \in \mathcal{K}} K$ eine obere Schranke.
Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $\Gamma \in \mathcal{P}$. Dann gilt

[24] In vielen Fällen sind die Y_f alle gleich.

a) Γ ist eine offene Überdeckung von X.

b) Γ besitzt keine endliche Teilüberdeckung.

c) Für jedes $U \subset X$ offen mit $U \notin \Gamma$ besitzt $\Gamma \subset \{U\}$ eine endliche Teilüberdeckung, da Γ maximal ist.

Wir setzen $\hat{\Gamma} := \Gamma \cap \mathcal{S}$. Nach b) besitzt $\hat{\Gamma}$ keine endliche Teilüberdeckung. Daher bleibt zu zeigen, dass $\hat{\Gamma}$ eine Überdeckung von X ist. Das wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung, dass jede $\mathcal{S}$-Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Wir nehmen an, dass dies nicht der Fall ist. Dann existiert ein $x \in X$, das durch $\hat{\Gamma}$ nicht überdeckt wird. Nach a) existiert $V \in \Gamma$ mit $x \in V$. Da $\mathcal{S}$ eine Subbasis ist, existieren $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{S}$ mit $x \in U_1 \cap \ldots \cap U_n \subset V$ und $U_k \notin \Gamma$ für $k = 1, \ldots, n$. Nach c) gibt es zu jedem $k \in \{1, \ldots, n\}$ endlich viele $W_{k,1}, \ldots, W_{k,m_k} \in \Gamma$ mit $X = U_k \cup W_k$, wobei $W_k = W_{k,1} \cup \ldots \cup w_{k,m_k}$. Dann ist

$$X = W_1 \cup \ldots W_n \cup \bigcap_{k=1}^{n} U_k \subset W_1 \cup \ldots W_n \cup V.$$

Dies ist ein Widerspruch zu b) und somit folgt die Behauptung. ■

....

Satz 5.1.5 (*Satz von Tychonoff*). Es sei A eine Indexmenge und X_α, $\alpha \in A$, topologische Räume. Dann gilt:
$\Pi := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ kompakt. $\Leftrightarrow$ X_α kompakt für alle $\alpha \in A$.

Beweis.
"$\Rightarrow$":
Ist π kompakt, so auch $X_\alpha = \pi_\alpha(\Pi)$, da π_α stetig.
"$\Leftarrow$":
Für $\alpha \in A$ sei $\mathcal{S}_\alpha := \left\{\pi_\alpha^{-1}(V_\alpha) \colon V_\alpha \subset X_\alpha \text{ offen}\right\}$ und $\mathcal{S} := \bigcup \{\mathcal{S}_\alpha \colon \alpha \in A\}$. Dann ist $\mathcal{S}$ eine Subbasis der Produkttopologie. Sei Γ eine $\mathcal{S}$-Überdeckung von Π und $\Gamma_\alpha = \Gamma \cap \mathcal{S}_\alpha$.
Annahme: Kein Γ_α ist eine Überdeckung von Π.
Dann existiert zu jedem $\alpha \in A$ ein $x_\alpha \in X_\alpha$, sodass Γ_α keinen Punkte von $\pi_\alpha^{-1}(X_\alpha)$ überdeckt. Wir wählen $x \in \Pi$ so, dass $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$ für alle $\alpha \in A$ gilt. Dann wird x durch Γ nicht überdeckt. Dies ist ein Widerspruch.
Also gibt es ein $\alpha \in A$, sodass Γ_α eine Überdeckung von Π ist. Dann ist $\pi_\alpha(\Gamma_\alpha) = \{\pi_\alpha(U) \colon U \in \Gamma_\alpha\}$ eine Überdeckung von X_α. Da X_α kompakt ist, besitzt $\pi_\alpha(\Gamma_\alpha)$ eine endliche Teilüberdeckung. Somit hat Γ_α eine endliche Teilüberdeckung von Π und damit auch Γ, da $\Gamma_\alpha \subset \Gamma$ ist. Nach dem Subbasensatz von Alexander ist dann Π kompakt. ■

....

5.2 Die schwache Topologie eines TVR

Für viele Anwendungen ist es nützlich, dass in TVRen möglichst „viele" Folgen konvergent und möglichst „viele" Mengen kompakt sind, ohne die Stetigkeit der stetigen linearen Funktionale zu zerstören. Dazu benötigen wir ein vorbereitendes Lemma.

Lemma 5.2.1. Es sei E ein VR, $\phi_1, \ldots, \phi_n, \phi \in E^*$ und $N := \{x \in E \colon \phi_1(x) = \ldots = \phi_n(x) = 0\}$. Dann sind äquivalent:

a) Es gibt $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $\phi = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k$.

b) Es gibt eine Konstante $M < \infty$ mit $|\phi(x)| \leq M \cdot \max\limits_{1 \leq k \leq n} |\phi_k(x)|$ für $x \in E$.

c) Es gilt $\phi(x) = 0$ für $x \in N$.

Beweis. a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) sind klar.
c) $\Rightarrow$ a):
Definiere $\Pi : E \to \mathbb{K}^n$ durch $\Pi(x) := (\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))$. Ist $\Pi(x) = \Pi(x')$, so gilt $\phi(x) = \phi(x')$. Also ist $\phi = F \circ \pi$, wobei F ein lineares Funktional auf $\mathbb{K}^n$ ist. Dann existieren $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ mit $F(u_1, \ldots, u_n) = \alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_n u_n$. Somit ist $\phi(x) = F((\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x))) = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k(x)$. ∎

Satz 5.2.2. Es sei E ein Vektorraum, $\tilde{E}$ ein Unterraum von E^*, $\tilde{E}$ sei punktetrennend und $\tilde{T}$ die $\tilde{E}$-Topologie auf E. Dann ist $(E, \tilde{T})$ ein lokalkonvexer TVR und $(E, \tilde{T})' = \tilde{E}$.

Beweis. Für $\phi \in \tilde{E}$ definieren wir $p_\phi(x) = |\phi(x)|$ für $x \in E$. Dann ist $\mathcal{P} := \left\{p_\phi \colon \phi \in \tilde{E}\right\}$ eine punktetrennende Familie von Halbnormen auf E, die gemäß Satz 1.5.5 eine lokalkonvexe Tpologie $\mathcal{T}$ auf E erzeugt. Aus der Definition der $\tilde{E}$-Topologie folgt sofort, dass $\mathcal{T} = \tilde{\mathcal{T}}$. Jedes $\phi \in \tilde{E}$ ist automatisch stetig. Nun sei umgekehrt $\phi \in E^*$ stetig. Dann existieren $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \tilde{E}$ und eine Konstante $M < \infty$, sodass die Bedingung in Lemma 5.2.1 erfüllt ist. Also gilt a). Somit ist $\phi \in \tilde{E}$, also ist $(E, \tilde{\mathcal{T}})' = \tilde{E}$. ∎

Definition 5.2.3. Es sei E ein topologischer Vektorraum und E' sei punktetrennend auf E.[25] Dann heißt die E'-Topologie auf E die **schwache Topologie** auf E oder die $\sigma(E, E')$-Topologie auf E. Wir bezeichnen diese Topologie mit $\mathcal{T}_w$ und statt $(E, \mathcal{T}_w)$ schreiben wir E_w.
Nach Satz 5.2.2 ist E_w lokalkonvex und $(E_w)' = E'$. Da jedes $\phi \in E'$ $\mathcal{T}$-stetig ist und $\mathcal{T}_w$ die schwächste solche Topologie ist, gilt $\mathcal{T}_w \subset \mathcal{T}$.
Im Folgenden benutzen wir häufig Begriffe wie *schwache Nullumgebung*, *schwach konvergent*, *schwach kompakt*, und so weiter. Damit sind die entsprechenden Begriffe in der schwachen Topologie gemeint.
Ist (x_n) eine Folge in E, die schwach gegen ein $x \in E$ konvergiert, so schreiben wir $x_n \xrightarrow{\sigma} x$ $(n \to \infty)$.

Satz 5.2.4. Es sei E ein topologischer Vektorraum und E' punktetrennend auf E. Dann gelten:

[25] Dies ist wegen des Satzes von Hahn-Banach zum Beispiel der Fall, wenn E lokalkonvex ist.

a) Eine Folge (x_n) in E konvergiert schwach gegen ein $x \in E$ genau dann, wenn $\phi(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \phi(x)$ für jedes $\phi \in E'$ gilt. Insbesondere ist jede konvergente Folge auch schwach konvergent.

b) Eine Menge $M \subset E$ ist schwach beschränkt genau dann, wenn jedes $\phi \in E'$ auf M beschränkt ist. Insbesondere ist jede beschränkte Menge schwach beschränkt.

Beweis. Die Aussagen folgen leicht aus der Tatsache, dass jede schwache Nullumgebung eine Menge der Form

$$V := \{x \in E\colon\ |\phi_k(x)| < r,\ k = 1, \ldots, n,\ r > 0\} \tag{5.2}$$

enthält. Die Einzelheiten überlassen wir dem Leser. ■

....

Satz 5.2.5. Es sei E ein unendlichdimensionaler topologischer Vektorraum und E' punktetrennend auf E. Dann enthält jedes schwache Nullumgebung U von E einen unendlichdimensionalen Vektorraum. Insbesondere ist E_w nicht lokal beschränkt und daher ist E_w nie normierbar.

Beweis. Nach Definition von $\mathcal{T}_w$ enthält U eine Menge der Form wie in (5.2). Wir setzen $N := \{x \in E\colon \phi_k(x) = 0,\ k = 1, \ldots, n\}$. Dann ist N ein Unterraum von E. Wir definieren nun $T : E \to \mathbb{K}^n$ durch $Tx := \{\phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)\}$. Dann ist $N(T) = N$ und es ist $T(E) = \mathbb{K}^n$. Mit dem Homomorphiesatz folgt ${}^{E}\!/\!_{N} \cong \mathbb{K}^n$, also gilt $\dim N = \infty$. ■

....

Aus diesem Satz folgt, dass die schwache Topologie in vielen Fällen wirklich schwächer als die ursprüngliche Topologie ist. Insbesondere gilt dies in unendlichdimensionalen normierten Räumen.

Satz 5.2.6. Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $C \subset E$ konvex. Dann stimmen der schwache Abschluss $\overline{C_w}$ und der Abschluss $\overline{C}$ überein.

Beweis. Es ist $\overline{C_w}$ schwach abgeschlossen und damit auch abgeschlossen, d.h. $\overline{C} \subset \overline{C_w}$.
Für die umgekehrte Inklusion sei $x_0 \in E$ mit $x_0 \notin \overline{C}$. Nach Satz 2.5.16 existiert ein $\phi \in E'$ und $\varepsilon > 0$ mit $\operatorname{Re}\phi(x_0) + \varepsilon \geq \operatorname{Re}\phi(y)$ für alle $y \in \overline{C}$. Die Menge $U := \{x \in E\colon\ |\phi(x) - \phi(x_0)| < \varepsilon\}$ ist Teilmenge von $\{x \in E\colon \operatorname{Re}\phi(x) < \operatorname{Re}\phi(x_0) + \varepsilon\}$ und daher eine schwache Umgebung von x_0 mit $U \cap \overline{C} = \varnothing$. Somit folgt $x_0 \notin \overline{C_w}$. ■

....

Folgerung 5.2.7. Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Dann gelten:

a) Ein Unterraum von E ist schwach abgeschlossen genau dann, wenn er abgeschlossen ist.

b) Ein Unterraum von E ist schwach dicht genau dann, wenn er dicht ist.

....

5.3 Die schwach*-Topologie des Dualraums

Es sei E ein topologischer Vektorraum und E' sein Dualraum. Hier spielt es keine Rolle, ob E' punktetrennend auf E ist. Jedes $x \in E$ induziert ein lineares Funktional f_x auf E durch

$$f_x : E' \to \mathbb{K},\ f_x(\phi) := \phi(x),\ \phi \in E'. \tag{5.3}$$

Es ist $\{f_x : x \in E\}$ punktetrennend auf E', denn:

> Sind $\phi, \psi \in E'$ mit $f_x(\phi) = f_x(\psi)$ für alle $x \in E$, so gilt $\phi(x) = \psi(x)$ für alle $x \in E$. Damit folgt $\phi = \psi$.

Wir sind nun in der Situation von Satz 5.2.2 mit E' anstelle von $\tilde{E}$.

Die E-Topologie auf E' heißt **schwach*-Topologie** auf E'. Sie heißt auch $\sigma(E', E)$-Topologie. Nach Satz 5.2.2 ist dies eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie auf E' und jedes Funktional auf E', das schwach*-stetig ist, ist von der Form $\phi \mapsto \phi(x)$ für ein $x \in E$.

Die Mengen $\{\phi \in E' : |\phi(x_k)| < r,\ k = 1, \dots, n\}$ mit $x_1, \dots, x_n$ bilden eine Nullumgebungsbasis der schwach*-Topologie. Eine Folge ϕ_n in E' ist **schwach*-konvergent** gegen ein $\phi \in E'$, wenn $\phi_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \phi(x)$ für alle $x \in E$ gilt, d.h. (ϕ_n) ist punktweise konvergent gegen ϕ. Wir schreiben dafür $\phi_n \xrightarrow{\sigma^*} \phi$ $(n \to \infty)$.

Satz 5.3.1 (*Satz von Alaoglu-Bourbaki*).
Es sei E ein topologischer Vektorraum und U eine Nullumgebung in E. Dann ist die *Polare*

$$U^\circ := \left\{\phi \in E' : |\phi(x)| \le 1 \text{ für } x \in U\right\} \tag{5.4}$$

schwach*-kompakt.

Beweis. Nullumgebungen sind absorbierend, also existiert zu jedem $x \in E$ eine Konstante $\gamma(x) < \infty$ mit $x \in \gamma(x)U$. Somit folgt $|\phi(x)| \le \gamma(x)$ für alle $x \in E$ und $\phi \in U^\circ$.
Für $x \in E$ sei $D_x := \{\alpha \in \mathbb{K} : |\alpha| \le \gamma(x)\}$, $\Pi := \prod\limits_{x\in E} D_x$ und $\mathcal{T}$ die Produkttopologie auf Π. Nach dem Satz von Tychonoff ist Π nun ein kompakter Hausdorffraum. Die Elemente von Π sind diejenigen Funktionen $f : E \to \mathbb{K}$ mit $|f(x)| \le \gamma(x)$ für $x \in E$. Also ist $U^\circ \subset E' \cap \Pi$.
U° trägt zwei Topologien, nämlich die Teilraumtopologie der schwach*-Topologie von E' und die Teilraumtopologie der Produkttopologie von Π. Man zeigt nun, dass diese beiden Topologien auf U° übereinstimmen und U° eine abgeschlossene Teilmenge von Π ist. Da Π ein kompakter topologischer Raum ist, folgt dann die Kompaktheit von U° und damit die Behauptung. ■

. . . .

Satz 5.3.2 (*Satz von Alaoglu*). Es sei E ein normierter Raum und $K := \{\phi \in E' : ||\phi|| \le 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in E'. Dann ist K schwach*-kompakt.

Beweis. Es seien $U := \{x \in E : ||x|| < 1\}$ und $B := \{x \in E : ||x|| \le 1\}$. Wegen $\overline{U} = B$ und $||\phi|| = \sup\limits_{x\in B} |\phi(x)|$ folgt:

$$\phi \in K \Leftrightarrow |\phi(x)| \le 1\ \forall x \in U \Leftrightarrow \phi \in U^\circ.$$

Nun folgt die Behauptung aus Satz 5.3.1. ■

. . . .

Satz 5.3.3. Es sei E ein Banachraum, $\mathcal{T}$ die schwache Topologie auf E und σ die schwach*-Topologie auf E'' (induziert von E'). Dann gelten:

a) Die kanonische Einbettung $J_E : E \to E''$ ist ein Homöomorphismus von $(E, \mathcal{T})$ auf einen dichten Unterraum von (E'', σ).

b) $J_E(B_E)$ ist σ-dicht in $B_{E''}$.

c) E ist reflexiv genau dann, wenn B_E schwach-kompakt ist.

d) Ist E reflexiv, so besitzt jede beschränkte Folge eine schwach-konvergente Teilfolge.

Beweis.

a) Wir können E als Unterraum von E'' auffassen. Aufgrund der Definition der Topologien $\mathcal{T}$ und σ (beide werden von E' induziert) folgt, dass $\mathcal{T}$ die von σ auf E induzierte Teilraumtoplogie ist. Daraus folgt sofort, dass J_E ein Homöomorphismus von E auf $J_E(E)$ ist.
Falls $J_E(E)$ nicht σ-dicht in E'' ist, gibt es ein $x_0'' \in E'' \setminus \overline{J_E(E)}^{\sigma}$. Nach Satz 5.2.2 ist $(E'', \sigma)' \stackrel{\sim}{=} E'$ (man setze dort $E = E''$, $\tilde{E} = E'$ und $\tilde{\mathcal{T}} = \sigma$). Also existiert nach Satz 2.5.8 (Hahn-Banach) ein $x' \in E'$ mit $\langle x_0'', x' \rangle = 1$ und $x \mid_{\overline{J_E(E)}^{\sigma}} = 0$. Dann ist aber $\langle x, x' \rangle = 0$ für alle $x \in E$ und somit $x' = 0$, was ein Widerspruch ist.

b) Falls $J_E(B_E)$ nicht σ-dicht in $B_{E''}$ ist, so gibt es ein $x_0'' \in B_{E''} \setminus \overline{J_E(B_E)}^{\sigma}$. Nach Satz 2.5.16 gibt es ein $x' \in E'$ mit $\langle x_0'', x' \rangle > 1$ und $|\langle x'', x' \rangle| \leq 1$ für $x'' \in \overline{J_E(B_E)}^{\sigma}$.
Aus der ersten Ungleichung folgt $1 < \langle x_0'', x' \rangle \leq ||x'|| \, ||x_0''|| \leq ||x'||$. Andererseits folgt aus der zweiten Ungleichung $||x'|| \leq 1$ gilt und dies ist ein Widerspruch.

c) $\Rightarrow$:
Nach dem Satz von Alaoglu ist $B_{E''}$ σ-kompakt. Da E reflexiv ist, ist wegen a) J_E ein Homöomorphismus von $(E, \mathcal{T})$ auf (E'', σ). Damit folgt die Behauptung.
$\Leftarrow$:
Nach a) ist $J(B_E)$ σ-kompakt, also auch σ-abgeschlossen. Daher ist $J(B_E) = B_{E''}$ nach b). Aus der Linearität von J folgt, dass J surjektiv ist. Somit ist E reflexiv.

d) Wir setzen zunächst voraus, dass E separabel ist. Da E reflexiv ist, ist E'' separabel. E' ist separabel nach Satz 3.1.8.
Sei also $E' = \overline{\{x_1', x_2', x_3', \ldots\}}$. Weiter sei (x_n) eine beschränkte Folge in E. Dann ist für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folge $\left(\left\langle x_n, x_j' \right\rangle\right)$ beschränkt in $\mathbb{K}$. Mit dem Satz von Bolzano-Weierstraß und dem Cantorschen Diagonalverfahren erhalten wir eine Teilfolge (y_n) von (x_n), sodass für jedes $j \in \mathbb{N}$ die Folge $\left(\left\langle y_n, x_j' \right\rangle\right)$ konvergiert.
Wir zeigen nun, dass für jedes $x' \in E'$ die Folge $(\langle y_n, x' \rangle)$ konvergiert. Dafür genügt es zu zeigen, dass dies eine Cauchyfolge ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Mit $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} ||x_n|| < \infty$ gilt für alle hinreichend großen $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\left|\left\langle y_n, x' \right\rangle - \left\langle y_m, x' \right\rangle\right| \leq (2M + 1)\varepsilon$$

und daraus folgt dieser Teil der Behauptung.
Nun zeigen wir schließlich, dass (y_n) schwach konvergent ist, d.h. für jedes $x' \in E'$ hat die Folge $(\langle y_n, x' \rangle)$ den gleichen Grenzwert.

