Skript zur Vorlesung

Funktionalanalysis I

B.Sc. Matthias Schulte

Version vom 21. Februar 2019

Inhaltsverzeichnis

Einleitung, Motivation und Disclaimer . . . 3

1 Topologische Vektorräume 4
1.1 Topologische und metrische Räume . . . 4
1.1.1 Topologische Grundbegriffe . . . 4
1.1.2 Stetige Abbildungen . . . 8
1.1.3 Produkttopologien . . . 10
1.1.4 Kompakte topologische Räume . . . 12
1.2 Topologische Vektorräume . . . 14
1.2.1 Grundlegende Definitionen . . . 14
1.2.2 Nullumgebungsbasen . . . 17
1.2.3 Lineare Abbildungen . . . 20
1.3 Endlichdimensionale Räume . . . 22
1.4 Beschränkte Mengen und lineare Abbildungen . . . 25
1.5 Halbnormen und lokale Konvexität . . . 28
1.6 Quotientenräume . . . 35
1.7 Beispiele topologischer Vektorräume . . . 38
1.7.1 Normierte Räume . . . 38
1.7.2 Lokalkonvexe topologische Vektorräume . . . 41

2 Die grundlegenden Prinzipien der Funktionalanalysis und Anwendungen 44
2.1 Das Bairesche Kategorieprinzip . . . 44
2.1.1 Der Satz von Baire . . . 44
2.1.2 Unstetigkeitsstellen reeller Funktionen . . . 46
2.1.3 Folgen stetiger Funktionen . . . 47
2.1.4 Stetige, nirgends differenzierbare Funktionen . . . 49
2.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit . . . 50
2.2.1 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit . . . 50
2.2.2 Folgen stetiger linearer Abbildungen . . . 52
2.2.3 Konvergenz von Quadraturverfahren . . . 53
2.2.4 Divergenz von Fourierreihen stetiger Funktionen . . . 54
2.3 Der Satz von der offenen Abbildung . . . 56
2.4 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen . . . 59
2.5 Die Sätze von Hahn-Banach . . . 61
2.5.1 Stetige lineare Funktionale auf lokalkonvexen Räumen . . . 61
2.5.2 Trennung konvexer Mengen . . . 66

3 Banachräume und lineare Operatoren 68
3.1 Der Dualraum eines normierten Raumes . . . 68
3.2 Der duale Operator . . . 72

Literatur 75

Einleitung, Motivation und Disclaimer

Das vorliegende Skript ist eine digitale Abschrift der Vorlesung **Funktionalanalysis I**, wie sie im Wintersemester 2018/19 an der Technischen Universität Dortmund von Prof. Dr. Rainer Brück gehalten wurde.

Für etwaige Tippfehler in diesem Skript übernehme ich keine Haftung.

Viel Erfolg (und ein wenig Spaß) mit diesem Skript.

Matthias Schulte, 2019.

1 Topologische Vektorräume

1.1 Topologische und metrische Räume

1.1.1 Topologische Grundbegriffe

Definition 1.1.1.
Es sei $X \neq \varnothing$ eine Menge.

- Ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ heißt **Topologie auf X**, wenn folgende Axiome erfüllt sind:
  - (O1) $\varnothing \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.
  - (O2) Sind $n \in \mathbb{N}$, $U_1, ..., U_n \in \mathcal{T}$, so sei auch $\bigcap\limits_{j=1}^{n} U_j \in \mathcal{T}$.
  - (O3) Sind A eine Indexmenge und $U_\alpha \in \mathcal{T}$ für $\alpha \in A$, so sei auch $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_j \in \mathcal{T}$.
- Das Paar $(X, \mathcal{T})$ heißt **topologischer Raum**.
- Jede Menge $U \in \mathcal{T}$ heißt **offene Menge**.
- Ein System offener Mengen $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ heißt **Basis der Topologie $\mathcal{T}$**, wenn es zu jeder offenen Menge U und jedem $x \in U$ ein $V \in \mathcal{B}$ gibt mit $x \in V \subset U$.
  Es ist also $\mathcal{B}$ eine Basis von $\mathcal{T}$, wenn jede offene Menge $U \in \mathcal{T}$ als Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{B}$ geschrieben werden kann.
- Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das **zweite Abzählbarkeitsaxiom**, wenn $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis hat.
- Sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ Topologien auf X mit $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, so heißt $\mathcal{T}_1$ **schwächer/gröber** als $\mathcal{T}_2$ bzw. $\mathcal{T}_2$ heißt **stärker/feiner** als $\mathcal{T}_1$. Man schreibt dann auch $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$.
- Eine Menge $A \subset X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $A^C := X \backslash A$ offen ist.
- Ist $Y \subset X$ und $\mathcal{S} = \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$, so ist $\mathcal{S}$ eine Topologie auf Y und heißt **Teilraumtopologie/die von $\mathcal{T}$ auf Y induzierte Topologie/die Spurtopologie auf Y**.
  Beachte: Dieses $\mathcal{S}$ hat nichts mit der Subbasis zu tun!

....

Folgerung 1.1.2.
Sei X ein topologischer Raum. Dann gelten:

(A1) $\varnothing$ und X sind abgeschlossen.

(A2) Sind $n \in \mathbb{N}$ und $A1, ..., A_n$ abgeschlossen, so ist auch $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_n$ abgeschlossen.

(A3) Sind A eine Indexmenge und A_α abgeschlossen für $\alpha \in A$, so ist auch $\bigcap\limits_{\alpha \in A} A_\alpha$ auch wieder abgeschlossen.

Definition 1.1.3.
Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$ und $U \subset X$ mit $x \in U$.

- Eine Menge $U \subset X$ heißt **Umgebung von x**, wenn es eine offene Menge $V \subset X$ gibt mit $x \in V \subset U$. Die Menge aller Umgebungen von X bezeichnen wir mit $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(x)$.
- Ein Mengensystem $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ heißt **Umgebungsbasis von x/lokale Basis von x**, wenn es zu jedem $V \in \mathcal{U}(x)$ ein $U \in \mathcal{B}(x)$ gibt mit $U \subset V$.
- Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ erfüllt das **erste Abzählbarkeitsaxiom**, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine (höchstens) abzählbare Umgebungsbasis hat.

Beispiel 1.1.4.