Dazu betrachten wir die Abbildung $\Phi : E' \to \mathbb{K}$ mit $\Phi(x') := \lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n, x'\rangle$. Nach obigen Überlegungen ist Φ wohldefiniert und linear. Wegen

$$\left|\Phi(x')\right| = \left|\lim_{n\to\infty} \langle y_n, x'\rangle\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\langle y_n, x'\rangle\right| \leq M \left|\left|x'\right|\right|$$

ist Φ stetig, d.h. $\Phi \in E''$. Da E reflexiv ist, existiert ein $x \in E$ mit $J_E x = \Phi$. Somit ist $\langle x, x'\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n, x'\rangle$ für alle $x' \in E'$. Somit ist (y_n) schwach konvergent gegen x.
Nun sei E ein beliebiger reflexiver Raum und (x_n) eine beschränkte Folge in E. Dann ist $F = \overline{\langle x_n \colon n \in \mathbb{N}\rangle}$ ein abgeschlossener separabler Unterraum von E nach Lemma 3.1.7. Nach Satz 3.1.3 a) ist F reflexiv. Nach dem eben Bewiesenen existiert eine Teilfolge (y_n) von (x_n) und ein $y \in F$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n, y'\rangle = \langle y, y'\rangle$ für alle $y' \in F'$. Ist $x' \in E'$, so ist $x' \mid_F \in F'$. Also gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \langle y_n, x'\rangle = \langle y, x'\rangle$ und (y_n) ist schwach konvergent gegen y.

■

Satz 5.3.4. Es sei E ein normierter Raum. Dann existiert ein kompakter Hausdorffraum K, sodass E isometrisch isomorph zu einem Unterraum von $C(K)$ ist. Ist E ein Banachraum, so ist dieser Unterraum abgeschlossen in $C(K)$.

Beweis. Wir setzen $K := \{\Phi \in E' \colon ||\Phi|| \leq 1\}$ und versehen K mit der schwach*-Topologie von E'. Nach dem Satz von Alaoglu ist K kompakt und hausdorffsch, da E' punktetrennend ist.
Betrachte nun die lineare Abbildung $T : E \to C(K)$ mit $Tx = f_x$, $x \in E$, wobei $f_x(\Phi) := \Phi(x)$ für $\Phi \in K$ sei. Nach Folgerung 2.5.13 ist $||x|| = \sup\{|\Phi(x)| : \Phi \in K\} = ||f_x||_\infty$. Somit ist T eine Isometrie von E auf $T(E) = C(K)$ und die Behauptung ist bewiesen. ■

5.4 Extremalpunkte konvexer Mengen

Definition 5.4.1. Es sei E ein Vektorraum und $C \subset E$ konvex.

- Eine Teilmenge $S \subset C$ heißt **Seite** von C, wenn S konvex ist und gilt:

$$\forall\, x, y \in C,\ 0 < t < 1\colon\ [tx + (1-t)y \in S \Rightarrow x, y \in S]\,. \tag{5.5}$$

- Ein Punkt $x_0 \in C$ heißt **Extremalpunkt** von C, wenn gilt:

$$\forall\, x, y \in C,\ 0 < t < 1\colon\ [tx + (1-t)y = x_0 \Rightarrow x = y = x_0]\,. \tag{5.6}$$

  Äquivalent hierzu ist: Sind $x, y \in C$ und $x_0 = \frac{1}{2}(x+y)$, so ist $x_0 = x = y$.

- Mit $\mathrm{ex}(C)$ bezeichnen wir die Menge aller Extremalpunkte von C.

....

Lemma 5.4.2. Es sei E ein Vektorraum, $C \subset E$ konvex, S eine Seite von C und $T \subset S$ eine Seite von C. Dann ist S eine Seite von T. Insbesondere gilt: $\mathrm{ex}(S) = S \cap \mathrm{ex}(C)$.

Beweis. Klar. ■

....

Satz 5.4.3 (*Satz von Krein-Milmann*). Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $C \subset E$ nichtleer, kompakt und konvex. Dann ist $C = \overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{ex}(C)$.

Beweis.

i.) Wir zeigen zunächst, dass $\mathrm{ex}(C) \neq \emptyset$.
Sei dazu $\mathfrak{M}$ die Menge aller abgeschlossener, nichtleeren Seiten von C. Wegen $C \in \mathfrak{M}$ ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$. Wir ordnen $\mathfrak{M}$ durch die Mengeninklusion „$\supset$“.
Sei nun $\mathfrak{K}$ eine Kette und $T = \bigcup\limits_{S \in \mathfrak{K}} S$. Offensichtlich ist T abgeschlossen und wir müssen zeigen, dass $T \neq \emptyset$.
Da $\mathfrak{K}$ total geordnet ist, ist $S_1 \cap \ldots \cap S_n \neq \emptyset$ für je endlich viele $S_1, \ldots, S_n \in \mathfrak{K}$. Da C kompakt ist, folgt aus der FIP, dass $T \neq \emptyset$ gilt.
Somit ist T eine untere bzw. obere Schranke von $\mathfrak{K}$, also ist $\mathfrak{M}$ induktiv geordnet. Mit dem *Lemma von Zorn* folgt nun, dass $\mathfrak{M}$ ein minimales Element $S_0 \in \mathfrak{M}$ enthält.

ii.) Nun zeigen wir, dass S_0 einpunktig ist.
Annahme: Es existieren $x_0, y_0 \in S_0$ mit $x_0 \neq y_0$.
Nach dem Satz von Hahn-Banach (2.5.16) existiert ein $\phi \in E'$ mit $\mathrm{Re}(\phi(x_0)) < \mathrm{Re}(\phi(y_0))$.
Wir betrachten die Menge $S_1 := \left\{ x \in S_0\colon \mathrm{Re}(\phi(x)) = \sup\limits_{y \in S_0} \mathrm{Re}(\phi(y)) \right\}$. Da S_0 kompakt und ϕ stetig ist, ist $S_1 \neq \emptyset$.[26] Weiter ist S_1 abgeschlossen und eine Seite von S_0. Nach Lemma 5.4.2 ist S_1 auch eine Seite von C, also $S_1 \in \mathfrak{M}$. Wegen $x_0 \notin S_1$ ist $S_1 \subsetneq S_0$. Dies ist ein Widerspruch zur Minimalität von S_0.
Zwischenfazit: C besitzt Extremalpunkte.

[26] Das heißt, das Supremum in der Definition von S_1 ist eigentlich ein Maximum.

iii.) Abschließend zeigen wir, dass $C = C_1 := \overline{\text{co}}\,\text{ex}(C)$ gilt.
Offenbar gilt $C_1 \subset C$. Es ist C_1 kompakt, nichtleer (nach i.) und konvex.
Annahme: $C_1 \neq C$.
Dann existiert ein $x_0 \in C \setminus C_1$. Wieder nach Satz 2.5.16 existiert ein $\phi \in E'$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\text{Re}(\phi(x)) \leq \text{Re}(\phi(x_0)) - \varepsilon \text{ für } x \in C_1. \tag{$*$}$$

Wir betrachten nun die Menge $S := \left\{ x \in C \colon \text{Re}(\phi(x)) = \sup_{y \in C} \text{Re}(\phi(y)) \right\}$. Wie oben erhält man, dass $S \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Seite von C ist. Nach i. ist $\text{ex}(S) \neq \emptyset$ und nach Lemma 5.4.2 ist $\text{ex}(S) \subset \text{ex}(C)$. Andererseits gilt nach ($*$):

$$\text{ex}(S) = S \cap \text{ex}(C) \subset S \cap C.$$

Dies ist ein Widerspruch und somit ist der Satz bewiesen.

■

Folgerung 5.4.4. Es sei E ein normierter Raum. Dann ist $B_{E'} = \overline{\text{co}}\,\text{ex}(B_E)$, wobei der Abschluss in der schwach*-Topologie von E' zu bilden ist.

Beweis. Nach dem Satz von Alaoglu ist $B_{E'}$ schwach*-kompakt. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz von Krein-Milmann. ■

6 Darstellung von Dualräumen

In diesem Kapitel wollen wir einige Beispiele von wichtigen Dualräumen kennenlernen.

6.1 Folgenräume

In diesem Kapitel seien stets $p, q \in [1, \infty]$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Die Folgenräume ℓ^p kennen wir bereits. Wir wollen jetzt deren Dualräume bestimmen.
Bezeichnung: Seien E, F normierte Räume, $T : E \to F$ linear und $||Tx|| = ||x||$ für $x \in E$. Dann nennen wir T eine *isometrische Einbettung* von E in F.
Insbesondere ist T injektiv und E kann als Unterraum von F aufgefasst werden.

Satz 6.1.1. Es sei $T : \ell^q \to (\ell^p)'$ definiert durch

$$\langle y, Tx \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \; x = (x_n) \in \ell^q, \; y = (y_n) \in \ell^p. \tag{6.1}$$

Dann gelten:

a) Für $p < \infty$ ist T ein isometrischer Isomorphismus. Man schreibt $(\ell^p)' \cong \ell^q$. Insbesondere ist $\left(\ell^1\right)' \cong \ell^\infty$.

b) Für $p = \infty$ ist $T : \ell^1 \to (\ell^\infty)'$ eine isometrische Einbettung.

c) Die Abbildungsvorschrift in (6.1) liefert einen isometrischen Isomorphismus von ℓ^1 auf $(c_0)'$, also $(c_0)' \cong \ell^1$.

Beweis.

a) Zunächst sei $1 < p < \infty$. Für $x = (x_n) \in \ell^q$ und $y = (y_n) \in \ell^p$ ist die Reihe in (6.1) nach der hölderschen Ungleichung absolut konvergent und somit T wohldefiniert.
Die Linearität von T ist klar. Weiter gilt

$$|\langle y, Tx \rangle| \leq ||x||_q \, ||x||_p \, ,$$

d.h. $Tx \in (\ell^p)'$ mit $||Tx|| \leq ||x||_q$.
Zum Nachweis der Surjektivität von T definiert man für $n \in \mathbb{N}$ die Folge

$$e^{(n)} := \left(0, 0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{n-\text{te Stelle}}, 0, \ldots, 0, 0, \ldots \right) \in \ell^p$$

mit $\left|\left|e^{(n)}\right|\right| = 1$ und betrachtet $x = (x_n)$ mit $x_n := \left\langle e^{(n)}, y' \right\rangle$. Mit diesem x zeigt man durch eine langwierige Rechnung die Normgleichheit und damit ist Teil a) bewiesen.
Bemerkung: Den Fall $p = \infty$ zeigt man ähnlich.

b) Zeigt man wie a).
Bemerkung: Der Nachweis der Surjektivität scheitert an der Tatsache, dass F nicht dicht in ℓ^∞ liegt.

c) Zeigt man ähnlich wie a), indem man die Dichtheit von ℓ^∞ in c_0 ausnutzt.

■

. . . .

6.2 Räume integrierbarer Funktionen

Nun sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem positiven Maß μ, z.B. $X = [0,1]$ mit dem Lebesguemaß.
Die $L^p(\mu)$-Räume haben wir bereits in Abschnitt 1.7 behandelt. ℓ^p-Räume sind ein Spezialfall, wenn man $X = \mathbb{N}$ und μ das Zählmaß setzt.
Man kann auch die Dualräume von $L^p(\mu)$ bestimmen. Dies ist wesentlich komplizierter und erfordert Einiges an Maßtheorie. Daher geben wir nur die Ergebnisse[27] an.

Ist $g \in L^q(\mu)$, so folgt aus der Hölderschen Ungleichung, dass durch

$$\phi_g(f) := \int_X fg \, \mathrm{d}\mu, \; f \in L^p(\mu), \; 1 \leq p \leq \infty, \tag{6.2}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $L^p(\mu)$ definiert wird. Es gilt $||\phi_g|| \leq ||g||_q$. Für $p < \infty$ gilt auch die Umkehrung.

Satz 6.2.1. Es sei $1 \leq p < \infty$, μ ein positives, σ-endliches Maß und ϕ ein stetiges lineares Funktional auf $L^p(\mu)$.
Dann existiert genau ein $g \in L^q(\mu)$ mit

$$\phi(f) = \int_X fg \, \mathrm{d}\mu, \; f \in L^p(\mu) \tag{6.3}$$

mit $||\phi|| = ||g||_q$, d.h. $(L^p(\mu))' \cong L^q(\mu)$.

. . . .

[27] Literatur: Rudin, Real and Complex Analysis, S. 126-129.

6.3 Räume stetiger Funktionen

Wir wollen nun den Dualraum von $(C[0,1])'$ bestimmen. Dazu sind zwei Vorbereitungen notwendig.

Funktionen von beschränkter Variation.
Eine Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt **von beschränkter Variation** oder **von beschränkter Schwankung**, wenn

$$V_g[a,b] := \sup_Z \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| < \infty \tag{6.4}$$

gilt, wobei das Supremum über alle Zerlegungen $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ von $[a,b]$ gebildet wird. Wir schreiben dann, dass g eine BV-Funktion ist.
Man zeigt leicht, dass jede monotone oder Lipschitz-stetige Funktion von beschränkter Variation ist. Umgekehrt muss eine BV-Funktion aber nicht stetig sein, ein Gegenbeispiel ist die Funktion

$$g : [0,1] \to \mathbb{R},\ g(t) = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t} & : \quad t > 0 \\ 0 & : \quad t = 0 \end{cases}.$$

Man kann noch zeigen, dass jede BV-Funktion als Differenz zweier monoton wachsender Funktionen darstellbar ist.

Die Menge aller BV-Funktionen mit der Norm

$$||g||_{BV} = |g(a)| + V_g[a,b] \tag{6.5}$$

ist ein Banachraum. Weiter sei noch $\mathrm{BV}_0[a,b]$ der abgeschlossene Unterraum von $\mathrm{BV}[a,b]$ mit $g(a) = 0$. Dann folgt $||g||_{BV_0} = V_g[a,b]$.

. . . .

Riemann-Stieltjes-Integrale.
Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Funktionen. Für $n \in \mathbb{N}$ und eine Zerlegung $Z_n := \{a = t_{0,n}, t_{1,n}, \ldots, t_{k_n,n} = b\}$ sei die **Riemann-Stieltjes-Summe** definiert durch

$$S(Z_n, \xi_n; f, g) := \sum_{j=1}^{k_n} f(\xi_{j,n}) \left[g(t_{j,n}) - g(t_{j-1,n}) \right], \tag{6.6}$$

wobei $\xi_n := (\xi_{1,n}, \ldots, \xi_{k_n,n})$ ein *Zwischenvektor* ist, d.h. es gilt $\xi_{j,n} \in [t_{j-1,n}, t_{j,n}]$.
Bezeichnet $||Z_n|| := \max\limits_{j=1,\ldots,k_n} (t_{j,n} - t_{j-1,n})$ die **Feinheit** von Z_n, so heißt $(S(Z_n, \xi_n; f, g))$ eine **Zerlegungsnullfolge**, wenn $||Z_n|| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ gilt.
f heißt **Riemann-Stieltjes-integrierbar bezüglich g**, wenn es ein $I \in \mathbb{C}$ gibt mit

$$\lim_{n \to \infty} S(Z_n, \xi_n; f, g) = I$$

für jede Zerlegungsnullfolge.
Äquivalent hierzu ist: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung T mit

$||Z_n|| < \delta$ und jede Wahl von Zwischenpunkten gilt:

$$|S(Z_n, \xi_n; f, g) - I| < \varepsilon. \tag{6.7}$$

Wir legen die Bezeichnung $I := \int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ fest, wobei f *Integrand* und g *Integrator* genannt wird. Ist $g(x) = x$, so entsteht das übliche Riemann-Integral.

Für $N \in \mathbb{N}$, $[a,b] = [0,N]$ und $g(t) = [t]$, so existiert

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(t) = \sum_{k=1}^{N} f(k). \tag{6.8}$$

Ist $x_0 \in (a,b)$ und $\delta_{x_0} : [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch $\delta_{x_0}(t) = 0$ für $a \leq t < x_0$ und $\delta_{x_0}(t) = 1$ für $x_0 \leq t \leq b$, so folgt

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = f(x_0). \tag{6.9}$$

Falls g stetig differenzierbar und f stetig ist, so existiert

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x. \tag{6.10}$$

<u>Haupsatz:</u>

Ist f stetig und $g \in$BV$[a,b]$, so existiert $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ und es gilt die fundamentale Ungleichung

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)\right| \leq ||f||_\infty V_g[a,b] \leq ||f||_\infty ||g||_{BV}. \tag{6.11}$$

Hieraus folgt: Für jedes $g \in$BV$[a,b]$ wird durch $\phi(f) := \int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ ein stetiges lineares Funktional auf $C[a,b]$ definiert mit $||\phi|| \leq ||g||_{BV}$.

. . . .

Satz 6.3.1 (*Rieszscher Darstellungssatz*). Es sei $\phi \in (C[0,1])'$.
Dann gibt es ein $g \in$BV$_0[a,b]$ mit

$$\phi(f) = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}g(x), \; f \in C[0,1], \tag{6.12}$$

und es gilt $||\phi|| = ||g||_{BV_0}$.

Beweis.

(1) Es sei $\phi \in (C[0,1])'$. Mit dem Satz von Hahn-Banach kann man ϕ unter Erhaltung der Norm zu $\Phi \in (L^\infty[0,1])'$ fortsetzen.

(2) Nun zeigt man $C[0,1] \subset \overline{\langle \chi_{[0,t]} : t \in [0,1] \rangle}^{L^\infty}$ mittels eines technischen Zerlegungsarguments.

(3) Wir definieren $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch $g(t) = \Phi(\chi_{[0,t]})$. Dann ist $g(0) = 0$ und es gilt

$$\Phi(g_z) = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1}) \left(g(t_k) - g(t_{k-1})\right). \tag{$*$}$$

Nun zeigen wir, dass $g \in$BV$_0[0,1]$ gilt. Dazu setzen wir für $\alpha \in \mathbb{C}$ zunächst

$$\text{sgn } \alpha := \begin{cases} \frac{\alpha}{|\alpha|} & : \quad \alpha \neq 0 \\ 0 & : \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

und weiter $\sigma_k := \text{sgn } \overline{[(g(t_k) - g(t_{k-1})]}$ für $k = 1, \dots, n$. Damit rechnet man mit der Linearität von Φ nach, dass

$$\sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k \left[g(t_k) - g(t_{k-1})\right] \leq ||\Phi|| \left(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k \left[\chi_{[0,t_k]} - \chi_{[0,t_{k-1}]}\right](t) \right) \leq ||\Phi||$$

gilt. Damit gilt dann $V_g[0,1] \leq ||\Phi||$ und somit $||g||_{BV_0} \leq ||\Phi||$. Also ist $g \in$BV$_0[0,1]$.

(4) Nun zeigen wir die Darstellung (6.12).
Die rechte Seite von ($*$) ist eine Riemann-Stieltjes-Summe. Setzen wir hier eine Zerlegungsnullfolge (Z_n) ein, so folgt

$$\Phi\left(g_{Z_n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \int_0^1 f(x) \mathrm{d}g(x)$$

für $f \in C[0,1]$. Nach Konstruktion von g_z gilt $g_{Z_n} \xrightarrow{n\to\infty} f$ in $L^\infty[0,1]$ und wegen der Stetigkeit von Φ gilt

$$\Phi\left(g_{Z_n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \Phi(f) = \phi(f).$$

Damit ist die Darstellung (6.12) bewiesen.

(5) Abschließend zeigen wir die Normgleichheit. Aus der fundamentalen Ungleichung für Riemann-Stieltjes-Integrale folgt

$$|\phi(f)| = \left| \int_0^1 f(x) \mathrm{d}g(x) \right| \leq ||f||_\infty \, ||g||_{BV_0}.$$

Also ist $||\phi|| \leq ||f||_{BV_0}$ und insgesamt folgt die behauptete Gleichheit.

∎

. . . .

Bemerkung:
Die Funktion g ist *nicht* eindeutig, denn mit g leistet auch $g + c$ das Gewünschte.
Fordern wir $g(0) = 0$ und rechtsseitige Stetigkeit, so erhalten wir eine sogenannte *normalisierte BV-Funktion*. Man kann zeigen, dass diese dann eindeutig ist.
Der Raum $N[0,1]$ der normalisierten BV-Funktionen mit der Norm $||\cdot||_{BV_0}$ ist ein Banachraum und daher sind $(C[0,1])'$ und $N[0,1]$ isometrisch isomorph.
Obiges Ergebnis gilt natürlich auch für beliebige Intervalle $[a,b]$.

Dieses Ergebnis kann man noch wesentlich verallgemeinern, aber der Beweis ist dann auch wesentlich komplizierter und benötigt große Teile der Maß- und Integrationstheorie. Wir berichten nur über die Ergebnisse, eine ausführliche Darstellung findet man in Rudin.

6.3.1 Positive lineare Funktionale

Definition 6.3.2. Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen auf X.
Ein Maß μ auf $\mathcal{B}$ heißt **Borelmaß** auf X.
Ein positives Borelmaß heißt regulär, wenn folgende Bedingungen gelten:

- $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset X$.
- Für alle $B \in \mathcal{B}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mu(E) &= \inf\{\mu(U)\colon U \text{ offen und } U \supset E\} \text{ (äußeres Maß)}\\ &= \sup\{\mu(K)\colon K \text{ kompakt und } K \subset E\} \text{ (inneres Maß).}\end{aligned}$$

Ein komplexes Maß μ heißt **regulär**, wenn $|\mu|$ ein positives reguläres Maß ist.

. . . .

Einschub:
Ist X ein topologischer Raum, so sei $C(X)$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen auf X. Weiter sei

$$C_c(X) := \{f \in C(X)\colon \operatorname{supp} f \text{ kompakt}\}\,. \tag{6.13}$$

Ist X lokalkompakt, so sei

$$C_0(X) := \left\{f \in C(X)\colon \forall\varepsilon > 0\ \exists K \overset{c}{\subset} X\colon\ |f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in X \setminus K\right\}. \tag{6.14}$$

Durch $||f||_\infty := \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$ wird eine Norm auf $C_0(X)$ definiert und $C_0(X)$ damit ein Banachraum.
Weiter sei noch

$$C^+(X) := \{f \in C(X)\colon f(x) \geq 0\ \forall x \in X\} \tag{6.15}$$

Klar ist: $C_c(X) \subset C_0(X)$. Ist K kompakt, so gilt $C(X) = C_c(X) = C_0(X)$.

. . . .

Ist X ein lokalkompakter Hausdorffraum und μ ein positives Borelmaß mit $\mu(K) < \infty$ für $K \subset X$ kompakt, so wird durch $\phi(f) := \int\limits_X f\mathrm{d}\mu$ ein positives lineares Funktional auf $C_c(X)$ definiert, d.h. $\phi(f) \geq 0$ für alle $f \in C_c^+(X)$.
Es gilt auch die Umkehrung:

Satz 6.3.3. Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und ϕ ein positives lineares Funktional auf $C_c(X)$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes positives reguläres Borelmaß μ mit

$$\phi(f) = \int\limits_X f\mathrm{d}\mu,\ \ f \in C_c(X). \tag{6.16}$$

Beweisskizze. Man möchte gerne $\mu(E) = \phi(\chi_E)$ definieren, aber $\chi_E \notin C_c(X)$. Man approximiert daher χ_E durch stetige Funktionen, wofür das Lemma von Urysohn benötigt wird. ■

. . . .

6.3.2 Der Darstellungssatz von Riesz

Satz 6.3.4 (*Rieszscher Darstellungssatz*). Es sei X ein lokalkompakter Hausdorffraum und ϕ ein stetiges lineares Funktional auf $C_0(X)$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes, komplexes reguläres Maß μ mit

$$\phi(f) = \int_X f \mathrm{d}\mu, \; f \in C_0(X), \tag{6.17}$$

und es gilt $||\phi|| = |\mu|(X)$.

. . . .

Ist X ein lokalkompakter Hausdorffraum und $M(X)$ die Menge aller regulären, komplexen Borelmaße auf X, so definieren wir Addition und Skalarmultiplikation auf $M(X)$ durch

$$(\mu + \nu)(E) := \mu(E) + \nu(E) \text{ und } (\lambda\nu)(E) := \lambda\nu(E)$$

für alle Borelmengen $E \subset X$. Auf diese Weise wird $M(X)$ ein Vektorraum.
Weiterhin wird durch $||\mu|| := |\mu|(X)$ eine Norm auf $M(X)$ definiert und $M(X)$ ein Banachraum. In diesem Sinne sind dann $(C_0(X))'$ und $(C_c(X))'$ isometrisch isomorph zu $M(X)$.

7 Spektraltheorie kompakter Operatoren

In diesem Kapitel wollen wir die Theorie der Eigenwerte von Matrizen auf Operatoren in unendlichdimensionalen Räumen erweitern. Dazu entwickeln wir zunächst allgemeiner einen gewissen Teil der Theorie der Banachalgebren.

7.1 Banachalgebren

7.1.1 Definition und Beispiele

Definition 7.1.1.

a) Es sei A ein Vektorraum über dem Körper K. Auf A sei zusätzlich eine Multiplikation $\cdot$ definiert, sodass $(A, +, \cdot)$ ein Ring ist und es gelte

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \text{ für } \alpha \in K,\ x, y \in A. \tag{7.1}$$

Dann heißt A eine **Algebra** über K.
A heißt **kommutativ**, falls $xy = yx$ für alle $x, y \in A$ gilt.
A besitzt ein **Einselement** e, wenn es ein $e \in A$ gibt mit $ex = xe = x$ für $x \in A$. e ist dann eindeutig bestimmt.

b) Ist A eine Algebra über $\mathbb{K}$ und $||\cdot||$ eine Norm auf A mit

$$||xy|| \leq ||x||\,||y|| \ \text{für} x, y \in A, \tag{7.2}$$

so heißt A ein **normierte Algebra**.
Ist A bezüglich dieser Norm vollständig, so heißt A eine **Banachalgebra**.

....

Bemerkung 7.1.2.

a) Aus (7.2) folgt die Stetigkeit der Multiplikation.

b) Ist $e \in A$ ein Einselement, so folgt aus (7.2): $||e|| \geq 1$. Es kann sein, dass $||e|| > 1$ gilt, denn ist $||\cdot||$ eine Norm auf A, so auch $a\,||\cdot||$ mit $a > 1$. Deshalb fordern wir $||e|| = 1$.

c) Besitzt A kein Einselement, so kann man eines adjungieren.
Dazu betrachten wir die Menge $A_1 := \{(x, \alpha) \colon x \in A, \alpha \in \mathbb{K}\}$. Auf A_1 definieren wir Addition und Skalarmultiplikation komponentenweise und die Multiplikation durch

$$(x, \alpha) \cdot (y, \beta) := (xy + \beta x + \alpha y, \alpha\beta). \tag{7.3}$$

Die Norm wird durch $||(x, \alpha)|| := ||x|| + |\alpha|$ definiert. Dann ist $e = (0, 1)$ ein Einselement und A_1 eine Banachalgebra mit Eins. Durch die Abbildung $x \mapsto (x, 0)$ wird A in A_1 eingebettet.

. . . .

Beispiel 7.1.3 (*Funktionenalgebren*).

a) Es sei X ein kompakter Hausdorffraum. Dann ist $C(X)$ mit der üblichen Multiplikation von Funktionen und der Maximumnorm eine kommutative Banachalgebra mit Eins.
Ist X nur lokalkompakt, aber nicht kompakt (z.B. die reellen Zahlen), so ist $C_0(X)$ eine kommutative Banachalgebra ohne Eins.

b) Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $A(K) := C(K) \cap H(K^\circ)$. Dann ist A mit der Maximumnorm eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Ist speziell $K = \overline{\mathbb{D}}$, so heißt $A(\overline{\mathbb{D}})$ die *Discalgebra*.

c) Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $H^\infty(G) := \{f \in H(G) \colon f \text{ beschränkt}\}$. Dann ist $H^\infty(G)$ mit der Supremumsnorm eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Speziell sei $H^\infty := H^\infty(\mathbb{D})$.

. . . .

Beispiel 7.1.4 (*Operatorenalgebren*). Es sei E ein Banachraum. Dann ist $L(E)$ mit der Komposition $\circ$ als Multiplikation und der Operatornorm eine Banachalgebra mit Eins. Die Eins ist die identische Abbildung. Es ist $L(E)$ kommutativ genau dann, wenn $\dim E = 1$, d.h. $L(E) \cong \mathbb{K}$, gilt. Ist speziell $E = \mathbb{K}^n$, so ist $L(E)$ isometrisch isomorph zu $M_{\mathbb{K}}(n)$ mit der Multiplikation und irgendeiner Matrizennorm.

. . . .

Beispiel 7.1.5 (*Gruppenalgebren*). Es sei G eine lokalkompakte abelsche Gruppe mit Haarmaß[28] μ. μ ist bis af eine multiplikative Konstante eindeutig bestimmt.
Dann ist $L^1(G)$ mit der Faltung

$$(f * g)(x) := \int_G f(x-t)g(t)\mathrm{d}t, \ \ f, g \in L^1(G) \tag{7.4}$$

eine kommutative Algebra mit der Norm $||\cdot||_{L^1}$.
Man kann zeigen, dass $L^1(G)$ genau dann eine Eins besitzt, wenn G diskret ist.
Konkrete Beispiele für G sind:

- $G = \mathbb{R}$ mit Addition, μ Lebesguemaß.
- $G = \Pi = \partial\mathbb{D}$ mit der Multiplikation komplexer Zahlen, μ Lebesguemaß.
- $G = \mathbb{Z}$ mit der Addition, μ Zählmaß.
  Es ist dann $L^1(\mathbb{Z}) \cong \ell^1(\mathbb{Z})$[29].
  $\mathbb{Z}$ ist diskret. Das Einselement ist die Folge $e = (x_n)$ mit $x_n = \begin{cases} 1 & : \quad n = 0 \\ 0 & : \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$.

. . . .

[28] Haarmaß = Translationsinvariantes Maß mit $\mu(V) > 0$ für alle offenen Teilmengen $V \neq \emptyset$.
[29] Menge aller Folgen $(x_n)_{n=-\infty}^{\infty}$ mit $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty$.

7.1.2 Die Gruppe der invertierbaren Elemente

Definition 7.1.6.

a) Es sei A eine Banachalgebra mit Eins e und $x \in A$.
x heißt **invertierbar**, wenn es ein $x^{-1} \in A$ gibt mit $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. x^{-1} ist dann eindeutig bestimmt und heißt das **inverse Element** von x.
Sind x und y invertierbar, so auch $y^{-1}x$, denn es gilt $(y^{-1}x)^{-1} = x^{-1}y$ und daher bildet die Menge der invertierbaren Elemente eine Gruppe, die wir mit $G(A)$ bezeichnen.

b) Es sei $x \in A$. Dann heißt

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{K} \colon x - \lambda e \notin G(A)\} \subset \mathbb{K} \tag{7.5}$$

das **Spektrum** von x und

$$r(x) := \sup_{\lambda \in \sigma(x)} |\lambda| \tag{7.6}$$

der **Spektralradius** von x. Ein Element aus $\sigma(x)$ heißt auch **Spektralwert**. Weiterhin heißt

$$\rho(x) := \mathbb{K} \setminus \sigma(x) \tag{7.7}$$

die **Resolventenmenge** von x und

$$R_x : \rho(x) \to A,\ R_x(\lambda) := (x - \lambda e)^{-1}, \tag{7.8}$$

heißt die **Resolventenabbildung**.

Beispiel 7.1.7.

a) $A = C(X)$. $f \in A$ ist invertierbar genau dann, wenn $f(t) \neq 0$ für alle $t \in X$ gilt. Damit gilt $\sigma(f) = f(X)$.

b) $A = L(E)$. $G(A)$ ist die Menge der invertierbaren Operatoren. Für $T \in L(E)$ definieren wir noch folgende Teilmengen des Spektrums:
   - $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \mathbb{K} \colon T - \lambda I \text{ nicht injektiv}\}$. **Punktspektrum**.
   - $\sigma_c(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{K} \colon T - \lambda I \text{ injektiv, nicht surjektiv, aber } \overline{(T - \lambda I)(E)} = E\right\}$. **Stetiges Spektrum**.
   - $\sigma_r(T) := \left\{\lambda \in \mathbb{K} \colon T - \lambda I \text{ injektiv, aber } \overline{(T - \lambda I)(E)} \neq E\right\}$. **Restspektrum**.

   Aus dem Satz von der offenen Abbildung folgt, dass $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_c(T) \cup \sigma_r(T)$, denn ist $T - \lambda I$ bijektiv, so ist $(T - \lambda I)^{-1}$ stetig.
   $\sigma_p(t)$ ist die Menge aller **Eigenwerte** von T. Ist $\dim E < \infty$, so ist $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

Satz 7.1.8. Es sei A eine Banachalgebra mit Eins e, $x \in A$ und $||x|| < 1$.
Dann ist $e - x \in G(A)$ mit

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{7.9}$$

und es gilt

$$\left|\left|(e-x)^{-1} - e - x\right|\right| \leq \frac{||x||^2}{1-||x||}. \tag{7.10}$$

Beweis. Setze $s_n := e + x + x^2 + \ldots + x^n$. Wegen (N4) gilt $\left|\left|x^k\right|\right| \leq ||x||^k < 1$, also gilt (als Teleskopsumme)

$$||s_{n+k} - s_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Somit ist (s_n) eine Cauchyfolge in A, also konvergent gegen ein Element $s \in A$.
Weiter gilt $s_n(e-x) = e - x^{n+1} = (e-x)s_n$. Grenzübergang $n \to \infty$ liefert dann $s(e-x) = (e-x)s = e$, also ist $s = (e-x)^{-1}$.
Schließlich gilt

$$\left|\left|(e-x)^{-1} - e - x\right|\right| = \left|\left|\sum_{n=2}^{\infty} x^n\right|\right| \leq \sum_{n=2}^{\infty} ||x||^n = \frac{||x||^2}{1-||x||}.$$

■

....

Bemerkung: (7.9) heißt **Neumannsche Reihe**.

Satz 7.1.9. Es sei A eine Banachalgebra mit Eins e, $x \in G(A)$, $h \in A$ und $||h|| \leq \frac{1}{2}\left|\left|x^{-1}\right|\right|^{-1}$.
Dann ist $x + h \in G(A)$ und es gilt

$$\left|\left|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\right|\right| \leq 2\left|\left|x^{-1}\right|\right|^3 ||h||^2.$$

Beweis. Wegen $x+h = x(e+x^{-1}h)$ und $\left|\left|x^{-1}h\right|\right| < \frac{1}{2}$ folgt aus Satz 7.1.8, dass $e+x^{-1}h \in G(A)$ gilt, also gilt auch $x+h \in G(A)$. Die Abschätzung folgt dann aus der Abschätzung aus Satz 7.1.8. ■

....

Satz 7.1.10. Es sei A eine Banachalgebra mit Eins.
Dann ist $G(A)$ offen und die Abbildung $F : G(A) \to G(A)$ mit $F(x) = x^{-1}$ ist ein Homöomorphismus.

Beweis. Die Offenheit von $G(A)$ folgt aus Satz 7.1.9. Für $||h||$ hinreichend klein folgt nun

$$\left|\left|(x+h)^{-1} - x^{-1}\right|\right| \leq 2\left|\left|x^{-1}\right|\right|^3 ||h||^2 + \left|\left|x^{-1}\right|\right|^2 ||h|| \xrightarrow{h\to 0} 0$$

und somit ist F stetig. Da $F^{-1} = F$ gilt, folgt die Behauptung. ■

....

Satz 7.1.11. Es sei A eine Banachalgebra mit Eins e und $x \in A$.
Dann ist das Spektrum $\sigma(x)$ kompakt und für $\lambda \in \sigma(x)$ gilt $|\lambda| \leq ||x||$, d.h. $r(x) \leq ||x||$.

Beweis. Es sei $|\lambda| < ||x||$. Dann ist $\left|\left|\lambda^{-1}x\right|\right| < 1$, also ist $e - \lambda^{-1}x \in G(A)$. Somit folgt $x - \lambda e = -\lambda(e - \lambda^{-1}x) \in G(A)$, also gilt $\lambda \notin \sigma(x)$. Folglich ist $\sigma(x)$ beschränkt und es gilt $r(x) \leq ||x||$.
Sei nun (λ_n) eine Folge in $\sigma(x)$ mit $\lambda_n \to \lambda$. Dann ist $(e - \lambda_n x) \notin G(A)$, was äquivalent zu $e - \lambda_n x \in A \setminus G(A)$ ist und $A \setminus G(A)$ ist abgeschlossen, da $G(A)$ offen ist. Grenzübergang $n \to \infty$ liefert $e - \lambda x \in A \setminus G(A)$. Es folgt also $e - \lambda x \notin G(A)$, also ist $\lambda \in \sigma(x)$ und $\sigma(x)$ daher abgeschlossen. ■

....

Ist A eine reelle Banachalgebra, so kann es vorkommen, dass $\sigma(x) = \emptyset$. Beispiel: $A = \mathbb{R}^2$, T Drehung um $90\circ$.
Wir werden jetzt zeigen, dass dies bei komplexen Banachalgebren nicht vorkommen kann.

Definition 7.1.12. Es sei E ein topologischer Vektorraum, $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to E$.
f heißt **schwach holomorph** in Ω, wenn $\Phi \circ f$ holomorph in Ω ist für alle $\phi \in E'$.

....

Satz 7.1.13. Es sei A eine komplexe Banachalgebra mit Eins e und $x \in A$.
Dann ist die Resolventenabbildung $R_x : \rho(x) \to A$ schwach holomorph. Weiterhin gilt

$$(\phi \circ R_x)(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0 \tag{7.11}$$

für jedes $\phi \in A'$.

Beweis. Es sei $\lambda \in \rho(x)$, $\phi \in A'$ und $f := \phi \circ R_x$. Wir wenden jetzt Satz 7.1.9 auf $x - \lambda e$ statt x und $(\lambda - \mu)e$ statt h mit $|\lambda - \mu| > 0$ hinreichend klein an. Damit erhalten wir

$$\left|\left|(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1} + (\lambda - \mu)(x - \lambda e)^{-2}\right|\right| \leq C\,|\mu - \lambda|^2 .$$

Dies bedeutet nun, dass

$$\frac{1}{\mu - \lambda}\left[(x - \mu e)^{-1} - (x - \lambda e)^{-1}\right] \xrightarrow{\mu\to\lambda} (x - \lambda e)^2$$

gilt. Wenden wir hierauf nun ϕ an, so folgt wegen der Linearität

$$\frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} \xrightarrow{\mu\to\lambda} \phi((x - \lambda e)^{-2}).$$

Somit ist f holomorph in Ω mit $f'(\lambda) = \phi((x - \lambda e)^{-2})$. Wegen Satz 7.1.10 folgt nun

$$\lambda f(\lambda) = \phi(\lambda(x - \lambda e)^{-1}) = \phi((\lambda^{-1}x - e)^{-1}) \xrightarrow{\lambda\to\infty} \phi(-e) = -\phi(e).$$

Damit gilt nun

$$f(\lambda) \xrightarrow{\lambda\to\infty} 0$$

und die Behauptung ist bewiesen. ■

Satz 7.1.14. Es sei A eine komplexe Banachalgebra mit Eins e und $x \in A$.
Dann ist $\sigma(x) \neq \emptyset$.