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum, d.h. X ist eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Metrik. Für $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$ heißt

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \varepsilon\} \tag{1.1}$$

ε-Umgebung von x_0.
Eine Menge $U \subset X$ heißt offen, wenn es zu jedem $x_0 \in U$ ein $\varepsilon > 0$ gibt mit $U_\varepsilon(x_0) \subset U$. Dann ist

$$\mathcal{T}_d = \{U \subset X : U \text{ ist offen.}\} \tag{1.2}$$

Sie heißt die **von d induzierte Topologie**.
Für $x \in X$ ist

$$\mathcal{B}(x) := \{U_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0\} \text{ bzw. } \mathcal{B}'(x) := \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N}\} \tag{1.3}$$

eine Umgebungsbasis von x. Man kann hier statt $\left(\frac{1}{n}\right)$ jede Nullfolge (r_n) positiver Zahlen nehmen. Insbesondere besitzt jeder Punkt $x \in X$ eine *abzählbare* Umgebungsbasis.
Weiter ist

$$\mathcal{B} = \{U_\varepsilon(x) : \varepsilon > 0 \text{ und } x \in X\} \text{ bzw. } \mathcal{B}' = \{U_{\frac{1}{n}}(x) : n \in \mathbb{N} \text{ und } x \in X\} \tag{1.4}$$

eine Basis der Topologie $\mathcal{T}_d$ wie in (1.2). Somit erfüllt X das erste Abzählbarkeitsaxiom.
Für zwei Mengen $A, B \subset X$ setzen wir noch

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} \in [0, \infty). \tag{1.5}$$

Besteht B nur aus einem Punkt $x \in X$, so schreiben wir statt $\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(A, \{x\})$ auch einfach $\operatorname{dist}(A, x)$.

b) Sei X ein normierter Raum über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, d.h. X ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und es existiert eine Norm $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$. Dann wird durch $d(x, y) = ||x - y||$ eine Metrik auf X definiert und damit eine Topologie. Insbesondere sind die Räume $\mathbb{K}^d$ mit den kanonischen

euklidischen Metriken topologische Räume.
Da die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegen, bildet das Mengensystem

$$\mathcal{B} = \{U_{\frac{1}{n}}(x) : k \in \mathbb{N},\ x \in \mathbb{Q}^n\} \text{ bzw. } \mathcal{B}' := \{U_{\frac{1}{n}}(z) : n \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{Q}[\mathrm{i}]^n\} \tag{1.6}$$

eine Basis der Topologie von $\mathbb{K}^d$.

c) Sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X, in der jede Menge $E \subset X$ offen und abgeschlossen ist. $\mathcal{T}$ heißt **diskrete Topologie** und wird mit $\mathcal{T}_{dis}$ bezeichnet.
Definieren wir $d : X \times X \to \mathbb{R}$ durch

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & : \quad x = y \\ 1 & : \quad x \neq y \end{cases}, \tag{1.7}$$

so ist d eine Metrik, die die Topologie $\mathcal{T}_{dis} = \mathcal{T}_d$ induziert. d heißt **diskrete Metrik**.

d) Sei X eine Menge und $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$. Dann ist $\mathcal{T}$ eine Topologie auf X und die einzigen offenen Mengen sind $\varnothing$ und X. $\mathcal{T}$ heißt **indiskrete Topologie** und wird mit $\mathcal{T}_{ind}$ bezeichnet. Eine Basis ist gegeben durch $\mathcal{B} = \{X\}$.

g) Sei X eine unendliche Menge und

$$\mathcal{T}_{cof} := \{U \subset X : U = \varnothing \text{ oder } X \backslash U \text{ unendlich}\}. \tag{1.8}$$

Dies ist eine Topologie auf X und heißt **kofinite Topologie** auf X.

....

Definition 1.1.5.
Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorff-Raum** und $\mathcal{T}$ eine **Hausdorfftopologie/separiert**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen U von x und V von y gibt mit $U \cap V = \varnothing$.

....

Beispiel:
Jeder metrische Raum ist ein Hausdorffraum. Die indiskrete Topologie *nicht* hausdorffsch, sofern X mindestens zwei Punkte enthält.

Definition 1.1.6.
Sei X ein topologischer Raum und $E \subset X$.

- Ein Punkt $x \in E$ heißt **innerer Punkt von *E***, wenn es eine Umgebung U von x gibt mit $x \in U \subset E$. Die Menge aller inneren Punkte von E heißt das **Innere von *E*** oder der **innere Kern von *E***. Bezeichnung: E°.
- Weiter heißt $\overline{E} := X \backslash (X \backslash E)^\circ = \{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x) \colon U \cap E \neq \varnothing\}$ der **Abschluss/abgeschlossene Hülle** von E.
- Die Menge E heißt **dicht** in X, wenn $\overline{E} = X$ gilt.
- Die Menge $\partial E := \overline{E} \cap \overline{(X \setminus E)} = \big\{x \in X \mid \forall U \in \mathcal{U}(x) \colon U \cap E \neq \varnothing \wedge U \cap E^C \neq \varnothing\big\}$ heißt **Rand** von E.

Definition 1.1.7.
Sei X ein topologischer Raum und (x_n) eine Folge in X. (x_n) heißt **konvergent gegen $\boldsymbol{x \in X}$**, wenn es zu jeder Umgebung U einen Index $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in U \ \forall n \geq n_0$.
Der Punkt x heißt **Grenzwert** oder **Limespunkt** von (x_n). Wir schreiben hierfür

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ oder } x_n \to x \ (n \to \infty).$$

Definition 1.1.8.
Es sei X ein metrischer Raum und (x_n) eine Folge in X. (x_n) heißt **Cauchyfolge**, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} \colon d(x_n, x_m) < \varepsilon \ \forall m, n \geq N. \tag{1.9}$$

Man zeigt leicht, dass jede konvergente Folge auch eine Cauchyfolge ist.
X heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge konvergiert.

1.1.2 Stetige Abbildungen

Definition 1.1.9.
Es seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine Abbildung und $x_0 \in X$.