Beweis. Wir nehmen an, dass $\sigma(x) = \emptyset$. Dann ist $\rho(x) = \mathbb{C}$. Wähle nun $\lambda_0 \in \rho(x)$ beliebig. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein $\phi \in A'$ mit

$$\phi\left((x - \lambda e)^{-1}\right) \neq 0. \tag{$*$}$$

Dann ist $f = \phi \circ R_x$ eine ganze Funktion und $f(\lambda) \xrightarrow{\lambda \to \infty} 0$ nach Satz 7.1.13. Nach dem Satz von Liouville ist f konstant, also ist $f \equiv 0$. Dies ist ein Widerspruch zu ($*$). ■

Satz 7.1.15 (*Satz von Gelfand-Mazur*). Es sei A eine komplexe Banachalgebra mit Eins e und $G(A) = A \setminus \{0\}$.
Dann ist A isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}$.

Beweis. Definiere $\phi : \mathbb{C} \to A$ durch $\phi(\lambda) = \lambda e$. Da $||e|| = 1$ gilt, ist $|\phi(\lambda)| = |\lambda|$. Somit ist ϕ eine Isometrie und insbesondere injektiv.
Es bleibt zu zeigen, dass ϕ auch surjektiv ist. Dazu sei $x \in A$. Dann ist $\sigma(x) \neq \emptyset$ nach Satz 7.1.14, also existiert ein $\lambda_x \in \mathbb{C}$ mit $x - \lambda_x e \notin G(A)$. Nach Voraussetzung folgt dann $x = \lambda_x e = \phi(\lambda_x)$. Damit ist ϕ surjektiv und es folgt die Behauptung. ■

Wir wissen bereits, dass $r(x) \leq ||x||$ gilt. Wir zeigen jetzt ein genaueres Ergebnis.

Satz 7.1.16. Es sei A eine komplexe Banachalgebra mit Eins e und $x \in A$.
Dann gilt

$$r(x) = \lim_{n \to \infty} ||x^n||^{1/n} = \inf_{n \in \mathbb{N}} ||x^n||^{1/n}. \tag{7.12}$$

Beweis.

1. Für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

$$(x^n - \lambda^n e) = (x - \lambda e)(x^{n-1} + \lambda x^{n-2} + \ldots + \lambda^{n-1} e).$$

Ist $\lambda^n \notin \sigma(x)$, d.h. ist $x^n - \lambda^n e \in G(A)$, so gilt $x - \lambda e \in G(A)$, also ist $\lambda \notin \sigma(x)$. Somit gilt $\lambda^n \in \sigma(x^n)$ für jedes $\lambda \in \sigma(x)$.
Nach Satz 7.1.11 gilt $|\lambda^n| \leq ||x^n||$ für alle $\lambda \in \sigma(x)$. Somit gilt $r(x) \leq ||x^n||^{1/n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus $r(x) \leq \liminf_{n \to \infty} ||x^n||^{1/n}$.

2. Ist $|\lambda| > ||x||$, so folgt aus Satz 7.1.8:

$$(x - \lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} x^n.$$

Jetzt sei $\phi \in A'$ und $f = \phi \circ R_x$. Da f in $\rho(x)$ holomorph und ϕ stetig ist, folgt

$$f(\lambda) = -\sum_{n=0}^{\infty} \phi(x^n) \lambda^{-n-1},$$

und diese Reihe konvergiert für alle $|\lambda| > r(x)$. Dies liefert

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\phi(\lambda^{-n}x^n)\right| < \infty \text{ für } |\lambda| > r(x) \text{ und } \phi \in A'.$$

Sei nun $J : A \to A''$ die kanonische Einbettung und für $|\lambda| > r(x)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei $\varphi_n := J(\lambda^{-n}x^n) \in A''$. Dann ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(\phi)| < \infty$ für $\phi \in A''$. Aus dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit erhalten wir

$$C(\lambda) := \sup_{n\in\mathbb{N}} ||\varphi_n|| < \infty.$$

Da J eine Isometrie ist, folgt für $|\lambda| > r(x)$: $||x^n||^{1/n} \leq |\lambda|\, C(\lambda)^{1/n}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Somit gilt $\limsup_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n} \leq r(x)$ nach Grenzübergang $\lambda \to r(x)$.

1 und 2 liefern dann die Behauptung. ■

....

7.1.3 C*-Algebren

Definition 7.1.17. Es sei A eine komplexe Banachalgebra. Eine Abbildung $^*\colon A \to A$ heißt **Involution**, wenn für alle $x, y \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

(I1) $(x+y)^* = x^* + y^*$

(I2) $(\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*$

(I3) $(xy)^* = y^* x^*$

(I4) $(x)^{**} = x$

Gilt zusätzlich noch

(I5) $||xx^*|| = ||x||^2$

für alle $x \in A$, so heißt A eine **C*-Algebra**. Ein Element heißt **selbstadjungiert**, wenn $x^* = x$ gilt. Ein $x \in A$ heißt **normal**, wenn $xx^* = x^*x$ gilt.

. . . .

Beispiel 7.1.18.

a) $A = \mathbb{C}$ ist eine C*-Algebra mit $z \mapsto \overline{z}$ als Involution.

b) Ist X ein lokalkompakter Hausdorffraum, so ist $A = C_0(X)$ eine C*-Algebra mit $f \mapsto \overline{f}$ als Involution.
Ebenso gilt dies für $A = L^\infty(\mu)$ für jedes positive Maß μ.

c) Ist H ein Hilbertraum, so ist $A = L(H)$ eine C*-Algebra mit $T \mapsto T^*$ als Involution.

. . . .

Satz 7.1.19. Es sei A eine komplexe Banachalgebra mit Involution und $x \in A$. Dann gelten:

a) $x + x^*, \mathrm{i}(x + x^*)$ und xx^* sind selbstadjungiert.

b) x besitzt eine eindeutige Darstellung $x = u + \mathrm{i}v$ mit $u, v \in A$ selbstadjungiert.

Besitzt A ein Einselement, so gelten folgende weitere Aussagen:

c) e ist selbstadjungiert.

d) $x \in G(A) \Leftrightarrow x^* \in G(A)$. In diesem Fall gilt $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$.

e) $\lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(x^*)$.

Beweis.

a) Ist klar.

b) Setze $u := \frac{1}{2}(x + x^*)$ und $v := \frac{\mathrm{i}}{2}(x^* - x)$. Dann sind nach a) u und v selbstadjungiert mit $x = u + \mathrm{i}v$.
Nun müssen wir noch die Eindeutigkeit zeigen. Ist $x = u' + \mathrm{i}v'$ eine weitere solche Darstellung, so setzen wir $w := v' - v = \mathrm{i}(u - u')$. Dann sind w und $\mathrm{i}w$ selbstadjungiert, also gilt

$$\mathrm{i}w = (\mathrm{i}w)^* = -\mathrm{i}w^* = -\mathrm{i}w.$$

Somit ist $w = 0$, also folgt die Eindeutigkeit.

c) Folgt wegen $e^* = ee^*$ aus a).

d) Folgt aus (I3).

e) Folgt aus d) angewandt auf $x - \lambda e$ statt x.

■

Satz 7.1.20. Es sei A eine C*-Algebra und $x \in A$. Dann gelten:

a) $||x^*|| = ||x||$.

b) Ist x normal, so ist $||x||^2 = ||x||^2$. Besitzt A zusätzlich eine Eins e, so gilt $r(x) = ||x||$. Insbesondere gibt es ein $\lambda \in \sigma(x)$ mit $|\lambda| = ||x||$.

c) Ist x selbstadjungiert und besitzt A eine Eins e, so gilt $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

Beweis.

a) Es gilt $||x||^2 = ||xx^*|| \leq ||x||\,||x^*||$, also folgt $||x|| \leq ||x^*||$. Hieraus folgt $||x''|| = ||x||$, also $||x|| = ||x^*||$.

b) Es gilt

$$\left|\left|x^2\right|\right|^2 = \left|\left|(x^2)(x^2)^*\right|\right| = ||x(xx^*)x^*|| = ||(xx^*)(xx^*)|| = ||xx^*||^2 = ||x||^4 .$$

Damit folgt $\left|\left|x^2\right|\right| = ||x||^2$. Da mit x auch x^n normal ist, folgt $\left|\left|x^{2^k}\right|\right| = ||x||^{2^k}$. Mit Satz 7.1.16 folgt

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} ||x^n||^{1/n} = \lim_{k\to\infty} \left|\left|x^{2^k}\right|\right|^{\left(\frac{1}{2}\right)^k} = ||x|| .$$

Die Existenz eines solchen λ folgt aus der Abgeschlossenheit von $\sigma(x)$.

c) Es sei $\alpha + \mathrm{i}\beta \in \sigma(x)$. Dann ist auch $\alpha + \mathrm{i}(\beta + \lambda) \in \sigma(x + \mathrm{i}\lambda e)$ mit $|\alpha + \mathrm{i}(\beta + \lambda)|^2 \leq ||x + \mathrm{i}\lambda e||^2$. Man rechnet nun nach, dass

$$\alpha^2 + (\beta + \lambda)^2 \leq ||x + \mathrm{i}\lambda e||^2 \overset{[...]}{=} \left|\left|x^2 + \lambda^2 e\right|\right| \leq ||x||^2 + |\lambda|^2$$

gilt, woraus $\alpha^2 + \beta^2 + 2\beta\lambda \leq ||x||$ folgt. Dies gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und ist daher nur möglich, falls $\beta = 0$ ist. Also ist $\sigma(x) \subset \mathbb{R}$.

■

7.2 Kompakte Operatoren

Wir wollen hier eine wichtige Klasse von Operatoren kennenlernen, die in der Theorie der *Integralgleichungen* eine wichtige Rolle spielen.

7.2.1 Kompakte Operatoren

Definition 7.2.1. Es seien E, G Banachräume.
Ein linearer Operator $T : E \to G$ heißt **kompakt**, falls $T(B_E)$ kompakt in G ist. Die Menge aller kompakten Operatoren $T : E \to G$ bezeichnen wir mir $K(E, G)$. Außerdem sei $K(E) := K(E, E)$. Ferner sei $F(E, G)$ die Menge aller $T \in L(E, G)$ mit $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$ und $F(E) := F(E, E)$.

. . . .

Bemerkung: Da kompakte Mengen beschränkt sind, folgt sofort, dass $K(E, G) \subset L(E, G)$ gilt. Offensichtlich ist ein Operator T kompakt genau dann, wenn $\overline{T(M)}$ kompakt in G für jedes beschränkte MEnge $M \subset E$ gilt. Aus der Äquivalenz der FOlgenkompaktheit und der Kompaktheit in metrischen Räumen folgt:
Ein Operator $T \colon E \to G$ ist kompakt genau dann, wenn für jede beschränkte Folge (x_n) in E die Bildfolge (Tx_n) in G eine konvergente Teilfolge besitzt.
Ist $\dim E = \infty$, so ist der identische Operator nie kompakt.

Satz 7.2.2. Es seien E, G, H Banachräume. Dann gelten:

a) Ist $T \in L(E, G)$ und $\dim E < \infty$, so ist $T \in K(E, G)$.

b) Es ist $F(E, G) \subset K(E, G)$.

c) Ist $T \in K(E, G)$ und $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen, so ist $T \in F(E, G)$.

d) $K(E, G)$ ist ein abgeschlossener Unterraum von $L(E, G)$ bezüglich der Operatornorm. Insbesondere ist $K(E, G)$ ein Banachraum.

e) Sind $T \in L(E, G)$ und $S \in L(G, H)$ und ist T oder S kompakt, so ist $S \circ T$ kompakt.

Beweis.

a) Wegen $\dim E < \infty$ ist B_E kompakt. Da T stetig ist, ist $T(B_E)$ kompakt. Somit ist T kompakt.

b) Folgt aus dem Satz von Heine-Borel.

c) Da $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist, ist $\mathcal{R}(T)$ ein Banachraum und $T : E \to \mathcal{R}(T)$ surjektiv. Nach dem Satz von der offenen Abbildung ist T offen. Da T kompakt ist, ist $\mathcal{R}(T)$ lokalkompakt und aus Satz 1.3.3 folgt $\dim \mathcal{R}(T) < \infty$. Also ist $T \in F(E, G)$.

d) Man überlegt sich leicht, dass $K(E, G)$ ein Vektorraum und damit ein Unterraum von $L(E, G)$ ist. Zum Beweis der Abgeschlossenheit von $K(E, G)$ sei (T_n) eine Folge in $K(E, G)$ mit $T_n \xrightarrow{n\to\infty} T$ in $L(E, G)$. Zu zeigen ist nun, dass $T \in K(E, G)$ gilt.
Zunächst konstruiert man mit dem Cantorschen Diagonalverfahren eine Diagonalfolge (ξ_k) mit $\xi_k = x_{nk}^{(k)}$, wobei (x_n) eine beschränkte Folge in E ist. Nun zeigt man mit einem technischen $\frac{\varepsilon}{3}$-Argument, dass die Folge $(T\xi_k)$ eine Cauchyfolge ist[30]. Da G ein Banachraum ist, konvergiert somit die Folge $(T\xi_k)$ und damit folgt die Behauptung.

[30] Nutze dazu die Konvergenz von (T_n) gegen T und die Konvergenz der Folgen $(T_N\xi_k)$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ aus dem Cantorschen Diagonalverfahren aus.

e) Es sei (x_n) eine beschränkte Folge in E. Dann ist $y_n = Tx_n$ beschränkt in G, da T stetig ist. Ist nun S kompakt, so besitzt (Sy_n) eine konvergente Teilfolge, also besitzt (STx_n) eine konvergente Teilfolge und somit ist ST kompakt.
Ist andererseits T kompakt, so besitzt (Tx_n) eine konvergente Teilfolge. Wendet man S auf diese Teilfolge an, so ist auch diese konvergent, da T stetig ist. Dies zeigt die Behauptung.

■

Folgerung 7.2.3. Es seien E, G Banachräume, $T \in L(E,G)$ und es existiere eine Folge (T_n) in $F(E,G)$ mit $||T_n - T|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Dann ist $T \in K(E,G)$. Insbesondere ist $\overline{F(E,G)} \subset K(E,G)$.

Beweis. Folgt sofort aus Satz 7.2.2 d) und b). ■

Für das nächste Ergebnis benötigen wir den Satz von Arzelà-Ascoli, der aus den Analysis-Vorlesungen bekannt sein könnte.

Satz 7.2.4 (*Arzelà-Ascoli*). Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $M \subset C(X)$ gleichgradig stetig und beschränkt, d.h.

- Zu jedem $x_0 \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung $U := U(x_0, \varepsilon)$, sodass $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $x \in x_0$ und alle $f \in M$ gilt.
- Es gibt eine – nicht von f abhängige – Konstante $C > 0$ mit $|f(x)| < C$ für alle $x \in X$ und $f \in M$.

Dann besitzt jede Folge (f_n) in M eine Teilfolge (f_{n_k}), die auf M gleichmäßig konvergiert. Anders ausgedrückt: $\overline{M}$ ist kompakt in $C(X)$.
[Hier ohne Beweis.[31]]

Satz 7.2.5 (*Satz von Schauder*). Es seien E, G Banachräume und $T \in L(E,G)$.
Dann gilt: T kompakt. $\Leftrightarrow$ T' kompakt.

Beweis.
$\Rightarrow$:
Es sei T kompakt und (y'_n) eine Folge in $B_{G'}$. Dann ist $K := \overline{T(B_E)}$ kompakt und $f_n := y'_n|_K \in C(K)$. Weiter ist (f_n) beschränkt, da (y'_n) beschränkt ist. Zudem ist (f_n) gleichgradig stetig, denn es gilt: $|f_n(y_1) - f_n(y_2)| \leq ||y_1 - y_2||$.[32] Somit gibt es nach dem Satz von Arzelà-Ascoli eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n), die gleichmäßig auf K konvergiert.
Mit der Definition des dualen Operators gilt nun

$$\left|\left|T'y'_{n_k} - T'y'_{n_m}\right|\right| = \sup_{x\in B_E} \left|\langle x, T'(y'_{n_k} - y'_{n_m})\rangle\right| = \sup_{x\in B_E} \left|\langle Tx, y'_{n_k} - y'_{n_m}\rangle\right| = \sup_{x\in B_E} |f_{n_k}(Tx) - f_{n_m}(Tx)|$$

und damit folgt, dass $(T'y'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in R' ist und somit konvergiert, da E' vollständig ist. Somit ist T' kompakt.

[31] Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.
[32] Beachte: Lipschitz-Stetigkeit mit gleicher Lipschitz-Konstanten impliziert gleichgradige Stetigkeit.

$\underline{\underline{\Leftarrow}}$:
Es sei nun T' kompakt. Dann ist $T'' : E'' \to G''$ nach dem vorigen Beweisschritt kompakt.
Seien nun $J_E : E \to E''$ und $J_G : G \to G''$ die kanonischen Einbettungen. Dann ist $T''J_E$ nach Satz 7.2.2 e) kompakt und für $x \in E$ und $y' \in G'$ gilt

$$\langle y', T''J_E x\rangle = \langle T'y', J_E x\rangle = \langle x, T'y'\rangle = \langle Tx, y'\rangle = \langle y', J_G T x\rangle .$$

Somit ist $J_G T = T''J_E$, also ist $J_G T : E \to G''$ kompakt, da auch $T''J_E$ kompakt war.
Ist also (x_n) eine beschränkte Folge in E, so existiert eine Teilfolge (x_{n_k}), sodass $(J_G T x_{n_k})$ konvergiert. Da $J_G(G)$ abgeschlossen in G'' und J_G eine Isometrie ist, ist (Tx_{n_k}) konvergent, also T kompakt. ■

. . . .

7.2.2 Die Theorie von Riesz-Schauder

Nun soll das Spektrum kompakter Operatoren untersucht werden. Dazu sind einige Vorbereitungen notwendig.

Satz 7.2.6. Es sei E ein Banachraum. Dann gelten:

a) Ist $T \in K(E)$ und $\lambda \neq 0$, so ist $\dim \mathcal{N}(T - \lambda I) < \infty$.[33]

b) Ist $T \in K(E)$ und $\dim E = \infty$, so ist $0 \in \sigma(T)$.

c) Es ist $K(E)$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $L(E)$.

Beweis.

a) Es sei $F := \mathcal{N}(T - \lambda I)$. Dann ist $T|_F \colon F \to F$ kompakt, also folgt die Behauptung aus Satz 7.2.2 c).

b) Ist $0 \notin \sigma(T)$, so ist T invertierbar. Dann ist $I = TT^{-1}$ kompakt, also $\dim E < \infty$, ein Widerspruch.

c) Folgt aus Satz 7.2.2 e).

■

....