- f heißt **stetig**, wenn zu jeder Umgebung $V \in \mathcal{U}(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$, eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ gibt mit $f(U) \subset V$.
- f heißt **stetig auf X**, wenn f in jedem $x_0 \in X$ stetig ist.
- f heißt **Homöomorphismus**, wenn f bijektiv und f, f^{-1} stetig sind. Dann heißen X und Y **homöomorph**, in Zeichen: $X \overset{\sim}{=} Y$.

Satz 1.1.10.
Es seien X, Y, Z topologische Räume, $x_0 \in X$ und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Abbildungen. Dann gelten:

a) Ist f stetig in x_0 und g stetig in $y_0 = f(x_0)$, so ist $(g \circ f)$ stetig in x_0.

b) Sind f und g stetig, so auch $g \circ f : X \to Z$.

Beweis.

a) Sei W eine Umgebung von $z_0 = g(y_0) \in Z$. Da g stetig in y_0 ist, existiert eine Umgebung V von $y_0 \in Y$ mit $g(V) \subset W$. Da f stetig in x_0 ist, existiert eine Umgebung von U von $x_0 \in X$ mit $f(U) \subset V$. Somit folgt

$$(g \circ f)(U) = g(f(U)) \subset g(V) \subset W,$$

also ist $g \circ f$ stetig in x_0.

b) Folgt sofort aus a).

■

Satz 1.1.11.
Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann sind äquivalent:

1) f ist stetig.

2) Jür jede offene Menge V in Y ist $f^{-1}(V) = U$ offen in X.

3) Für jede abgeschlossene Menge $G \subset Y$ ist die Urbildmenge $f^{-1} = f^{-1}(G)$ abgeschlossen in X.

Beweis.
2) $\Leftrightarrow$ 3):
Sei $B \subset Y$ abgeschlossen und $A := f^{-1}(B)$. Da B abgeschlossen ist, ist $Y \setminus B$ offen, also $f^{-1}(Y \setminus B)$ offen in X. Daher ist $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$ offen und somit $f^{-1}(B)$ abgeschlossen.

1) $\Rightarrow$ 2):
Sei $V \subset Y$ offen und setze $U := f^{-1}(V)$. Sei nun $x_0 \in U$. Dann ist $y_0 := f(x_0) \in V$. Da V offen ist und $y_0 \in V$ gilt, ist $V \in \mathcal{U}(\dagger_\prime)$. Wegen der Stetigkeit von f existiert $W \in \mathcal{U}(\S_\prime)$ mit $f(W) \subset V$, also ist $W \subset f^{-1}(V)$. Somit ist $f^{-1}(V)$ offen.
2) $\Rightarrow$ 1):
Sei $x_0 \in X$ und $V \subset Y$ mit $V \in \mathcal{U}(f(x_0))$ und $y_0 := f(x_0)$. Nach Voraussetzung ist $U := f^{-1}(V)$ offen, also ist $f(U) \subset V$. Somit ist f stetig in x_0 und da x_0 beliebig war folgt die Stetigkeit auf X. ■

. . . .

Definition 1.1.12. Es seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. f heißt **offen**, wenn gilt:

$$\forall U \subset X \text{ offen}\colon f(U) \text{ ist offen in } Y. \tag{1.10}$$

. . . .

Bemerkung 1.1.13.

a) Es seien X, Y metrische Räume mit Metriken d_X, d_Y. Dann stimmt Definition 1.1.9 mit der $\varepsilon - \delta$-Stetigkeit überein.

b) Es seien $(X, \mathcal{T}_1)$, $(Y, \mathcal{T}_2)$ topologische Räume. Wenn $\mathcal{T}_1$ die diskrete Topologie ist, so ist jedes $f : X \to Y$ stetig. Ist $\mathcal{T}_2$ die diskrete Topologie, so ist jedes $f : X \to Y$ offen.

c) Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ zwei Toplogien auf X. Dann ist die Identität $id : (X, \mathcal{T}_1) \to (X, \mathcal{T}_2)$ stetig genau dann, wenn $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$ gilt.

d) Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subset X$ und $\mathcal{S} := \{U \cap Y : U \in \mathcal{T}\}$. Ist $\iota : Y \to X$ die Inklusionsabbildung, so ist $\mathcal{S}$ die schwächste Topologie auf Y, für die ι stetig ist.

e) Sei X ein topologischer Raum und Y ein Hausdorffraum. Ferner seien $f, g : X \to Y$ stetig und $M \subset X$ dicht derart, dass $f(m) = g(m)$ für alle $m \in M$ gilt. Dann folgt $f \equiv g$.

. . . .

Definition 1.1.14. Es sei X ein topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{C}$. Dann heißt

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}} \tag{1.11}$$

der **Träger** von f.

. . . .

1.1.3 Produkttopologien

Definition 1.1.15. Es sei A eine Indexmenge und $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ seien topologische Räume für $\alpha \in A$. Für alle $\alpha \in A$ sei $X_\alpha \neq \emptyset$ und

$$\prod := \prod_{\alpha \in A} X_\alpha := \left\{ f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha \middle| f(x) \in X_\alpha \forall x \in A \right\}. \tag{1.12}$$

Nach dem *Auswahlaxiom* ist $\Pi \neq \emptyset$ und für alle $\alpha \in A$ definieren wir

$$X_\alpha = X \Rightarrow \prod_{\alpha \in A} X_\alpha := X^A.$$

Für $\beta \in A$ sei die **kanonische Projektion**

$$\Pi_\beta : \prod \to X_\beta,\ \Pi_\beta\left((X_\alpha)_{\alpha \in A}\right) := \pi_\beta \tag{1.13}$$

definiert. Die **Produkttopologie** $\mathcal{T}$ wird auf $\prod$ definiert durch die Basis

$$\mathcal{B} := \left\{ \bigcap_{\beta \in B} \Pi_\beta^{-1}(U_\beta) \middle| U_\beta \in \mathcal{T}_\beta,\ B \subset A \text{ endlich} \right\}. \tag{1.14}$$

$(\prod, \mathcal{T})$ heißt **Produktraum** der topologischen Räume $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$.
Die Produkttopologie ist die schwächste Topologie auf Π, sodass alle Π_α stetig sind. Ferner ist natürlich jede Projektion Π_α offen.

....

Bemerkung:

a) Ist $A := \{1, \ldots, n\}$, so heißt die Produkttopologie auch **Boxtopologie** und eine Basis ist

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{k=1}^{n} U_k \colon U_k \in \mathcal{T}_k\ \forall k \in A \right\}. \tag{1.15}$$

b) Sind (X_j, d_j) metrische Räume, $j = 1, \ldots, N$, so wird $\Pi := \prod_{j=1}^{N} X_j$ zu einem metrischen Raum vermöge der Produktmetrik

$$d(x,y) := \max_{j=1,\ldots,N} \{d_j(x_j, y_j)\},\ x, y \in \Pi. \tag{1.16}$$

Diese Metrik erzeugt gerade die Produkttopologie.
Eine Folge in Π ist konvergent, wenn jede Komponentenfolge konvergent ist. Es gibt weitere Metriken, die die Produkttopologie erzeugen, zum Beispiel

$$d(x,y) := \sum_{j=1}^{N} d_j(x_j, y_j) \text{ oder } d(x,y) := \left(\sum_{j=1}^{N} d_j(x_j, y_j)^2 \right)^{1/2}.$$

c) Sind (X_j, d_j), $j \in \mathbb{N}$, abzählbar viele metrische Räume, so wird

$$\Pi := \prod_{j=1}^{\infty} X_j$$

zu einem metrischen Raum mit

$$d(x,y) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min\{1, d_j(x_j, y_j)\}.$$

Diese Metrik erzeugt die Produkttopologie. Eine Folge in Π ist konvergent genau dann. wenn jede Komponentenfolge konvergiert. (vgl. Übungsblatt 2, Aufgabe 1)

Bemerkung:
Ist (X, d) ein metrischer Raum, so gilt für $x, y, \xi, \eta \in X$:

$$|d(x,y) - d(\xi,\eta)| \leq d(x,\xi) + d(y,\eta). \text{ } (\textbf{Vierecksungleichung}) \tag{1.17}$$

Hieraus folgt, dass $d : X \times X \to \mathbb{R}$ stetig ist, wobei $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen ist.

1.1.4 Kompakte topologische Räume

Definition 1.1.16. Es sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.

a) Eine Teilmenge $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ heißt **offene Überdeckung** von X, wenn $\bigcup\{U : U \in \mathcal{T}'\} = X$ gilt. X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

b) Eine Teilmenge $K \subset X$ heißt **kompakt**, wenn K mit der Teilraumtopologie kompakt ist.

c) $M \subset X$ heißt **relativ kompakt**, wenn $\overline{M}$ kompakt ist.

d) X heißt **lokalkompakt**, wenn jedes $x \in X$ eine kompakte Umgebung besitzt. X heißt **σ-kompakt**, wenn X als abzählbare Vereinigung von kompakten Mengen geschrieben werden kann.

e) X heißt **folgenkompakt**, wenn jede Folge $(x_n) \subset X$ eine konvergente Teilfolge besitzt.

....

Bemerkung:
Ein topologischer Raum X hat die *endliche Durchschnittseigenschaft*, falls folgendes gilt:
Zu jeder Familie A_α $(\alpha \in A)$ abgeschlossener Mengen mit $\cap_{\alpha \in A} A_\alpha = \emptyset$ existiert eine endliche Teilmenge $B \subset A$ mit $\cap_{\beta \in B} A_\beta = \emptyset$.
Es gilt:
X ist kompakt. $\Leftrightarrow$ X hat die endliche Durchschnittseigenschaft[1].

Beweis. Folgt sofort aus den de Morganschen Regeln. ■

Satz 1.1.17. Es sei X ein Hausdorffraum und $Y \subset X$ kompakt. Dann ist Y abgeschlossen.

Beweis. Ist $Y = X$, so ist dies klar.
Sei daher $Y \neq X$ und $x \in X \setminus Y$. Wegen der Hausdorffeigenschaft von X existieren zu jedem $y \in Y$ offene Umgebungen $U_y \in \mathcal{U}(x)$ und $V_y \in \mathcal{U}(y)$ mit $U_y \cap V_y = \emptyset$.
$\Rightarrow$ $\{V_y : y \in Y\}$ ist eine offene Überdeckung von Y.
Da Y kompakt ist, existieren endlich viele $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$, die Y überdecken. Damit ist $U := U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n}$ eine Umgebung von x mit $U \subset X \setminus Y$. Somit ist $X \setminus Y$ offen, also Y abgeschlossen. ■

....

Satz 1.1.18. Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $Y \subset X$ abgeschlossen. Dann ist Y kompakt.

Beweis. Es sei $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von Y. Dann ist $\{U_\alpha : \alpha \in A\} \cup (X \setminus Y)$ eine offene Überdeckung von X, die eine endliche Teilüberdeckung enthält. Daher enthält $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ eine endliche Teilüberdeckung von Y. ■

....

Satz 1.1.19. Es seien X, Y Hausdorffräume, X kompakt und $f : X \to Y$ eine surjektive, stetige Abbildung. Dann ist Y kompakt. Ist f zusätzlich bijektiv, so ist $f^{-1} : Y \to X$ stetig.

Beweis.

[1] Abgekürzt mit FIP: Finite Intersection Property.

① Es sei $\mathcal{T}_y := \{V_\alpha \colon \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von Y. Setzen wir $U_\alpha := f^{-1}(V_\alpha)$, so ist U_α offen, da f stetig ist. Somit ist $\{U_\alpha \colon \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung von X. Da X kompakt ist, reichen endlich viele $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ zur Überdeckung von X aus. Somit ist $\{U_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$ eine endliche Teilüberdeckung von Y, also ist Y kompakt.

② Sei nun f bijektiv. Dann ist zu zeigen, dass f offen ist, da dies die Stetigkeit der Umkehrabbildung impliziert.
Sei also $U \subset X$ offen. Dann ist $X \setminus U$ abgeschlossen und somit kompakt nach Satz 1.1.18.
Durch die Stetigkeit von f ist $f(X \setminus U)$ kompakt in Y und somit ist $f(X \setminus U)$ abgeschlossen.
Wegen $f(X \setminus U) = Y \setminus f(U)$ ist $Y \setminus f(U)$ abgeschlossen in Y, also ist $f(U)$ offen in Y.

$\blacksquare$

Bemerkung 1.1.20.

- Es gilt der *Satz von Heine-Borel*:
  In einem metrischen Raum sind die Begriffe kompakt und folgenkompakt äquivalent.