Definition 7.2.7. Es sei E ein topologischer Vektorraum und M ein *abgeschlossener* Unterraum. M heißt **komplementiert in E**, wenn es einen *abgeschlossenen* Unterraum N von E gibt mit $E = M \oplus N$. N heißt dann ein **Komplement** von M und E die **topologische direkte Summe** von M und N.

....

Bemerkung: N ist nicht eindeutig bestimmt. Sei $E := \mathbb{R}^2$ und $M := \mathbb{R} \times \{0\}$. Dann ist jede Ursprungsgerade, die nicht mit $\mathbb{R}$ zusammenfällt, ein Komplement von M.

Lemma 7.2.8. Es sei E ein topologischer Vektorraum und M ein abgeschlossener Unterraum von E. Dann gelten:

a) Ist E lokalkonvex und $\dim M < \infty$, so ist M komplementiert in E.

b) Ist $\operatorname{codim} M := \dim {}^{E}\!/\!_{M} < \infty$, so ist M komplementiert.

Beweis.

a) Es sei $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von M. Dann hat jedes $x \in M$ eine eindeutige Darstellung $x = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j(x) e_j$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ stetige lineare Funktionale auf M sind. Diese können wir mit dem Satz von Hahn-Banach zu stetigen linearen Funktionalen auf E fortsetzen. Setze nun $N := \bigcap\limits_{j=1}^{n} \mathcal{N}(\alpha_j)$. Dann ist N als endlicher Durchschnitt abgeschlossener Mengen ein abgeschlossener Unterraum von E und man zeigt leicht, dass $M \oplus N = E$ gilt.

b) Es sei $\Pi : E \to {}^{E}\!/\!_{M}$ die Quotientenabbildung und $\{e_1, \ldots, e_n\}$ eine Basis von ${}^{E}\!/\!_{M}$. Für $k = 1, \ldots, n$ wähle nun $x_1, \ldots, x_n \in E$ mit $\Pi(x_k) = e_k$ für $k = 1, \ldots, n$. Dann ist $N := \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ als endlichdimensionaler Unterraum ein abgeschlossener Unterraum von E und man zeigt wieder leicht, dass $E = M \oplus N$ gilt.

[33] Es kann also höchstens einen Spektralwert geben, der kein Eigenwert ist, nämlich die 0.

■

Lemma 7.2.9. Es sei E ein normierter Raum und M ein Unterraum von E, der *nicht* dicht in E ist. Sei ferner $r > 1$.
Dann existiert ein $x \in E$ mit $||x|| < r$ und $||x - y|| \geq 1$ für alle $y \in M$.

Beweis. Da M nicht dicht ist, existiert $x_1 \in E$ mit $\inf\limits_{y \in M} ||x_1 - y|| = 1$. Wähle dann $y_1 \in M$ mit $||x_1 - y_1|| < r$ und setze $x := x_1 - y_1$. ■

Satz 7.2.10. Es sei E ein Banachraum, $T \in K(E)$ und $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$.
Dann ist $\mathcal{R}(T - \lambda I)$ abgeschlossen.

Beweis. Nach Satz 7.2.6 a) ist $\dim \mathcal{N}(T - \lambda I) < \infty$. Daher existiert nach Lemma 7.2.8 ein abgeschlossener Unterraum M von E mit $E = \mathcal{N}(T - \lambda I) \oplus M$. Wir definieren nun $S \in L(M, E)$ durch $Sx := Tx - \lambda x$ für $x \in M$. Dann ist S injektiv und $\mathcal{R}(S) = \mathcal{R}(T - \lambda I)$, da der Kern eliminiert ist. Wir zeigen nun: Es existiert ein $r > 0$ mit

$$r\,||x|| \leq ||Sx||\,, \ x \in M. \tag{$*$}$$

Andernfalls existiert eine Folge (x_n) in M mit $||x_n|| = 1$ und $Sx_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Da T kompakt ist, können wir durch Übergang zu einer Teilfolge erreichen, dass $Tx_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ für ein $x_0 \in E$ gilt. Dann folgt $\lambda x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, also ist $x_0 \in M$. Da S injektiv ist, muss $x_0 = 0$ gelten. Andererseits gilt $||x_0|| = |\lambda| \neq 0$, ein Widerspruch. Also gilt $(*)$. ◇

Ist nun (Sx_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{R}(S)$, so ist wegen $(*)$ auch (x_n) eine Cauchyfolge in M und daher konvergent, da M abgeschlossen ist. Wegen der Stetigkeit von S ist (Sx_n) konvergent, also ist $\mathcal{R}(S)$ vollständig und damit abgeschlossen. ■

Satz 7.2.11. Es sei E ein Banachraum, $T \in K(E)$, $r > 0$ und $A \subset \mathbb{K}$ eine Menge von Eigenwerten λ von T mit $|\lambda| > r$.
Dann gelten:

a) Für jedes $\lambda \in A$ ist $\mathcal{R}(T - \lambda I) \neq E$.

b) A ist eine endliche Menge.

Beweis. Wir zeigen zunächst:
Ist a) oder b) falsch, so existiert eine Folge abgeschlossener Unterräume (M_n) von E und $\lambda_n \in A$ mit

1) $M_n \subsetneq M_{n+1}$ $(n \geq 1)$,

2) $T(M_n) \subset M_{n+1}$ $(n \geq 1)$ *und*

3) $(T - \lambda I_n)(M_n) \subset M_{n-1}$ $(n \geq 2)$.

Beweis der Zwischenbehauptung:

Annahme 1: a) ist falsch.
Dann ist $\mathcal{R}(T - \lambda_0 I) = E$ für ein $\lambda_0 \in A$. Wir setzen $S := T - \lambda_0 I$ und $M_n := N(S^n)$. Dann zeigt man leicht, dass 1), 2) und 3) mit $\lambda_n = \lambda_0$ erfüllt sind.

Annahme 2: b) ist falsch.
Dann enthält A eine Folge paarweiser verschiedener Eigenwerte (λ_n) von T. Wir wählen zugehörige Eigenvektoren (e_n) und setzen $M_n := \langle e_1, \dots, e_n \rangle$. Dann zeigt man wieder leicht, dass 1), 2) und 3) erfüllt sind. $\diamond$

Nun leiten wir aus 1) bis 3) einen Widerspruch her.
Zu jedem $n \geq 2$ existiert nach Lemma 7.2.9 ein $y_n \in M_n$ mit $||y_n|| \leq 2$ und $||y_n - x|| \geq 1$ für $x \in M_{n-1}$. Dies ist möglich wegen 1).
Für $2 \leq m < n$ setzen wir nun $z := Ty_m - (T - \lambda_n I)y_n$. Wegen 2) und 3) folgt $z \in M_{n-1}$. Somit gilt

$$||Ty_n - Ty_M|| = ||\lambda_n y_n - z|| \overset{\lambda_n \neq 0}{=} |\lambda_n| \left|\left|y_n - \lambda_n^{-1} z\right|\right| \geq |\lambda_n| < r \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Somit besitzt (Ty_n) keine konvergente Teilfolge und ist folglich nicht kompakt, ein Widerspruch. ■

Lemma 7.2.12. Es sei F ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, M ein abgeschlossener Unterraum von F und Σ der Raum aller stetigen linearen Funktionlae auf F, die auf M verschwinden.
Dann ist $\dim {}^F\!/_M \leq \dim \Sigma$.

Beweis. Es sei $k \in \mathbb{N}$ mit $k \leq \dim {}^F\!/_M$. Dann existieren $y_1, \dots, y_k \in F$ mit folgender Eigenschaft:
Ist $M_j := \langle M, y_1, \dots, y_j \rangle$ $(j = 1, \dots, k)$, so ist M_{j-1} ein echter Unterraum von M_j, wobei wir $M_0 := M$ setzen.
Nach Satz 1.6.2 ist M_j abgeschlossen und nach Satz 2.5.8 gibt es $\phi_1, \dots, \phi_k \in F'$ mit $\phi_j(y_j) = 1$ und $\phi_j(y) = 0$ für $y \in M_{j-1}$. somit sind $\phi_1, \dots, \phi_k \in \Sigma$ und zudem linear unabhängig, also ist $\dim \Sigma \geq k$. ■

Satz 7.2.13 (*Satz von Riesz-Schauder*). Es sei E ein Banachraum und $T \in K(E)$. Dann gelten:

a) Ist $\lambda \neq 0$, so sind die vier Zahlen

$$\alpha := \dim \mathcal{N}(T - \lambda I),\ \beta := \dim {}^E\!/_{\mathcal{R}(T-\lambda I)}, \alpha' := \dim \mathcal{N}(T' - \lambda I) \text{ und } \beta' := \dim {}^E\!/_{\mathcal{R}(T'-\lambda I)}$$

endlich und gleich.

b) Ist $\lambda \in \sigma(T)$ und $\lambda \neq 0$, so ist λ ein Eigenwert von T und T'.

c) $\sigma(T)$ ist kompakt, höchstens abzählbar und hat höchstens 0 als Häufungspunkt.

Beweis.

a) Zur Abkürzung setzen wir $S := T - \lambda I$. Dann gilt $S' = T' - \lambda I$. Nun zeigen wir:

$$\beta \overset{1)}{\leq} \alpha',\ \beta' \overset{2)}{\leq} \alpha,\ \alpha \overset{3)}{\leq} \beta \text{ und } \alpha' \overset{4)}{\leq} \beta'.$$

Dann gilt $\beta \leq \alpha' \leq \beta' \leq \alpha \leq \beta$ und die Behauptung ist bewiesen.

1): Aus Lemma 7.2.12 (mit $F = E$ und $M = \mathcal{R}(S)$) folgt sofort $\beta \leq \alpha'$.

2): Wir wählen $F = E'$ mit der schwach*-Topologie und $M = \mathcal{R}(S')$. Nach Satz 7.2.10 und 3.2.5 ist M schwach*-abgeschlossen. Da Σ aus allen schwach*-stetigen Funktionalen auf E', die auf $\mathcal{R}(S')$ verschwinden, besteht, ist Σ isomorph zu ${}^{\perp}\mathcal{R}(S) = \mathcal{N}(S)$ nach Satz 3.2.2. Dann folgt wieder mit Lemma 7.2.12: $\beta' \leq \alpha$.

3): Annahme: $\alpha > \beta$.
Nach Satz 7.2.6 a) ist $\alpha < \infty$. Nach Lemma 7.2.8 gibt es abgeschlossene Unterräume M, N von E mit $\dim N = \beta$ und

$$E = \mathcal{N}(S) \oplus M = \mathcal{R}(S) \oplus N. \tag{$*_1$}$$

Jedes $x \in E$ hat also eine eindeutige Darstellung der Form $x = x_1 + x_2$ mit $x_1 \in \mathcal{N}(S)$ und $x_2 \in M$. Wir definieren $\pi : E \to \mathcal{N}(S)$ durch $\pi x := X_1$ für $x \in E$. Aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen folgt leicht, dass π stetig ist.
Wegen $\dim \mathcal{N}(S) > \dim N$ gibt es eine surjektive lineare Abbildung $\varphi : \mathcal{N}(S) \to N$ mit $\varphi x_0 = 0$ für ein $x_0 \neq 0$. Nun definieren wir $\phi \in L(E)$ durch $\phi x := Tx + \varphi\pi x$ für $x \in E$. Da $\dim \mathcal{R}(\varphi) < \infty$ gilt, ist $\varphi\pi$ kompakt nach Satz 7.2.2 b) und e), also ist auch ϕ kompakt.
Es ist

$$\phi - \lambda I = S + \varphi\pi. \tag{$*_2$}$$

Wegen $x_0 \in \mathcal{N}(S)$ ist $\pi x_0 = x_0$, also folgt $\varphi\pi x_0 = 0$. Somit ist λ ein Eigenwert von ϕ mit Eigenvektor x_0. Aus Satz 7.2.11 a) folgt nun $\mathcal{R}(\phi - \lambda I) \neq E$. Da $\pi x = 0$ für alle $x \in M$ gilt, folgt aus ($*_2$):

$$(\phi - \lambda I)(M) = S(M) \overset{(*_1)}{=} S(E) = \mathcal{R}(S). \tag{$*_3$}$$

Ist $x \notin \mathcal{N}(S)$, so ist $\pi x = x$ und ($*_2$) ergibt

$$(\phi - \lambda I)(\mathcal{N}(S)) = \varphi(\mathcal{N}(S)) = N. \tag{$*_4$}$$

Aus ($*_3$) und ($*_4$) folgt $\mathcal{R}(\phi - \lambda I) \supset R(S) + N = E$. Dies ist ein Widerspruch zu $\mathcal{R}(\phi - \lambda I) \neq E$ und somit ist 3) bewiesen.

4): Aus $\alpha \leq \beta$ folgt sofort $\alpha' \leq \beta'$, da T' nach dem Satz von Schauder ebenfalls kompakt ist.

Da $\alpha < \infty$ ist, folgt die Behauptung.

b) Ist λ kein Eigenwert von T, so ist $\alpha = 0 = \beta$. Somit folgt $\mathcal{R}(T - \lambda I) = E$ und $T - \lambda I$ ist daher invertierbar. Dann ist aber $\lambda \notin \sigma(T)$, ein Widerspruch.
Ebenso zeigt man, dass λ ein Eigenwert von T' ist.

c) Aus b) und Satz 7.2.11 b) folgt, dass $\sigma(T)$ höchstens abzählbar und 0 der einzige Häufungspunkt (wenn überhaupt) von $\sigma(T)$ ist. Die Kompaktheit von $\sigma(T)$ folgt aus Satz 7.1.11.

■

Bemerkung: Ein Operator heißt **Fredholmoperator**, falls $\dim \mathcal{N}(T) < \infty$ ist, $\mathcal{R}(T)$ abgeschlossen ist und $\dim {}^{E}/_{\mathcal{R}(T)} < \infty$ gilt.

Die Zahl

$$\operatorname{ind} T := \dim \mathcal{N}(T) - \dim {}^{E}/_{\mathcal{R}(T)} \tag{7.13}$$

heißt **Index** von T.
Aus dem Satz von Riesz-Schauder folgt, dass für jeden kompakten Operator T auf E der Operator $T - \lambda I$, $\lambda \neq 0$, ein Fredholmoperator vom Index 0 ist.

7.2.3 Die Fredholmsche Alternative und Anwendungen auf Integralgleichungen

Wir wollen jetzt die Theorie von Riesz-Schauder auf Integralgleichungen anwenden. Dazu benötigen wir ein Ergebnis über Operatorgleichungen.

Satz 7.2.14 (*Fredholmsche Alternative*). Es sei E ein Banachraum, $T \in K(E)$ und $\lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$. Dann ist *genau eine* der folgenden Aussagen richtig:

- Die homogene Gleichung $Tx - \lambda x = 0$ hat nur die triviale Lösung und die inhomogene Gleichung $Tx - \lambda x = y$ hat für jedes $y \in E$ genau eine Lösung.
- Es existieren $n := \dim \mathcal{N}(T - \lambda I) \in \mathbb{N}$ linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung und auch die adjungierte Gleichung $T'x' - \lambda x' = 0$ hat genau n linear unabhängige Lösungen. In diesem Fall ist die inhomogene Gleichung genau dann lösbar, wenn $y \in^{\perp} \mathcal{N}(T' - \lambda I')$ gilt.

Beweis. Folgt aus dem Satz von Riesz-Schauder, Satz 3.2.2 und Satz 7.2.10. ■

....

Als Anwendung betrachten wir die sogenannte *Volterrasche Integralgleichung 2. Art*:

$$g(x) + \lambda f(x) = \int_0^x k(x,t) f(t) \mathrm{d}t. \tag{7.14}$$

Hierbei ist $k \in C([0,1]^2)$, $g \in C[0,1]$ und $\lambda \neq 0$. Gesucht ist „die“ Lösung $f \in C[0,1]$. Dazu betrachten wir den *Volterra-Integraloperator* $(Tf)(X) := \int_0^x k(x,t)f(t)\mathrm{d}t$. Ähnlich wie in einer Übungsaufgabe zeigt man $T \in K(C[0,1])$. Dann schreibt sich (7.14) als Operatorgleichung wie folgt:

$$Tf - \lambda f = g. \tag{7.15}$$

Wir zeigen nun: $T - \lambda I$ ist injektiv.
Dazu können wir ohne Einschränkung $\lambda = 1$ annehmen. Sei $(T - \lambda I)f = 0$, d.h. $Tf = f$. Dann folgt für $x \in [0,1]$:

$$|f(x)| = |(Tf)(x)| \leq \int_0^x |k(x,t)|\, |f(t)| \,\mathrm{d}t \leq ||k||_\infty \, ||f||_\infty \, x.$$

Hiermit gilt nun

$$|f(x)| = |(Tf)(x)| \leq ||k||_\infty \, ||f||_\infty \int_0^x |k(x,t)| \,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}x^2 \, ||k||_\infty^2 \, ||f||_\infty .$$

Durch wiederholtes Einsetzen bzw. mit vollständiger Induktion erhalten wir

$$|f(x)| \leq \frac{x^n \, ||k||_\infty^n}{n!} \, ||f||_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{7.16}$$

Damit folgt $f \equiv 0$ und die himogene Gleichung $Tf = \lambda f$ hat somit nur die triviale Lösung. Aus der Fredholmschen Alternative folgt nun, dass die inhomogene Gleichung $Tf - \lambda f = g$ für jedes $g \in C[0,1]$ genau eine Lösung hat.

7.2.4 Kompakte Operatoren auf Hilberträumen

In Hilberträumen kann man die Theorie von Riesz-Schauder wesentlich verbessern. Dazu zeigen wir zunächst

Satz 7.2.15. Es sei H ein Hilbertraum und $T \in K(H)$. Dann gelten:

a) $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow \overline{\lambda} \in \sigma(T^*)$.

b) Ist T selbstadjungiert, so ist $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$.

c) Ist T normal und x ein Eigenvektor von T zum Eigenwert λ, so ist x ein Eigenvektor von T^* zum Eigenwert $\overline{\lambda}$.

d) Ist T normal und x, y Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten μ, λ, so gilt $x \perp y$.

e) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und T normal, so existiert $\lambda \in \sigma(T)$ mit $|\lambda| = ||T||$.

f) Ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und T selbstadjungiert und kompakt, so ist $||T||$ oder $-||T||$ ein Eigenwert von T.

Beweis.

a) Folgt aus Satz 7.1.19 e), wobei sich der Beweis für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nicht ändert.

b) Folgt aus Satz 7.1.20 c).

c) Ist T normal, so auch $T - \lambda I$. Mit Folgerung 4.3.9 ergibt sich

$$\mathcal{N}(T - \lambda I) = \mathcal{N}((T - \lambda I)^*) = \mathcal{N}(T^* - \lambda I).$$

Damit folgt die Behauptung.

d) Wegen $Tx = \lambda x$ und $Ty = \mu y$ und c) folgt

$$\lambda \langle x, y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^* y \rangle \overset{c)}{=} \langle x, \overline{\mu} y \rangle = \mu \langle x, y \rangle .$$

Wegen $\lambda \neq \mu$ folgt daraus $\langle x, y \rangle = 0$ und somit die Behauptung.

e) Folgt aus Satz 7.1.20 b).

f) Nach Satz 4.3.5 existiert eine Folge (x_n) in B_H mit $|\langle Tx_n, x_n \rangle| \xrightarrow{n\to\infty} ||T||$. Da T kompakt ist, können wir annehmen, dass die Grenzwerte $\lambda := \lim\limits_{n\to\infty} \langle Tx_n, x_n \rangle$ und $y := \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n$ existieren. Dann folgt

$$\begin{aligned} ||Tx_n - \lambda x_n||^2 = \langle Tx_n - \lambda x_n, Tx_n - \lambda x_n \rangle &= ||Tx_n||^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle + \lambda^2 ||x_n||^2 \\ &\leq 2\lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_n, x_n \rangle \xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Daher gilt $y = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda x_n$ und $Ty = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = \lambda y$. Wegen $|\lambda| = ||T||$ folgt die Behauptung, sofern $y \neq 0$. Ist $y = 0$, so ist (x_n) eine Nullfolge, also gilt $||T|| = \lim\limits_{n\to\infty} |\langle Tx_n, x_n \rangle| = 0$. Dann ist aber die Behauptung trivial.