- Man kann leicht zeigen:
  Ist X ein kompakter topologischer Raum, der das 1. Abzählbarkeitsaxiom erfüllt, so ist X folgenkompakt.

- In beliebigen topologischen Räumen impliziert keiner dieser Begriffe den anderen.

- In $\mathbb{K}^n$ gilt:
  Eine Menge ist kompakt genau dann wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

- Ist X ein kompakter topologischer Raum und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, so ist f beschränkt, d.h. es existiert eine Konstante $K \geq 0$ mit $|f(x)| \leq K$ für alle $x \in \mathbb{K}$ und f nimmt daher Minimum und Maximum an.

1.2 Topologische Vektorräume

Wir betrachten nur reelle und komplexe Vektorräume und schreiben daher $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

1.2.1 Grundlegende Definitionen

Definition 1.2.1. Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, $A, B \subset E$, $x \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann setzen wir

$$A \pm B := \{a \pm b \colon a \in A, b \in B\},$$

$$x \pm A := \{x\} \pm A \text{ und}$$

$$\lambda A := \{\lambda a \colon a \in A\}.$$

. . . .

Definition 1.2.2.

a) Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Menge $C \subset E$ heißt **konvex**, wenn für je zwei Elemente $x, y \in C$ auch die Verbindungsstrecke in C liegt, d.h.

$$tx + (1-t)y \in C \text{ für } t \in [0,1]. \tag{1.18}$$

(1.18) ist äquivalent zu $tC + (1-t)C \subset C$ für $t \in [0,1]$.
Hierzu äquivalent ist auch

$$\lambda x + \mu y \in C \ \forall \lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1 \ (\textbf{Konvexkombination}) \tag{1.19}$$

oder entsprechend $\lambda C + \mu C \subset C$ mit λ, μ wie in (1.19).

b) Eine Menge $B \subset E$ heißt **kreisförmig**, wenn $\alpha B \subset B$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| \leq 1$ gilt.

c) Eine Menge $A \subset E$ heißt **absolutkonvex**, wenn sie konvex und kreisförmig ist. Hierzu ist äquivalent:
Für je zwei Punkte $x, y \in A$ gilt $\lambda x + \mu y \in A$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.

d) Eine Menge $A \subset E$ heißt **absorbierend**, wenn es zu jedem $x \in E$ ein $t = t(x) > 0$ gibt mit $x \in tA \Leftrightarrow t^{-1}x \in A$. Diese Bedingung ist insbesondere erfüllt, wenn

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA \tag{1.20}$$

gilt. Eine kreisförmige Menge $A \subset E$ ist absorbierend genau dann, wenn (1.20) gilt.

. . . .

Definition 1.2.3. Es sei E ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{T}$ eine Topologie auf E mit folgenden Eigenschaften:

a) $\mathcal{T}$ ist eine Hausdorfftopologie.

b) Die algebraischen Operationen $+ : E \times E \to E$ und $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ sind stetig.

Dann heißt $\mathcal{T}$ eine **Vektorraumtopologie** und $(E, \mathcal{T})$ ein **topologischer Vektorraum**.

....

Bemerkung:
Obige Definition bedeutet, dass $E \times E$ und $\mathbb{K} \times E$ mit der Produkttopologie versehen sind. Ohne Benutzung dieses Begriffs bedeutet dies folgendes:

> Addition:
> Zu $x, y \in E$ und jeder Umgebung V von $x + y$ gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_x + U_y \subset V$.
>
> Skalarmultiplikation:
> Zu $x \in E$ und jeder Umgebung V von λx gibt es Umgebungen U von x und $\delta > 0$ mit $tU \subset V$ für alle $t \in \mathbb{K}$ mit $|t - \lambda| \le \delta$.

Beispiel 1.2.4. Jeder normierte Raum ist ein topologischer Vektorraum. Die Stetigkeit der Skalarmultiplikation folgt aus der Homogenität der Norm, die Stetigkeit der Addition aus der Dreiecksungleichung.
Bekannteste Beispiel:

- $\mathbb{K}^n$ mit irgendeiner Norm.
- $C[0,1]$ mit Maximumnorm.
- $C(\Omega)$, wobei Ω ein kompakter Hausdorffraum ist.
- Weitere Beispiele folgen im Laufe der Vorlesung, unter anderem $C[0,1]$, $H(D)$, $C(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen.

....

Bemerkung 1.2.5. Es sei E ein topologischer Vektorraum.
Für $a \in E$ und $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ definieren wir den Translationsoperator T_a und den Multiplikationsoperator M_λ durch

$$T_a : E \to E,\ T_a x := a + x \text{ bzw. } M_\lambda : E \to E,\ \ M_\lambda x := \lambda x. \tag{1.21}$$

Aus der Stetigkeit der Addition und der Skalarmultiplikation folgt, dass T_a und M_λ Homöomorphismen sind. Hieraus folgt, dass jede Vektorraumtopologie *translationsinvariant* ist, d.h. es gilt: $U \subset E$ ist offen. $\Leftrightarrow$ $a + U$ ist offen für jedes $a \in E$.
Also ist $\mathcal{T}$ durch eine Umgebungsbasis an 0 eindeutig bestimmt. Eine solche Basis heißt auch **Nullumgebungsbasis**.
Eine Vektorraumtopologie ist durch eine Nullumgebungsbasis eindeutig besitmmt, d.h. jede offene Menge kann als Vereinigung von Translationen der Elemente der Nullumgebungsbasis dargestellt werden.
Eine Metrik d auf einem Vektorraum E heißt **translationsinvariant**, wenn $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ für alle $x, y, z \in E$ gilt.
Hieraus folgt dann sofort die Stetigkeit der Addition wegen

$$d(x + y, x_0 + y_0) = d(x - x_0, y_0 - y) \le d(x - x_0, 0) + d(0, y_0 - y) = d(x, x_0) + d(y, y_0).$$

....

Definition 1.2.6. Es sei E ein topologischer Vektorraum. Eine Menge $M \subset E$ heißt **beschränkt**, wenn es zu jeder Nullumgebung U ein $\delta > 0$ gibt mit $M \subset tU$ für alle $t > s$.