■

Satz 7.2.16 (*Spektralsatz für kompakte normale Operatoren*). Es sei H ein Hilbertraum und $T \in K(H)$ normal (falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) bzw. selbstadjungiert (falls $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Dann existiert ein höchstens abzählbares ONS $\{e_1, e_2, e_3, \dots\}$ und eine (eventuell abbrechende) Nullfolge $(\lambda_n) \subset \mathbb{K}^*$ mit

$$H = \mathcal{N} \oplus_2 \overline{\langle e_1, e_2, e_3, \dots \rangle} \tag{7.17}$$

und

$$Tx := \sum_k \lambda_k \langle x, e_k \rangle e_k, \; x \in H, \tag{7.18}$$

wobei $\oplus_2$ die orthogonale direkte Summe bezeichnet. Dabei sind die λ_k die von 0 verschiedenen Eigenwerte von T und e_k ein Eigenvektor zu λ_k. Weiter gilt

$$||T|| = \sup_k |\lambda_k| \,. \tag{7.19}$$

Beweis.

1. Es sei $(\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots)$ die eventuell abbrechende Folge von paarweise verschiedenen Eigenwerten, die nicht 0 sind (vgl. Satz von Riesz-Schauder). Die zugehörigen Eigenräume $\mathcal{N}(T - \mu_j I)$ sind alle endlichdimensional, wobei die Dimension jeweils gleich d_j sei.
Definiere nun (λ_k) durch

$$(\lambda_k) := \left(\underbrace{\mu_1, \dots, \mu_1}_{d_1\text{-mal}}, \underbrace{\mu_2, \dots, \mu_2}_{d_2\text{-mal}}, \dots \right).$$

Da (μ_j) eine Nullfolge ist, ist dies auch (λ_k) Wir wählen zu jedem Eigenraum $\mathcal{N}(T - \mu_j I)$ ein vollständiges ONS $\left\{ e_1^{(j)}, \dots, e_{d_j}^{(j)} \right\}$ und definieren

$$(e_k) = \left\{ e_1^{(1)}, \dots, e_{d_1}^{(1)}, e_2^{(2)}, \dots, e_{d_2}^{(2)}, \dots \right\}.$$

2. Nach Satz 7.2.15 d) ist $\{e_k \colon k \in \mathbb{N}\}$ ein ONS und $Te_k = \lambda_k e_k$, $k \in \mathbb{N}$.[34] Nach dem gleichen Argument ist $\mathcal{N}(T) \perp e_k$ für alle k. Somit ist $H_1 := \mathcal{N}(T) \oplus \overline{\langle e_1, e_2, e_3, \dots \rangle}$ ein abgeschlossener Unterraum von H.

3. Wir zeigen nun: $H_1 = H$.
Dazu sei $H_2 := H_1^\perp$. Wir zeigen nun: $H_2 = \{0\}$. Für $y \perp e_k$ ist $Ty \perp e_k$, denn nach Satz 7.2.15 c) gilt

$$\langle Ty, e_k \rangle = \langle y, T^* e_k \rangle \overset{c)}{=} \langle y, \overline{\lambda_k} e_k \rangle = \lambda_k \langle y, e_k \rangle = 0.$$

Ebenso folgt $Ty \perp \mathcal{N}(T)$, falls $y \in \mathcal{N}(T)$, denn für $x \in \mathcal{N}(T)$ ist $x \in \mathcal{N}(T^*)$ und daher ist

$$\langle Ty, x \rangle = \langle y, T^* x \rangle = \langle y, 0 \rangle = 0.$$

Daher gilt $T(H_2) \subset H_2$, also folgt $T_2 := T|_{H_2} \in K(H_2)$.

[34] Hierbei muss man allerdings darauf achten, dass die Folge eventuell abbricht.

4. Nun zeigen wir: $T_2 \equiv 0$.
Nach Satz 7.2.15 e) und f) sowie dem Satz von Riesz-Schauder existiert $\lambda \neq 0$ und $0 \neq x \in H_2$ mit $T_2 x = \lambda x$. Somit ist $\lambda = \lambda_k$ für ein k und folglich $x \in \langle e_1, e_2, e_3, \dots \rangle \subset H_2^\perp$. Da $H_2 \cap H_2^\perp = \{0\}$ gilt, ist $x = 0$, ein Widerspruch. Also ist $T_2 \equiv 0$ und somit $H_2 \subset \mathcal{N}(T) \subset H_2^\perp$. Also folgt $H_2 = \{0\}$.

5. Jedes $x \in H$ hat also die Form

$$x = y + \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k$$

mit $y \in \mathcal{N}(T)$. Da T stetig ist folgt (7.18) und alles ist bewiesen.

■

Bemerkung:
Ergänzt man $\{e_1, e_2, \dots\}$ zu einem vollständigen ONS $\mathcal{S}$ von H, so folgt $Tx = \sum_{e \in \mathcal{S}} \lambda_e \langle x, e \rangle e$.

Bemerkung 7.2.17. Wir formulieren nun den Spektralsatz unter Benutzung der Bezeichnungen aus dem Beweis um:
Es sei E_k die Orthogonalprojektion von H auf $\mathcal{N}(T - \mu_k I)$. Dann gilt

$$E_k x = \sum_{j=1}^{d_k} \left\langle x, e_j^{(k)} \right\rangle e_j^{(k)}$$

und aus dem Spektralsatz folgt

$$Tx = \sum_k \mu_k E_k x, \quad x \in H.$$

Im endlichdimensionalen Fall ist dies gerade das Ergebnis aus LinA I über Diagonalisierbarkeit von Matrizen.

Als Anwendung betrachten wir nun *Fredholmsche Integralgleichungen 2. Art:*

$$g(x) + \lambda f(x) = \int_0^1 k(x,t) f(t) \mathrm{d}t. \tag{7.20}$$

k ist dabei ein L^2-Kern, $g \in L^2 := L^2[0,1]$ und gesucht ist $f \in L^2$.
Nun betrachten wir den *Fredholm-Integraloperator*

$$(Tf)(x) := \int_0^1 k(x,t) f(t) \mathrm{d}t. \tag{7.21}$$

Nach einer Übungsaufgabe ist $T \in K(L^2)$. Damit haben wir die Operatorgleichung $Tf - \lambda f = g$. Wir setzen nun noch voraus, dass $k(x,t) = \overline{k(t,x)}$ gilt. Dann zeigt man leicht, dass T selbstadjungiert ist.
Es sei nun $\lambda \in \rho(T)$. Dann ist $T - \lambda f$ bijektiv und die Integralgleichung (7.20) hat genau eine

Lösung. Wir wählen nun λ_n, e_n wie im Spektralsatz und ein vollständiges ONS S von $\mathcal{N}(T)$. Dann gilt:

$$Tf - \lambda f = g \Leftrightarrow \sum_n \lambda_n \langle f, e_n \rangle e_n - \lambda \sum_n \langle f, e_n \rangle e_n - \lambda \sum_{e \in S} \langle f, e \rangle e = \sum_n \langle g, e_n \rangle e_n + \sum_{e \in S} \langle g, e \rangle e$$
$$\Leftrightarrow \langle f, e \rangle = -\frac{1}{\lambda} \langle g, e \rangle \text{ für } e \in S, \ \langle f, e_n \rangle = \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle \text{ für alle } n.$$

Die Lösung der Integralgleichung ist also

$$f = \sum_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda} \langle g, e_n \rangle - \frac{1}{\lambda} \sum_{e \in S} \langle g, e \rangle e. \tag{7.22}$$

Problem: Wie bestimmt man die Eigenwerte?
Man kann auch den Kern enwickeln und erhält dann zum Beispiel

$$\sum_n \lambda_n^2 = \int_0^1 \int_0^1 |k(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x \mathrm{d}t.$$

Im Fall $C[0,1]$ (der wesentlich schwieriger ist) kann man den *Satz von Mercer* zeigen, vgl. dazu [Werner, 2011].

8 Einführung in die Theorie der Distributionen

In der theoretischen Physik benutzt man z.B. zur Beschreibung von Punktladungen oft die sogenannte Deltafunktion $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese hat die „Eigenschaften“:

- $\delta(x) = 0$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- An $x = 0$ sei sie so „definiert“, dass $\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x) = 1$ gilt.

Physiker „folgern“ hieraus mutig:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x) f(x) \mathrm{d}x = f(0). \tag{8.1}$$

Eine solche Funktion gibt es natürlich nicht.

Gleichung (8.1) deutet darauf hin, dass δ ein gewisses Funktional ist. Wir wollen dies hetzt auf eine mathematisch saubere Grundlage stellen. Damit möglichst viele Integrale der Form (8.1) existieren, sollte der zugrundeliegende Funktionenraum möglichst „klein“ sein. Andererseits sollte E' möglichst groß sein, d.h. die Topologie von E sollte möglichst „offene“ Mengen enthalten. Als geeignet erwies sich der Raum $\mathcal{D}(\Omega)$, den wir jetzt untersuchen wollen.

8.1 Raum der Testfunktionen

In diesem Abschnitt sei stets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $K \subset \Omega$ kompakt. Die Fréchetträume $\mathcal{D}_k$ wurden in Beispiel 1.7.13 eingeführt. Das folgende Lemma zeigt, dass $\mathcal{D}_k \neq \{0\}$ gilt, falls $K^\circ \neq \emptyset$.

Lemma 8.1.1. Es sei $K \subset \Omega$ und $K^\circ \neq \emptyset$. Dann ist $\mathcal{D}_k \neq \{0\}$.

Beweis. Wähle konzentrische Kugeln K_1, K_2 mit $K_1 \subset K_2^\circ \subset \Omega$. Dann gibt es eine C^∞-Funktion f mit $f|_{K_1} = 1$ und $f(x) = 0$ für $x \in \Omega \setminus K_2$. Dies sollte aus Ana III bekannt sein und hieraus folgt die Behauptung. ■

Es sei $\mathcal{D}(\Omega) := \bigcup\limits_{K \subset \Omega} \mathcal{D}_k$, d.h. $\mathcal{D}(\Omega)$ ist die Menge aller $f \in \mathcal{E}(\Omega) := C^\infty(\Omega)$, deren Träger kompakt in Ω liegt. Mit den üblichen algebraischen Operationen ist dies ein Vektorraum. Wir wollen nun auf $\mathcal{D}(\Omega)$ eine geeignete Topologie einführen.
Dazu bezeichne $\mathcal{T}_k$ die lokalkonvexe Topologie von $\mathcal{D}_k$. Diese wird durch die Halbnormenfamilie $\{||\cdot||_N : N \in \mathbb{N}_0\}$ erzeugt mit

$$||\varphi||_N := \max_{|\alpha| \leq N} \max_{x \in \Omega} |D^\alpha \varphi(x)|\,, \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{8.2}$$

Es gilt $\mathcal{D}_{K_1} \subset \mathcal{D}_{K_2}$ für $K_1 \subset K_2$ und $\mathcal{D}_{K_1}$ ist $\mathcal{T}_{K_2}$-abgeschlossen in $\mathcal{D}_{K_2}$. Nun sei $\mathcal{P}$ die Familie aller Halbnormen p auf $\mathcal{D}(\Omega)$, sodass alle Einschränkungen $p|_{\mathcal{D}_k}$ $\mathcal{T}_k$-stetig sind. Es ist also $p \in \mathcal{P}$ genau dann stetig, wenn gilt:

$$\forall\ K \subset \Omega\ \exists\ c > 0,\ n \in \mathbb{N}\colon p(\varphi) \leq c\,||\varphi||_N \ \text{ für alle } \varphi \in \mathcal{D}_k. \tag{8.3}$$

Wir zeigen jetzt, dass $\mathcal{P}$ punktetrennend auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. Für $x \in \Omega$ definieren wir $\pi_x : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch $\pi_x(\varphi) = |\varphi(x)|$. Dann ist $\pi_x \in \mathcal{P}$. Ist $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi \neq 0$, so existiert ein $x \in \Omega$ mit $\varphi(x) \neq 0$. Damit folgt diese Behauptung.
Also definiert $\mathcal{P}$ eine lokalkonvexe Topologie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ und im Folgenden sei $\mathcal{D}(\Omega)$ immer mit dieser Topologie versehen. Wir wollen jetzt die Eigenschaften dieses Raumes studieren.

Satz 8.1.2.

a) Die Topologie auf $\mathcal{D}_k$ stimmt mit der von $\mathcal{D}(\Omega)$ auf $\mathcal{D}_k$ induzierten Teilraumtopologie überein.

b) $\mathcal{D}_k$ ist abgeschlossen in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Beweis.

a) Die Teilraumtopologie von $\mathcal{D}(\Omega)$ auf $\mathcal{D}_k$ wird von der Halbnormenfamilie $\mathcal{Q} := \{p|_{\mathcal{D}_k} : p \in \mathcal{P}\}$ erzeugt. Es gilt

$$\{||\cdot||_N : N \in \mathcal{N}_0\} \subset \mathcal{Q} \subset \{q\colon q \text{ ist } \mathcal{T}_k\text{-stetige Halbnorm auf } \mathcal{D}_k\}\,.$$

Damit folgt die Behauptung.

b) Für $x \in \Omega$ sei $\pi_X \in \mathcal{P}$ die oben definierte Halbnorm. Dann ist π_x $\mathcal{T}_k$-stetig und $\mathcal{N}(\pi_x)$ ist abgeschlossen. Somit ist $\mathcal{D}_k = \bigcap\limits_{x \in \Omega \setminus K} \mathcal{N}(\pi_x)$ abgeschlossen.

■

....

Satz 8.1.3. Es sei $M \subset \mathcal{D}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

a) M ist beschränkt.

b) Es existiert $K \subset \Omega$ und $(C_n) \subset (0, \infty)$, sodass $M \subset \mathcal{D}_k$ und $||\varphi||_N \leq C_N$ für alle $\varphi \in M$ und $N \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Annahme: Es existiert keine solche kompakte Menge.
Dann existiert eine Folge kompakter Mengen $K_j \subset \Omega$ mit $K_j \subset K_{j+1}^\circ$ und $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} K_j^\circ = \Omega$ sowie eine Folge (φ_j) in M, sodass $\varphi_j \in \mathcal{D}_{K_j}$ und $\varphi_j \notin \mathcal{D}_{K_{j-1}}$ gilt. Wähle nun $x_j \in K_j \setminus K_{j-1}$ mit $\alpha_j := |\varphi(x_j)| > 0$. Dann wird durch $\pi_j(\varphi) := j\alpha_j^{-1} |\varphi(x_j)|$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, eine Halbnorm $\pi_x \in \mathcal{P}$ definiert.
Nun setzen wir $\Pi := \sum\limits_{j=1}^{\infty} \pi_j$ und zeigen: $\Pi \in \mathcal{P}$. Ist K kompakt, so gilt für ein $N \in \mathbb{N}$: $K \subset K_N$. Somit ist $\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup\limits_{j=1}^{N} \mathcal{D}_{K_j}$. Wegen $\pi_h |_{\mathcal{D}_{K_l}} = 0$ für $j > l$ ist daher $\Pi(\varphi)$ für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ eine endliche Summe und somit wohldefiniert. Dass Π eine Halbnorm ist, rechnet man leicht nach. Weiter gilt für $K \subset K_N$:

$$\Pi |_{\mathcal{D}_k} = \sum_{j=1}^{N} \pi_j |_{\mathcal{D}_{K_j}} .$$

Somit ist $\Pi \in \mathcal{P}$.
Nun ist einerseits $\Pi(\varphi_j) \geq \pi_j(\varphi) = j$. Andererseits folgt aus a), dass (φ_j) und daher auch $(\pi_j(\varphi))$ beschränkt ist, was einen Widerspruch ergibt. Somit ist $M \subset \mathcal{D}_K$ eine kompakte Menge und somit ist M in $\mathcal{D}_K$ beschränkt. Dies ist die Behauptung.
b) $\Rightarrow$ a):
Die Voraussetzung impliziert, dass M eine beschränkte Menge in $\mathcal{D}_K$ ist. Nach Satz 8.1.2 a) ist dann M auch in $\mathcal{D}(\Omega)$ beschränkt. ■

....

Satz 8.1.4. Es sei (φ_j) eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$. Dann sind äquivalent:

a) $\varphi_j \xrightarrow{j \to \infty} 0$ bezüglich $\mathcal{T}$.

b) Es gibt eine kompakte Menge in $K \subset \Omega$ mit $\varphi_j \in \mathcal{D}_K$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $\varphi_j \xrightarrow{j \to \infty} 0$ bezüglich $\mathcal{T}_K$.

c) Es gibt eine kompakte Menge $K \subset \Omega$ mit $\varphi_j \in \mathcal{D}_K$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und $D^\alpha \varphi_j \xrightarrow{j \to \infty} 0$ gleichmäßig auf Ω.

Beweis. c) ist nur eine Umschreibung von b) und daher sind b) und c) äquivalent.
b) $\Rightarrow$ a): Ist klar.
a) $\Rightarrow$ b):
Da konvergente Folgen beschränkt sind, folgt aus Satz 8.1.3, dass $\varphi_j \in \mathcal{D}_K$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Aus Satz 8.1.2 a) folgt dann $\varphi_j \xrightarrow{j \to \infty} 0$ bezüglich $\mathcal{T}_K$. ■

....

Satz 8.1.5. Es sei F ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $T : \mathcal{D}(\Omega) \to F$ linear. Dann sind äquivalent:

a) T ist stetig.

b) T beschränkt.

c) Ist (φ_j) eine Folge in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$, so gilt $T\varphi_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$ in F.

d) $T\mid_{\mathcal{D}_K}$ ist stetig für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b): Folgt aus Satz 1.4.5.
b) $\Rightarrow$ c):
Es sei T beschränkt und $\varphi_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Nach Satz 8.1.4 gilt $\varphi_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$ in $\mathcal{D}_K$ für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ und $T\mid_{\mathcal{D}_K}$ ist beschränkt. Da $\mathcal{D}_K$ ein metrischer Vektorraum ist, folgt die Behauptung aus Satz 1.4.5.
c) $\Rightarrow$ d):
Da $\mathcal{D}_K$ ein metrischer Vektorraum ist, folgt dies aus Satz 8.1.4 und Satz 1.4.5.
d) $\Rightarrow$ a):
Es sei $\mathcal{Q}$ eine Familie von Halbnorm, die die Topologie von F erzeugt. Nach Voraussetzung ist $(q \circ T)\mid_{\mathcal{D}_K}$ eine stetige Halbnorm auf $\mathcal{D}_K$ für jede kompakte Menge K. Somit ist $q \circ T \in \mathcal{P}$, wobei $\mathcal{P}$ die erzeugte Halbnormenfamilie auf $\mathcal{D}(\Omega)$ ist. Damit folgt die Behauptung aus Satz 1.5.7. ■

....

Folgerung 8.1.6. Für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ist der Differentialoperator $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ stetig.

Beweis. Wegen $||D^\alpha\varphi||_N \leq ||\varphi||_{N+|\alpha|}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ ist $D^\alpha\varphi$ stetig auf jedem $\mathcal{D}_K$ für $K \subset \Omega$ kompakt. Somit ist D^α stetig auf $\mathcal{D}(\Omega)$ nach Satz 8.1.5. ■

....