Definition 1.2.7. Es sei $(E, \mathcal{T})$ ein toplogischer Vektorraum.

a) E heißt **lokalkonvex**, wenn es eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen gibt.

b) E heißt **lokal beschränkt**, wenn es eine beschränkte Nullumgebung gibt.

c) E heißt **lokalkompakt**, wenn es eine kompakte Nullumgebung gibt.

d) E heißt ein **metrischer Vektorraum**, wenn es eine invariante Metrik d auf E gibt, die die Topologie $\mathcal{T}$ induziert.

e) E heißt **Fréchetraum**, wenn E lokalkonvex und ein vollständiger metrischer Vektorraum ist.

Es sei E ein normierter Raum. Dann ist E ein metrischer Vektorraum. Ist E vollständig, so heißt E ein **Banachraum**.
Für $r > 0$ ist $B_r := \{x \in E \colon ||x|| < r\}$ eine konvexe Nullumgebung und $\{B_r \colon r > 0\}$ ist eine Nullumgebungsbasis aus konvexen Mengen. Somit sind Banachräume stets lokalkonvex und auch Frécheträume. Insbesondere ist $E = \mathbb{K}^n$ ein Banachraum und lokalkompakt. Banachräume sind auch lokal beschränkt.

1.2.2 Nullumgebungsbasen

Wir wenden uns nun dem Studium der Nullumgebungen eines topologischen Vektorraums zu.

Lemma 1.2.8. Es sei E ein topologischer Vektorraum und V eine Nullumgebung. Dann existiert eine symmetrische offene Nullumgebung U, d.h. $U = -U$, mit $U + U \subset V$.

Beweis. Wegen der Stetigkeit der Addition existieren offene Nullumgebungen $U_1, U_2 \subset E$ mit $U_1 + U_2 \subset V$. Setze nun $U := U_1 \cap U_2 \cap (-U_1) \cap (-U_2)$. Dann erfüllt U die Behauptung. ■

. . . .

Lemma 1.2.9. Es sei E ein topologischer Vektorraum, $A \subset E$ abgeschlossen und $0 \in E \setminus A$. Dann existiert eine Nullumgebung U mit $U \cap (A + U) = \emptyset$.

Beweis. Wegen $0 \notin A$ ist $E \setminus A$ eine Nullumgebung. Nach Lemma 1.2.8 existiert eine offene, symmetrische Nullumgebung U mit $U + U \subset E \setminus A$. Aus der Symmetrie von U folgt dann $U \cap (A + U) = \emptyset$, denn sonst gäbe es $u_1, u_2 \in U$ mit $u_1 = a + u_2$ für ein $a \in A$, also $a = u_1 - u_2 \in U + U \subset E \setminus A$, was ein Widerspruch ist. ■

. . . .

Satz 1.2.10. Es sei E ein topologischer Vektorraum. Dann existiert eine Nullumgebungsbasis aus abgeschlossenen Mengen.

Beweis. Sei V eine offene Nullumgebung. Wir setzen $A := E \setminus V$. Dann ist A abgeschlossen mit $0 \notin A$. Also existiert nach Lemma 1.2.9 eine offene Nullumgebung U mit $U \cap (A + U) = \emptyset$. Nach einer Übungsaufgabe ist $A + U$ offen, somit gilt sogar $\overline{U} \cap (A + U) = \emptyset$. Also folgt $\overline{U} \subset V$ und somit die Behauptung. ■

. . . .

Satz 1.2.11. Es sei E ein topologischer Vektorraum. Dann gelten:

a) Ist $A \subset E$, so gilt $\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}(0)} (A + U)$.

b) Sind $A, B \subset E$, so gilt $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A + B}$.

c) Ist F ein Unterraum von E, so auch $\overline{F}$.

d) Ist $C \subset E$ konvex, so auch $\overline{C}$ und C°.

e) Ist $B \subset E$ kreisförmig, so auch $\overline{B}$. Ist zusätzlich $0 \in B^\circ$, so ist auch B kreisförmig.

f) Ist $M \subset E$ beschränkt, so auch $\overline{M}$.

g) Ist E ein vollständiger metrischer Vektorraum und F ein Unterraum von E, so ist F vollständig genau dann, wenn F abgeschlossen ist.

h) Ist E ein Fréchetraum und F ein Unterraum von E, so ist auch $\overline{F}$ ein Fréchetraum.

Beweis.

a) Es gilt $x \in \overline{A}$ genau dann, wenn $(x + U) \cap A \neq \emptyset$ für jede Nullumgebung $U \in \mathcal{U}(x)$.

Dies ist genau dann der Fall, wenn $x \in A - U$ gilt. Da mit U auch $-U$ eine Nullumgebung ist, folgt die Behauptung.

b) Es seien $x \in \overline{A}$ und $y \in \overline{B}$. Ferner sei W eine Umgebung von $x+y$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit der Addition Umgebungen U von x und V von y mit $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap B \neq \emptyset$ und $U + V \subset W$. Daher gibt es $a \in U \cap A$ und $b \in V \cap B$.
$\Rightarrow a + b \in (A+B) \cap W$. Damit folgt sofort $x + y \in \overline{A+B}$.

c) Es seien hierfür $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Nach Bemerkung 1.2.5 folgt $\alpha\overline{F} = \overline{\alpha F}$. Damit folgt aus b):

$$\alpha\overline{F} + \beta\overline{F} = \overline{\alpha F} + \overline{\beta F} \overset{b)}{\subset} \overline{\alpha F + \beta F}.$$

d) Es sei hierfür $0 \leq t \leq 1$. Dann gilt $t\overline{C} + (1-t)\overline{C} = \overline{tC + (1-t)C} \subset \overline{C}$, also ist $\overline{C}$ konvex. Nun sei $C' \subset C$ offen. Da jede offene Teilmenge von C in C° liegt, folgt $C' \subset C^\circ$, also ist auch C° konvex.

e) Die Kreisförmigkeit von $\overline{B}$ zeigt man wie in c) oder d).
Sei nun $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $0 < |\alpha| \leq 1$. Aus Bemerkung 1.2.5 folgt $\alpha B^\circ = (\alpha B)^\circ$. Somit gilt $\alpha B^\circ \subset \alpha B \subset B$, da B kreisförmig ist. Da αB° offen ist, folgt $\alpha B^\circ \subset B^\circ$[2]. Somit ist B° kreisförmig.

f) Es sei U eine Nullumgebung. Aus Satz 1.2.10 folgt, dass eine Nullumgebung V existiert mit $\overline{V} \subset U$. Da M beschränkt ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $M \subset tV$ für alle $t > \delta$. Für diese t gilt dann $\overline{M} \subset \overline{tV} = t\overline{V} \subset tU$. Somit ist $\overline{M}$ beschränkt.

g) Ist klar.

h) Folgt aus g).