Satz 8.1.7. Es sei ϕ ein lineares Funktional auf $\mathcal{D}_K$.
Dann sind äquivalent:

a) ϕ ist stetig.

b) Zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $C > 0$ mit $|\phi(\varphi)| \leq C\,||\varphi||_N$.

Beweis. Dies folgt sofort aus den Äquivalenzen a) und d) in Satz 8.1.5. ■

....

Definition 8.1.8. Es sei $\phi \in (\mathcal{D}(\Omega))'$. Dann heißt ϕ eine **Distribution** auf Ω. Falls man in Satz 8.1.7 für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ dasselbe N wählen kann, so heißt das kleinste solche N die **Ordnung** der Distribution. Falls kein solches N existiert, hat die Distribution Ordnung ∞. Den Raum aller Distributionen bezeichnen wir mit $\mathcal{D}'(\Omega)$.[35]

....

[35] Mit dem Baireschen Kategoriesatz lässt sich zeigen, dass $\mathcal{D}(\Omega)$ nicht metrisierbar ist.

8.2 Beispiele und Eigenschaften von Distributionen

Bezeichnungen: Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$ Multiindizes und $x, y \in \mathbb{R}^n$.

- $\alpha \leq \beta :\Leftrightarrow \alpha_k \leq \beta_k \ \forall \ k = 1, \dots, n$.
- $\alpha \pm \beta := (\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_n \pm \beta_n)$
- $\langle x, y \rangle := \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$.
- $||x||_2 := \langle x, x \rangle^{1/2}$.
- $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$.

8.2.1 Beispiele von Distributionen

Definition 8.2.1. Eine messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt **lokal integrierbar** auf Ω, wenn $f \in L^1(K)$ für jedes kompakte $K \subset \Omega$ gilt. Die Menge aller dieser Funktionen bezeichnen wir mit $L^1_{loc}(\Omega)$.

. . . .

Lemma 8.2.2 (*Fundamentallemma*). Es sei $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\int\limits_\Omega \varphi(x)f(x)\mathrm{d}\lambda_n(x) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Dann ist $f \equiv 0$ fast überall auf Ω.

Beweis. Zu $x_0 \in \Omega$ existiert $\delta := \delta(x_0) > 0$ mit $K := \overline{U_\delta(x_0)} \subset \Omega$. Mit Lemma 8.1.1 finden wir eine Folge (φ_m) in $\mathcal{D}_K$ mit $0 \leq \varphi_m(x) \leq 1$ für $x \in K$, $m \in \mathbb{N}$ und $\varphi_m \xrightarrow{m\to\infty} \chi_{K^\circ}$ punktweise in K. Mit dem Lebesgueschen Konvergenzsatz folgt

$$\int\limits_K f(x)\mathrm{d}\lambda_n(x) = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(x)f(x)\mathrm{d}\lambda_n(x) = 0.$$

Da das System aller offenen Kugeln $B \subset \Omega$ die σ-Algebra der Borelmengen erzeugt, folgt $f = 0$ fast überall auf Ω. ■

. . . .

Beispiel 8.2.3. Für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ wird durch

$$\phi_f(\varphi) := \int\limits_\Omega \varphi(x)f(x)\mathrm{d}\lambda_n(x), \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{8.4}$$

ein Element aus $\mathcal{D}'(\Omega)$ definiert, denn für $\varphi \in \mathcal{D}_K$ gilt $|\phi_f(\varphi)| \leq \left(\int\limits_\Omega |f(x)|\,\mathrm{d}\lambda_n(x)\right) ||y||_0$.
Somit ist ϕ_f eine Distribution der Ordnung 0.
Nach Lemma 8.2.2 ist die Abbildung $f \mapsto \phi_f$ injektiv. Daher ist es üblich, die Distribution ϕ_f mit der Funktion f zu identifizieren. Man sagt auch kurz: *Jede lokal integrierbare Funktion ist eine Distribution.*
Eine Distribution ϕ heißt **regulär**, wenn es ein $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ gibt mit $\phi = \phi_f$, sonst **singulär**.

. . . .

Satz 8.2.4. Es sei μ ein komplexes oder positives Borelmaß auf Ω mit $\mu(K) < \infty$ für jede kompakte Menge $K \subset \Omega$.
Dann wird durch

$$\phi_\mu(\varphi) := \int\limits_\Omega \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x), \;\; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \tag{8.5}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$ definiert. Insbesondere ist ϕ_μ eine Distribution der Ordnung 0.

Beweis. Es gilt $|\phi_\mu(\varphi)| \leq |\mu|\,(K)\,||\varphi||_0$, wobei $|\mu|$ die totale Variation von μ ist. ■

. . . .

Bemerkung:
Ähnlich wie im vorigen Beispiel zeigt man, dass die Abbildung $\mu \mapsto \phi_\mu$ injektiv ist und identifiziert wieder μ mit ϕ_μ.

Satz 8.2.5. Für jedes $x_0 \in \Omega$ wird durch

$$\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0) \tag{8.6}$$

eine Distribution der Ordnung 0 definiert, die sogenannte **Delta-** oder **Diracdistribution**. Sie ist *keine* reguläre Distribution, aber ein Maß.

Beweis. Wegen $|\delta_{x_0}(\varphi)| \leq ||\varphi||_0$ folgt der erste Teil.
Annahme: δ_{x_0} ist regulär.
Dann existiert ein $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $\delta_{x_0}(\varphi) = \int\limits_\Omega \varphi(x)f(x)\mathrm{d}\lambda_n(x)$ für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Wähle dazu eine Folge (φ_m) in $\mathcal{D}(\Omega)$ mit supp $\varphi_m \subset \overline{U_{\frac{1}{m}}(x_0)}$ und $0 \leq \varphi_m(x) \leq 1$ für $x \in \Omega$ und $\varphi_m(x_0) = 1$.
Dann folgt einerseits aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz

$$\lim_{m\to\infty} \varphi_m(x)f(x)\mathrm{d}\lambda_n(x) = 0,$$

aber andererseits $\delta_{x_0}(\varphi_m) = \varphi_m(x_0) = 1$, ein Widerspruch. Somit ist δ_{x_0} nicht regulär.
Definiere nun abschließend $\mu(A) := \begin{cases} 1 & : \quad x \in A \\ 0 & : \quad x \notin A \end{cases}$. Damit ist μ ein Maß und der Satz ist bewiesen. ■

. . . .

Beispiel 8.2.6.

a) Durch $\phi(\varphi) := \varphi'(0)$ wird eine Distribution der Ordnung 1 auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definiert, denn es gilt $|\phi(\varphi)| \leq ||\varphi||_1$.
Diese Distribution spielt bei der Behandlung des Dipols eine wichtige Rolle.
Allgemeiner wird durch $\phi(\varphi) := \varphi^{(n)}(0)$ eine Distribution der Ordnung n auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definiert.

b) Durch $\phi(\varphi) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, wird eine Distribution der Ordnung ∞ auf $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definiert, denn die Summe ist immer endlich, da supp φ kompakt ist.
Ist $N \in \mathbb{N}$ und $K \subset [-n, n]$, so gilt

$$|\phi(\varphi)| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \left|\varphi^{(n)}(n)\right| \leq N\,||\varphi||_{N-1}\,,$$

also ist ϕ dann eine Distribution der Ordnung $N-1$.

. . . .

8.2.2 Differentiation von Distributionen

Wir wollen jetzt jede Distribution (und damit auch jede lokal integrierbare Funktion) ableiten, um Distributionen der Analysis zugänglich zu machen.
Es sei $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und α ein Multiindex. Wir definieren

$$(D^\alpha \phi)(\varphi) := (-1)^{|\alpha|}\phi(D^\alpha \varphi). \tag{8.7}$$

Dies ist ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$, denn ist $|\phi(\varphi)| \leq C\,||\varphi||_N$, so gilt für $\varphi \in \mathcal{D}_K$:

$$|(D^\alpha \phi)(\varphi)| \leq C\,||D^\alpha \varphi||_N \leq C\,||\varphi||_{N+|\alpha|}\,.$$

Bemerkung:
Ist φ eine Distribution der Ordnung N, so ist D^α eine Distribution der Ordnung $N + |\alpha|$. Mit dem Satz von Schwarz rechnet man dann leicht nach, dass

$$D^\alpha D^\beta \phi = D^\beta D^\alpha \phi = D^{\alpha+\beta}\phi \tag{8.8}$$

gilt.

Beispiel 8.2.7. Ist speziell $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, so existiert die Ableitung im Distributionssinne und zwar mit $D^\alpha f = D^\alpha \phi_f$.
Falls f N-mal stetig differenzierbar (im klassischen Sinne) ist, so folgt mit partieller Integration:

$$(-1)^{|\alpha|}\int\limits_\Omega f(x)(D^\alpha\varphi)(x)\mathrm{d}\lambda_n(x) = \int\limits_\Omega (D^\alpha f)(x)\varphi(x)\mathrm{d}\lambda_n(x) = \phi_{D^\alpha f}(\varphi)$$

für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dies zeigt

$$D^\alpha \phi_f = \phi_{D^\alpha f}. \tag{8.9}$$

. . . .

Beispiel 8.2.8. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}$.

a) Wir betrachten $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := |x|$. Dann gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$(\phi_f)'(\varphi) = -\phi_f(\varphi') \overset{P.I.}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{sgn}(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \phi_{\mathrm{sgn}}(\varphi).$$

Damit haben wir gezeigt:

$$f'(x) = \mathrm{sgn}(x). \tag{8.10}$$

b) Wir betrachten die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $H(x) := \mu(A) := \begin{cases} 1 & : \quad x \geq 0 \\ 0 & : \quad x < 0 \end{cases}$.
Dann gilt für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$(\phi_H)'(\varphi) = -\phi_H(\varphi') = -\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\mathrm{d}x = -\varphi(x)\,|_0^\infty = \varphi(0).$$

Damit haben wir gezeigt:

$$\phi_H' = \delta_0. \tag{8.11}$$

c) Es gilt $\delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0)$.

....

Wir wollen jetzt noch zeigen, dass die Differentiation von Distributionen stetig ist. Dazu bemerken wir, dass $\mathcal{D}'(\Omega)$ der Dualraum von $\mathcal{D}(\Omega)$ ist und wir versehen ihn mit der von $\mathcal{D}(\Omega)$ induzierten schwach*-Topologie. Dadurch wird $\mathcal{D}'(\Omega)$ zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum. Wie bei normierten Räumen kann man auch hier den *dualen Operator* einführen.

Definition 8.2.9. Es seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume und $T \in L(E, F)$. Dann wird der **duale Operator** $T'\colon F' \to E'$ definiert durch

$$T'y' := y' \circ T, \ y' \in F'. \tag{8.12}$$

....

Es folgt, dass T' eine $\sigma(F', F) - \sigma(E', E)$ – stetige Abbildung ist.

Beweis. Es sei $V \subset E'$ eine $\sigma(E, E')$-Nullumgebung. Dann existieren $x_1, \ldots, x_n$ und $r > 0$ mit

$$\big\{x' \in E' \colon \big|\big\langle x_k, x'\big\rangle\big| < r \text{ für } k = 1, \ldots, n\big\} \subset V.$$

Setze nun $y_k := Tx_k$ für $k = 1, \ldots, n$ und $U := \{y' \in F' \colon |\langle y_k, y'\rangle| < r\}$. Dann ist $U \in \mathcal{U}_{F'}(0)$ mit $T'(U) \subset V$, also ist T' stetig in 0 und somit auf dem ganzen Raum. ∎

....

Satz 8.2.10. Für jeden Multiindex α ist $D^\alpha \colon \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ stetig.

Beweis. Nach Definition gilt $D^\alpha = (-1)^{|\alpha|}(D^\alpha)'$, wobei $(D^\alpha)'$ der duale Operator von D^α ist. Nach Folgerung 8.1.6 ist $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{D}(\Omega)$ stetig. Damit folgt die Behauptung aus obigen Überlegungen. ∎

....

8.2.3 Multiplikation von Distributionen mit Funktionen

Man kann Distributionen (auf natürliche Art) addieren und mit Skalaren multiplizieren. Wir untersuchen nun die Multiplikation mit C^∞-Funktionen.

Satz 8.2.11. Es sei $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $f \in \mathcal{E}(\Omega)$. Dann wird durch

$$(f\phi)(\varphi) := \phi(f\varphi) \tag{8.13}$$

eine Distribution auf Ω definiert und für jeden Multiindex α gilt

$$D^\alpha(f\phi) = \sum_{\beta \leq \alpha} c_{\alpha\beta}(D^{\alpha-\beta}f)(D^\beta\phi), \tag{8.14}$$

wobei $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{N}$ gilt.
[Hier ohne Beweis.[36]]

. . . .

[36]Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.

8.2.4 Folgen von Distributionen

Unter der Konvergenz einer Folge (ϕ_j) von Distributionen in Ω gegen $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ verstehen wir die Konvergenz in der schwach*-Topologie, d.h. explizit:

$$\phi_j(\varphi) \xrightarrow{j\to\infty} \phi(\varphi) \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{8.15}$$

Ist speziell (f_j) eine Folge lokal integrierbarer Funktionen in Ω, so konvergiert (f_j) gegen $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ im Distributionssinne, wenn gilt:

$$\lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j(x)\varphi(x)\mathrm{d}\lambda_n(x) = \phi(\varphi) \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{8.16}$$

Satz 8.2.12. Es sei (ϕ_j) eine Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und der Grenzwert

$$\phi(\varphi) := \lim_{j\to\infty} \phi_j(\varphi) \tag{$*$}$$

existiere für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Dann ist ϕ eine Distribution und für jeden Multiindex α gilt

$$D^\alpha(\phi_j) \xrightarrow{j\to\infty} D^\alpha\phi$$

in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Beweis. Es sei $K \subset \Omega$ kompakt. Da ($*$) für jedes $\varphi \in \mathcal{D}_K$ gilt und $\mathcal{D}_K$ ein Fréchetraum ist, ist $\phi\,|_{\mathcal{D}_K}$ stetig nach Satz 2.2.6. Nun folgt die Behauptung aus Satz 8.1.5.
Weiter folgt aus ($*$):

$$(D^\alpha\phi)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\phi(D^\alpha\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\lim_{j\to\infty}\phi_j(D^\alpha\varphi) = \lim_{j\to\infty}(D^\alpha\phi_j)(\varphi) \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

■

....

Satz 8.2.13. Es sei (ϕ_j) eine Folge in $\mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\phi_j \xrightarrow{j\to\infty} \phi$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und (f_j) eine Folge in $\mathcal{E}(\Omega)$ mit $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ in $\mathcal{E}(\Omega)$.
Dann gilt

$$f_j\phi_j \xrightarrow{j\to\infty} f\phi \text{ in } \mathcal{D}'(\Omega).$$

Beweis. Zu zeigen ist:

$$(f_j\phi_j)(\varphi) \xrightarrow{j\to\infty} (f\phi)(\varphi) \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Es sei also $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist auch $f_j\varphi \in \mathcal{D}_K$. Wegen der Linearität von ϕ_j gilt

$$|(f_j\phi_j)(\varphi) - (f\phi)(\varphi)| = |\phi_j(f_j\varphi) - \phi(f\varphi)| \le |\phi_j(f_j\varphi - f\varphi)| + |\phi_j(f\varphi) - \phi(f\varphi)|\,.$$

Nach Voraussetzung existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\phi_j(f\varphi) - \phi(f\varphi)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $j \geq j_0$.
Wir definieren ein bilineares Funktional $\mathcal{B} : \mathcal{E}(\Omega) \times \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathbb{C}$ durch

$$\mathcal{B}(g, \psi) := (g\psi)(\varphi) = \psi(g\varphi).$$

Dann ist $\mathcal{B}$ partiell stetig und nach einer Übungsaufgabe sogar stetig, d.h. $\mathcal{B}(f_j, \phi_j) \xrightarrow{j\to\infty} \mathcal{B}(f, \phi)$. Daraus folgt nun $f_j\phi_j \xrightarrow{j\to\infty} f\phi$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und die Behauptung ist bewiesen. ■

....

8.3 Fouriertransformation von Distributionen

8.3.1 Fouriertransformation von Funktionen

Bezeichung:
Aus ästhetischen Gründen benutzen wir das **normierte Lebesguemaß** m_n auf $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$m_n := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\lambda_n. \tag{8.17}$$

Für $1 \le p \le \infty$ sei $L^p := L^p(m_n)$. Weiter sei für $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y := (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ definiert:

$$x \cdot y := \sum_{j=1}^{n} x_j y_j.$$

Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ sei der *Translationsoperator* definiert durch

$$(\mathcal{T}_x f)(y) := f(y - x), x, y \in \mathbb{R}^n. \tag{8.18}$$

Definition 8.3.1. Es sei $f \in L^1$. Dann ist die **Fouriertransformierte** $\hat{f}$ von f definiert durch

$$\hat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\mathrm{i}xt} f(x) \mathrm{d}m_n(x),\ t \in \mathbb{R}^n. \tag{8.19}$$

Man beachte, dass das Integral existiert. Die Abbildung $\mathcal{F} : f \mapsto \hat{f}$ heißt auch **Fouriertransformation**. Statt $\hat{f}$ schreibt man auch $\mathcal{F}f$.

....

Satz 8.3.2. Es sei $f \in L^1$.
Dann gelten:

a) $(\mathcal{T}_x f)(t) = e^{-\mathrm{i}xt}\hat{f}(t)$.

b) Ist $g(t) = e^{\mathrm{i}xt} f(t)$, so ist $\hat{g} = \mathcal{T}_x \hat{f}$.

c) Ist $\lambda > 0$ und $h(x) = f(\lambda^{-1}(x))$, so ist $\hat{h}(t) = \lambda^n \hat{f}(\lambda t)$.

Beweis. a) und b) rechnet man leicht nach und c) folgt aus der Substitutionsregel. ■

....

Satz 8.3.3. Ist $f \in L^1$, so ist $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R}^n$. Weiter ist $\mathcal{F} : L^1 \to C_0(\mathbb{R}^n)$ eine stetige lineare Abbildung mit $||\mathcal{F}|| \le 1$. Ist (f_j) eine Folge in L^1 mit $||f_j - f||_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$, so gilt $\hat{f}_j \xrightarrow{j\to\infty} \hat{f}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$.

Beweis. Wegen $\left|e^{\mathrm{i}tx}\right| = 1$ folgt sofort $\left|\hat{f}(z)\right| \le ||f||_1 < \infty$ für $t \in \mathbb{R}^n$ und daher ist $\mathcal{F} : L^1 \to \boldsymbol{L^\infty}$ eine stetige lineare Abbildung mit $||\mathcal{F}|| \le 1$. Hieraus folgt sofort die letzte Behauptung.
Es bleibt zu zeigen:

$$\hat{f} \text{ ist stetig und es gilt } \lim_{||t||_2 \to\infty} \hat{f}(t) = 0. \tag{$*$}$$

Für $t, t_0 \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\left|\hat{f}(t) - \hat{f}(t_0)\right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-\mathrm{i}tx} - e^{-\mathrm{i}t_0x}\right| |f(x)| \,\mathrm{d}m_n(x) \xrightarrow{t \to t_0} 0.$$

Nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz ist $\hat{f}$ stetig.
Aus der Maßtheorie ist bekannt, dass $\mathbb{R}^n$ dicht in L^1 liegt. Daher genügt es zu zeigen, dass ($*$) für alle $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt.
Dazu sei $R > 0$ und $||t||_2 \geq R$. Dann existiert eine Koordinate t_j mit $|t_j| \geq \frac{R}{\sqrt{n}}$ und es folgt mit partieller Integration:

$$\left|\hat{f}(t)\right| = \left| - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \cdot \frac{1}{-\mathrm{i}t_j} e^{-\mathrm{i}tx} \mathrm{d}m_n(x) \right| \leq \left|\left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|\right|_1 \frac{\sqrt{n}}{R} \xrightarrow{R \to \infty} 0.$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. ■

Ist $f \in L^2$, so ist $\hat{f}$ im Allgemeinen nicht definiert, da das Integral nicht existieren muss. Wir wollen nun die Fouriertransformation von $L^1 \cap L^2$ auf L^2 (sinnvoll!) fortsetzen.