■

. . . .

Satz 1.2.12. Es sei E ein topologischer Vektorraum. Dann gelten:

a) Jede Nullumgebung enthält eine kreisförmige Nullumgebung. Insbesondere besitzt E eine Nullumgebungsbasis aus kreisförmigen Mengen.

b) Jede konvexe Nullumgebung enthält eine absolutkonvexe Nullumgebung. Ist E lokalkonvex, so besitzt E eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Mengen.

Beweis.

a) Es sei U eine Nullumgebung. Wegen der Stetigkeit der Skalarmultiplikation gibt es ein $\delta > 0$ und eine Nullumgebung V, sodass für alle $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| \leq \delta$ gilt: $\alpha V \subset U$. Sei W nun die Vereinigung aller dieser Mengen αV. Dann ist W eine Nullumgebung und $W \subset U$.
Behauptung: W ist kreisförmig.

Zum Beweis sei $\beta \in \mathbb{K}$ mit $|\beta| \leq 1$ und $x \in W$. Dann ist $x \in \alpha V$ für ein α und ein V wie oben. Somit ist $\beta x \in \beta\alpha V$ und wegen $|\beta\alpha| \leq |\alpha| < \delta$ gilt dann $\beta\alpha V \subset U$. Somit ist $\beta x \in W$, also ist W kreisförmig. ◇

Damit ist a) gezeigt.

[2] Ist $0 \in B^\circ$, so gilt dies auch für $\alpha = 0$.

b) Es sei U eine konvexe Nullumgebung. Wir setzen $A := \bigcap\{\alpha U : \alpha \in \mathbb{K}, |\alpha| = 1\}$ und wählen W wie im Beweis von a). Da W kreisförmig ist, git $\alpha^{-1}W = W$ für $|\alpha| = 1$, denn es gilt $\alpha^{-1}W \subset W$ und $\alpha W \subset W$. Damit folgt $W \subset \alpha U$, also gilt $W \subset A$ und A ist eine Nullumgebung.
Offenbar gilt auch $A \subset U$ und A ist als Durchschnitt konvexer Mengen wieder konvex.
Behauptung: A ist kreisförmig.

Zum Beweis sei $0 \leq r \leq 1$ und $\beta \in \mathbb{K}$ mit $|\beta| \leq 1$. Dann folgt

$$r\beta A = \bigcap_{|\alpha|=1} r\beta\alpha U = \bigcap_{|\alpha|=1} r\alpha U.$$

Da αU eine konvexe Nullumgebung ist, folgt $r\alpha U \subset \alpha U$ und somit gilt $r\beta A \subset A$, also ist A kreisförmig. ◇

Dies komplettiert den Beweis von b).

■

. . . .

Satz 1.2.13. Es sei V ein topologischer Vektorraum und U eine Nullumgebung. Dann gelten:

a) Ist (r_n) eine streng monoton wachsende Folge positiver Zahlen mit $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, so gilt $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n U$. Insbesondere ist jede Nullungebung absorbierend.

b) Jede kompakte Menge $K \subset E$ ist beschränkt.

c) Ist (δ_n) eine streng monoton fallende Nullfolge und M eine beschränkte Nullumgebung, so ist $\mathcal{B} := \{\delta_n U : n \in \mathbb{N}\}$ eine Nullumgebungsbasis.

Beweis.

a) Es sei $x \in E$. Da die Skalarmultiplikation stetig ist, ist die Menge $M := \{\alpha \in \mathbb{K} : \alpha x \in U\}$ offen ist und $0 \in M$ gilt. Daher gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $r_n^{-1} \in M$ gilt, also folgt $r_n^{-1}x \in U$ und somit $x \in r_n U$.

b) Es sei U eine offene kreisförmige Nullumgebung. Nach a) gilt dann $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$. Da K kompakt ist, existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $K \subset U \cup 2U \cup \ldots \cup mU \overset{M \text{ kreisf.}}{=} mU$. Für $t > m$ gilt daher $K \subset mU \subset tU$, also ist K beschränkt.

c) Es sei V eine Nullumgebung. Da U beschränkt ist, existiert ein $s > 0$ mit $U \subset tV$ für alle $t > s$. Wir wählen nun n so groß, dass $s\delta_n < 1$ gilt. Dann ist $\delta_n U \subset V$ und somit folgt die Behauptung.

. . . . ■

1.2.3 Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen sind aus der linearen Algebra bereits bekannt. In der Funktionalanalysis heißen diese auch **lineare Operatoren**. Speziell nennen wir einen linearen Operator $\phi : E \to \mathbb{K}$ ein lineares Funktional.

Zum Beispiel ist der Multiplikationsoperator aus Bemerkung 1.2.5 linear, aber der Translationsoperator T_a nur, wenn $a = 0$ gilt.

Kurze Wiederholung linearer Abbildungen:

- Es gilt $T(0) = 0$.
- Ist $A \subset E$ Unterraum / konvex / kreisförmig, so auch $T(A)$. Statt $T(A)$ schreibt man auch $R(T)$.
- Ist $B \subset F$ ein Unterraum / konvex / kreisförmig, so auch $T^{-1}(B)$.
- Speziell ist $N(T) = T^{-1}(\{0\}) = \{x \in E \colon Tx = 0\}$ ein Unterraum von E und heißt **Kern** von T.

Die Menge aller linearen Funktionale von E bezeichnen wir mit E^* und E^* ist wieder ein Vektorraum. Er heißt **algebraischer Dualraum** von E.

Satz 1.2.14. Es seien E, F topologische Vektorräume, $T : E \to F$ linear und T sei stetig in 0. Dann ist T stetig auf E. T ist sogar gleichmäßig stetig in folgendem Sinne:
Zu jeder Nullumgebung V in F existiert eine Nullumgebung U in E, sodass für alle $x, y \in E$ mit $x - y \in U$ gilt: $Tx - Ty \in V$.