Definition 8.3.4. Eine Funktion $f \in \mathcal{E} = C^\infty(\mathbb{R}^n)$ heißt **schnell fallend**, wenn für jeden Multiindex α gilt:

$$\lim_{||x||_2 \to \infty} x^\alpha f(x) = 0. \tag{8.20}$$

Äquivalent dazu sind:

- $\lim\limits_{||x|| \to \infty} P(x) f(x) = 0$ für jedes Polynom P oder
- $\lim\limits_{||x|| \to \infty} ||x||_2^m \, f(x) = 0$ für jedes $m \in \mathbb{N}$.

Wir setzen nun

$$\mathcal{S}_n := \mathcal{S} := \left\{ f \in \mathcal{E} \colon D^\beta f \text{ ist schnell fallend für jeden Multiindex } \beta \right\}. \tag{8.21}$$

Offenbar ist $\mathcal{S}$ ein Vektorraum. Eine Funktion $f \in \mathcal{E}$ liegt genau dann in $\mathcal{S}$, wenn

$$||f||_N := \sup_{|\alpha| < N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(1 + ||x||_2^2\right)^N |D^\alpha f| < \infty \tag{8.22}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Mit dieser *Familie von Halbnormen* wird $\mathcal{S}$ zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum gemäß Satz 1.5.5. $\mathcal{S}$ heißt **Schwartzraum** und eine Funktion $f \in \mathcal{S}$ heißt **Schwartzfunktion**. Schließlich ist $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S} \subset L^p$ für $p > 1$.

Ein Beispiel einer Schwartzfunktion, die nicht in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ liegt, ist $f(x) := \exp\left(-||x||_2^2\right)$.

Satz 8.3.5. Für den Raum $\mathcal{S}$ gelten folgende Aussagen:

a) $\mathcal{S}$ ist ein Fréchetraum.

b) Ist $g \in \mathcal{S}$ und α ein Multiindex, so sind die Abbildungen $f \mapsto g \cdot f$, $f \mapsto x^\alpha f$ und $f \mapsto D^\alpha f$ stetige lineare Abbildungen von $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$.

c) Ist $f \in \mathcal{S}$ und α ein Multiindex, so ist $\hat{f} \in \mathcal{E}$ und es gilt $D^\alpha \hat{f} = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}$.

d) Ist $f \in \mathcal{S}$ und α ein Multiindex, so gilt $D^{\hat{\alpha}} f = \mathrm{i}^{|\alpha|} t^\alpha \hat{f}$.

e) $\mathcal{F}$ ist eine stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$.

Beweis.

a) Nach Bemerkung 1.5.6 gibt es eine Metrik, die die Topologie von $\mathcal{S}$ induziert. Nun sei (f_j) eine Cauchyfolge in $\mathcal{S}$. Aus dem Cauchykriterium für gleichmäßige Konvergenz folgt, dass die Folge $(x^\beta D^\alpha f_j)$ für jedes Paar von Multiindizes α, β gegen eine beschränkte Funktion $g_{\alpha\beta}$ konvergiert. Weiter folgt $g_{\alpha\beta} = x^\beta D^\alpha g_\infty$ und somit $f_j \xrightarrow{j\to\infty} g_\infty$ in $\mathcal{S}$. Somit ist $\mathcal{S}$ vollständig.

b) Ist $f \in \mathcal{S}$, so ist offensichtlich $D^\alpha f \in \mathcal{S}$. Die Leibnizformel liefert $gf, x^\alpha f \in \mathcal{S}$. Die Stetigkeit dieser Abbildung folgt leicht aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

c) Es seien $t := (t_1, \ldots, t_n)$ und $t' := (t_1 + h, t_2, \ldots, t_n)$ für $h \neq 0$. Dann folgt

$$\frac{\hat{f}(t) - \hat{f}(t')}{h} = -\mathrm{i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) \frac{e^{-\mathrm{i}hx_1} - 1}{-\mathrm{i}hx_1} e^{-\mathrm{i}tx} \mathrm{d}m_n(x).$$

Da $x_1 f \in L^1$ gilt, folgt aus dem Lebesgueschen Konvergenzsatz durch Grenzübergang $h \to 0$:

$$\frac{\partial}{\partial t_1} \hat{f}(t) = -\mathrm{i} \int\limits_{\mathbb{R}^n} x_1 f(x) e{-}\mathrm{i}tx \mathrm{d}m_n(x) = -\mathrm{i} \cdot \widehat{x_1 f}(t).$$

Wiederholte Anwendung dieses Arguments liefert nun die Behauptung.

d) Ist $f \in \mathcal{S}$, so ist auch $D^\alpha f \in \mathcal{S}$ nach Teil b) und mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned}
\widehat{D^\alpha} f(t) &= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha) f(x) e^{-\mathrm{i}tx} \mathrm{d}m_n(x) \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} e^{-\mathrm{i}tx} \mathrm{d}m_n(x) \\
&= (-1)^{|\alpha|} (-\mathrm{i})^{|\alpha|} t^\alpha \hat{f}(t).
\end{aligned}$$

e) Es sei $f \in \mathcal{S}$. Nach Teil c) ist $\hat{f} \in \mathcal{E}$. Wir zeigen:

$$\lim_{||x||_2 \to \infty} x^\alpha (D^\beta \hat{f})(x) = 0 \text{ für alle Multiindizes } \alpha, \beta.$$

Nach Teil c) und d) gilt $x^\alpha D^\beta \hat{f} = (-\mathrm{i})^{|\beta|} (-\mathrm{i})^{|\alpha|} \widehat{D^\alpha (x^\beta f)}$. Da $D^\alpha (x^\beta f) \in \mathcal{S} \subset L^1$ gilt, folgt $(*)$ aus Satz 8.3.3 und somit ist $\hat{f} \in \mathcal{S}$.
Ist (f_j) eine Folge in $\mathcal{S}$ mit $f_j \xrightarrow{j\to\infty} f$ in $\mathcal{S}$, so gilt $||f_j - f||_1 \xrightarrow{j\to\infty} 0$. Aus Satz 8.3.3 folgt $\hat{f}_j(t) \xrightarrow{j\to\infty} \hat{f}(t)$ für $t \in \mathbb{R}^n$. Somit folgt die Stetigkeit von $\mathcal{F}$ aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

■

....

Lemma 8.3.6. Es sei φ_n definiert durch $\varphi_n(x) := e^{-\frac{1}{2}||x||_2^2}$. Dann ist $\varphi_n \in \mathcal{S}$ und es gilt $\hat{\varphi}_n = \varphi_n$.

Beweis. Es ist klar, dass $\varphi_n \in \mathcal{S}$ gilt.
Da φ_1 die Differentialgleichung $y' + xy = 0$ erfüllt, folgt aus Satz 8.3.5 c) und d), dass $\hat{\varphi}_1$ auch diese Differentialgleichung erfüllt. Wegen $\varphi_1(0) = 1$ und $\hat{\varphi}_1(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi_1(x) \mathrm{d}m_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \mathrm{d}x = 1$ ist $\hat{\varphi}_1 = \varphi_1$.
Daraus erhält man mittels der Differentialgleichung der Exponentialfunktion $\hat{\varphi}_n = \varphi_n$. ■

....

Interpretation:
φ_n sind die Eigenfunktionen zum Eigenwert 1 der Fouriertransformation auf den entsprechenden Räumen.

Satz 8.3.7 (*Umkehrsatz*).

a) Ist $g \in \mathcal{S}$, so gilt

$$g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(t) e^{\mathrm{i}tx} \mathrm{d}m_n(t), \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{8.23}$$

b) Die Fouriertransformation ist eine stetige, lineare und bijektive Abbildung von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$ der Periode 4 und die Inverse ist ebenfalls stetig.

c) Es sind $f, \hat{f} \in L^1$ und $f_0(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(t) e^{\mathrm{i}xt} \mathrm{d}m_n(x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$, so ist $f = f_0$ fast überall auf $\mathbb{R}^n$.

[Hier ohne Beweis.[37]]

....

Satz 8.3.8 (*Plancherel*). Es gibt eine eindeutig bestimmte Isometrie Ψ von L^2 auf L^2 mit $\Psi f = \hat{f}$ für alle $f \in \mathcal{S}$.
[Hier ohne Beweis.[38]]

....

Bemerkung:
Da $\mathcal{S}$ sowohl in L^1 als auch in L^2 dicht liegt, ist Ψ eine Fortsetzung von $\mathcal{F}$ von $\mathcal{S}$ auf $L^1 \cap L^2$. Ist $f \in L^1$, so stimmt Ψf mit $\hat{f}$ aus Definition 8.3.1 überein. Daher ist Ψ die gesuchte Fortsetzung der Fouriertransformation von $L^1 \cap L^2$ auf L^2.
Für $f \in L^2$ schreiben wir im Folgenden auch $\hat{f}$. Ψ nennt man manchmal auch die *Fourier-Plancherel-Transformation*.
Es gilt die Parsevalsche Formel, d.h. $\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle_{L^2} = \langle f, g \rangle_{L^2}$, mit dem normierten Maß.

[37] Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.
[38] Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.

8.3.2 Fouriertransformation temperierter Distributionen

Wir wollen nun die Fouriertransformation auf eine noch größere Klasse von Funktionen fortsetzen, denn in der Physik benötigt man zum Beispiel $\hat{1}$.

Definition 8.3.9. Eine **temperierte Distribution** ist ein Funktional in $u \in \mathcal{S}'$.

. . . .

Bevor wir temperierte Distributionen untersuchen, stellen wir einen Zusammenhang zwischen $\mathcal{D}'$ und $\mathcal{S}'$ her.

Satz 8.3.10.

a) $\mathcal{D}$ ist dicht in $\mathcal{S}$.

b) Die identische Abbildung $id : \mathcal{D} \to \mathcal{S}$ ist stetig.

c) Die Abbildung $j' : \mathcal{S}' \to \mathcal{D}'$, $j'(u) := u\,|_{\mathcal{D}}$ ist injektiv.

[Hier ohne Beweis.[39]]

. . . .

Bemerkung:
Die temperierten Distributionen sind genau diejenigen $u \in \mathcal{D}'$, die eine *stetige* Fortsetzung auf $\mathcal{S}$ haben.

Die Folgerungen zeigen, woher der Name „temperiert“ herkommt: Es hat mit einer Art Wachstumsbeschränkung zu tun.

Definition 8.3.11. Es sei $\phi \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $\omega \subset \Omega$ offen. Wir sagen, ϕ **verschwindet auf $\boldsymbol{\omega}$**, wenn $\phi(\varphi) = 0$ für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\omega)$ ist.
Es sei W die Vereinigung aller offenen Mengen $\omega \subset \Omega$, auf denen Φ verschwindet. Dann heißt

$$S_\Phi := \Omega \setminus W \tag{8.24}$$

der **Träger** von ϕ.
Ist S_ϕ kompakt, so heißt ϕ eine **Distribution mit kompaktem Träger**.

. . . .

Beispiel: δ_{x_0} hat Träger $\{x_0\}$.

Beispiel 8.3.12.

a) Es sei u eine Distribution mit kompaktem Träger. Dann ist u temperiert.

Beweis. Es sei $K = S_u$ und $\psi \in \mathcal{D}$ mit $\psi = 1$ in einer offenen Menge $U \supset K$. Wir definieren für $f \in \mathcal{S}$ das Funktional $\tilde{u}(f) := u(\psi f)$.
Ist (f_j) eine Folge in $\mathcal{S}$ mit $f_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$, so gilt $D^\alpha f_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$, also gilt auch $D^\alpha(\psi f_j) \xrightarrow{j\to\infty} 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}^n$. Dies heißt nun letztlich $\psi f_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$ in $\mathcal{D}$ und somit ist $\tilde{u}$ stetig auf $\mathcal{S}$.
Wegen $\tilde{u}(\varphi) = u(\varphi)$ für $\varphi \in \mathcal{D}$ ist $\tilde{u}$ eine stetige Fortsetzung von u auf $\mathcal{S}$. Somit folgt die Behauptung. ■

Insbesondere ist die Deltadistribution temperiert.

[39] Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.

b) Es sei μ ein positives Maß auf $\mathbb{R}^n$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+||x||_2^2\right)^{-k} \mathrm{d}\mu(x) < \infty$$

für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann ist μ eine temperierte Distribution, genauer wird durch

$$\phi(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f \mathrm{d}\mu, \; f \in \mathcal{S}, \tag{8.25}$$

ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}$ definiert.

Beweis. Es sei wieder (f_j) eine Folge in $\mathcal{S}$ mit $f_j \xrightarrow{j\to\infty} 0$. Dann gilt

$$\varepsilon_j := \underbrace{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left(1+||x||_2^2\right)^k f_j(x)}_{\text{Halbnormen auf } \mathcal{S}} \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

auf $\mathbb{R}^n$. Wegen

$$|\phi(f_j)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f_j| \,\mathrm{d}\mu \leq \varepsilon_j \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \left(1+||x||_2^2\right)^{-k} \mathrm{d}\mu(x)}_{<\infty} \xrightarrow{j\to\infty} 0$$

folgt $\phi(f_j) \xrightarrow{j\to\infty} 0$. Somit ist ϕ stetig auf $\mathcal{S}$. ■

c) Es sei $1 \leq p < \infty$, $N \in \mathbb{N}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ eine messbare Funktion mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \left(1+||x||_2^2\right)^{-N} g(x) \right|^p \mathrm{d}m_n(x) =: C < \infty.$$

Dann ist g eine temperierte Distribution.

Beweis. Definiere $\phi(f) := \int_{\mathbb{R}^n} fg\mathrm{d}m_n(x)$ und wende die Hölderungleichung an. ■

d) Aus Teil c) folgt, dass insbesondere jede L^p-Funktion, $1 \leq p < \infty$, eine temperierte Distribution definiert.
Ebenso definiert jedes Polynom eine temperierte Distribution, allgemeiner sogar jede messbare Funktion mit höchstens polynomialem Wachstum.[40]

. . . .

Satz 8.3.13. Es sei u eine temperierte Distribution, α ein Multiindex und $g \in \mathcal{S}$. Dann sind auch $D^\alpha u$, $x^\alpha u$ und $g \cdot u$ temperiert.

Beweis. Folgt aus den Definitionen der obigen Ausdrücke und Satz 8.3.5 b). ■

. . . .

[40] Hier ist auch $p = \infty$ inkludiert.

Definition 8.3.14. Für $u \in \mathcal{S}'$ ist die **Fouriertransformierte** $\hat{u}$ definiert durch

$$\hat{u}(\varphi) := u(\hat{\varphi}), \;\; \varphi \in \mathcal{S}. \tag{8.26}$$

Da $\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig nach Satz 8.3.7 ist, ist $\hat{u} = u \circ \mathcal{F}$ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{S}$. Es ist $\hat{u}$ gerade der duale Operator $\mathcal{F}'$ angewandt auf u.
Da für einen stetigen bijektiven Operator auch der duale Operator stetig ist, ist wegen Satz 8.3.7 auch die Fouriertransformation bijektiv von $\mathcal{S}'$ auf $\mathcal{S}'$.

. . . .

Bemerkung:
Für $f \in L^1$ bzw. $f \in L^2$ haben wir jetzt jeweils zwei Definitionen der Fouriertransformation, aber man überlegt sich leicht, dass diese übereinstimmen.

Wegen $L^p \subset \mathcal{S}'$ ist die Fouriertransformation für jede L^p-Funktion definiert. Für $p \leq 2$ ist dies sogar eine reguläre Distribution, aber für $p > 2$ im Allgemeinen nicht mehr.

Jetzt zeigen wir noch, dass die Eigenschaften der Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$ erhalten bleiben, wenn man sie auf $\mathcal{S}'$ fortsetzt. Dabei sei $\mathcal{S}'$ wieder mit der schwach*-Topologie versehen.

Satz 8.3.15.

a) Die Fouriertransformation ist eine stetige lineare bijektive Abbildung von $\mathcal{S}'$ auf $\mathcal{S}'$ der Periode 4, deren Inverse ebenfalls stetig ist.

b) Ist $u \in \mathcal{S}'$ und α ein Multiindex, so ist $D^\alpha \hat{u} = (-1)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha u}$ und $\widehat{D^\alpha u} = \mathrm{i}^{|\alpha|} x^\alpha \hat{u}$.

c) Ist $u \in \mathcal{S}'$, so ist $\hat{\hat{u}} = \check{u}$, wobei $\check{u}(\varphi) := u(\check{\varphi})$ und $\check{\varphi}(x) := \varphi(-x)$ für $x \in \mathbb{R}^n$ ist.

[Hier ohne Beweis.[41]]

. . . .

Beispiel 8.3.16. Wir wissen, dass jedes Polynom eine temperierte Distribution ist und wollen nun deren Fouriertransformierte berechnen.
Wir beginnen mit $P = 1$. Für $\varphi \in \mathcal{S}$ ist $1(\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi \mathrm{d}m_n$. Aus dem Umkehrsatz folgt dann

$$\hat{1}(\varphi) = 1(\hat{\varphi}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi} \mathrm{d}m_n = \varphi(0) = \delta_0 \varphi.$$

Mit Satz 8.3.15 c) folgt dann

$$\hat{\delta}_0 = \hat{\hat{1}} = \check{1} = 1. \tag{8.27}$$

Es gilt $\check{\delta}_0 = \hat{\hat{\delta}}_0 = \hat{1} = \delta_0$.
Ist $P = x^\alpha$, so folgt aus obigen Ergebnissen und Satz 8.3.15 b) mit $u = 1$ bzw. $u = \delta_0$:

$$\widehat{x^\alpha} = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \delta_0 \text{ und } \widehat{D^\alpha \delta_0} = \mathrm{i}^{|\alpha|} x^\alpha. \tag{8.28}$$

Für beliebige Polynome benutzt man nun die Linearität der Fouriertransformation.

. . . .

[41] Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.

Literaturverzeichnis

[Alt, 2012] Alt, H. W. (2012). Lineare Funktionalanalysis. Springer, Heidelberg.

[Elstrodt, 2011] Elstrodt, J. (2011). Maß- und Integrationstheorie. Springer, Heidelberg.

[Kaballo, 2000] Kaballo, W. (2000). Einführung in die Analysis I. Spektrum, Heidelberg.

[Kaballo, 2011] Kaballo, W. (2011). Grundkurs Funktionalanalysis. Spektrum, Heidelberg.

[Kaballo, 2014] Kaballo, W. (2014). Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie. Spektrum, Heidelberg.

[Meise and Vogt, 2011] Meise, R. and Vogt, D. (2011). Einführung in die Funktionalanalysis. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

[Rudin, 1991] Rudin, W. (1991). Functional Analysis. McGraw-Hill, New York.

[von Querenburg, 2001] von Querenburg, B. (2001). Mengentheoretische Topologie. Springer, Heidelberg.

[Werner, 2011] Werner, D. (2011). Funktionalanalysis. Springer, Heidelberg.