Beweis. Es sei V eine Nullumgebung in F. Wegen der Stetigkeit von T in 0 existiert eine Nullumgebung U in E mit $T(U) \subset V$. Nun seien $x, y \in E$ mit $x - y \in U$. Dann folgt $Tx - Ty = T(x - y) \in V$ und die Formulierung der gleichmäßigen Stetigkeit ist bewiesen.
Wir zeigen nun noch die Stetigkeit von T auf ganz E. Dazu sei $x \in E$, $y := Tx$ und W eine Umgebung von y. Dann ist $W = y + V$ mit einer Nullumgebung V in F. Wähle nun U wie oben. Damit folgt $x + U \in \mathcal{U}(x)$. Mit der Linearität von T folgt $T(x + U) = Tx + TU \subset y + V = W$ und somit ist T stetig in x, also auf ganz E. ■

. . . .

Satz 1.2.15. Es sei E ein topologischer Vektorraum, $\phi \in E^*$ und $\phi(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in E$. Dann sind äquivalent:

a) ϕ ist stetig.

b) $N(\phi)$ ist abgeschlossen.

c) $N(\phi)$ ist nicht dicht in E.

d) ϕ ist in einer Nullumgebung beschränkt.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Es ist $N(\phi) = \phi^{-1}(\{0\})$ und $\{0\}$ ist abgeschlossen.
b) $\Rightarrow$ c):
Nach Voraussetzung ist $N(\phi) \neq E$. Wegen der Abgeschlossenheit von $N(\phi)$ gilt $\overline{N(\phi)} = N(\phi) \neq$

E, also ist $N(\phi)$ nicht dicht in E.
c) $\Rightarrow$ d):
Da $N(\phi)$ nicht dicht in E ist, folgt $(E \setminus N(\phi))^\circ \neq \emptyset$. Also folgt nach Satz 1.2.12a): Es existiert ein $x \in E$ und eine kreisförmige Nullumgebung U mit

$$(x + U) \cap N(\phi) = \emptyset. \tag{$*$}$$

Dann ist $\phi(U) \subset \mathbb{K}$ kreisförmig, also ist $\phi(U)$ beschränkt oder ganz $\mathbb{K}$.
Wir müssen jetzt noch ausschließen, dass $\phi(U) = \mathbb{K}$ gilt.
Annahme: Es gilt $\phi(U) = \mathbb{K}$.
Dann existiert ein $y \in U$ mit $\phi(y) = -\phi(x) = \phi(-x)$ wegen der Surjektivität von ϕ, die aus der Annahme resultiert. Damit ist aber $\phi(x + y) = 0$, also $y + x \in N(\phi)$, was ein Widerspruch zu ($*$) ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.
d) $\Rightarrow$ a):
Nach Voraussetzung existiert eine Nullumgebung U in E und eine Konstante $M > 0$ mit $|\phi(x)| < M$ für alle $x \in U$. Sei nun $\varepsilon > 0$ und $V := \frac{\varepsilon}{M}U$. Dann ist V eine Nullumgebung und es gilt für $x \in V$: $|\phi(x)| < \varepsilon$. Somit ist ϕ stetig in 0 und nach Satz 1.2.14 stetig. ■

Bemerkung:
Die Implikationen a) $\Rightarrow$ b) und b) $\Rightarrow$ c) gelten auch allgemeiner für $T : E \to F$, wobei E ein topologischer Vektorraum und F nur ein Hausdorffraum ist.

1.3 Endlichdimensionale Räume

Wir wollen hier endlichdimensionale Röume untersuchen und diese charakterisieren. Beispiele hierfür sind die Banachräume $\mathbb{K}^n$ mit der euklidischen Norm. Weitere Normen auf $\mathbb{K}^n$ wären beispielsweise

$$||z||_1 = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \text{ oder } ||z||_\infty = \max_{k=1,\dots,n} |z_k| . \tag{1.22}$$

Man kann zeigen (vgl. Übung), dass auf $\mathbb{K}^n$ alle Normen äquivalent sind. Damit erzeugen sie insbesondere dieselbe Topologie.
Frage: Existiert eine Vektorraumtopologie auf $\mathbb{K}^n$, die nicht durch eine Norm induziert wird?
Antwort: Nein.
Zur Begründung dieser Antwort benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 1.3.1. Es sei E ein topologischer Vektorraum und F ein Unterraum von E, der in der Teilraumtopologie lokalkompakt ist. Dann ist F abgeschlossen.

Beweis. Nach Voraussetzung existiert eine kompakte Menge $K \subset F$ mit $0 \in K^\circ$. Also existiert eine Nullumgebung U in E mit $U \cap F \subset K$, da F in der Teilraumtopologie lokalkompakt ist. Wir wählen nun eine symmetrische Nullumgebung V mit $\overline{V} + \overline{V} \subset U$.
Behauptung: Für jedes $x \in E$ ist die Menge $M_x := F \cap (x + \overline{V})$ kompakt.

> Zum Beweis sei $y_0 \in M_x$[3]. Dann gilt $y - y_0 = (y - x) + (x - y_0) \in \overline{V} + \overline{V} \subset U$. Da F ein Unterraum ist, ist $y - y_0 \in F$, also $y - y_0 \in U \cap F \subset K$. Es folgt somit $M_x \subset y_0 + K$. Weiter ist M_x abgeschlossen in F und $y_0 + K$ kompakt. Daher ist M_x kompakt. ◇

Nun sei $x \in \overline{F}$ und $\mathcal{B}$ die Menge aller Nullumgebungen W in E mit $W \subset V$. Für $W \in \mathcal{B}$ setze $E_W := F \cap (x + \overline{W})$. Dann ist E_W kompakt und nichtleer. Da jeder endliche Durchschnitt von Elementen aus $\mathcal{B}$ wieder in $\mathcal{B}$ liegt, hat $\{E_W : W \in \mathcal{B}\}$ die FIP und somit existiert ein $z \in \bigcap_{W \in \mathcal{B}} E_W$, da jedes E_W kompakt ist.
Damit folgt $z \in F$ und $z \in x + \overline{W}$ für alle $W \in \mathcal{B}$, also ist $z = x$. Dies impliziert $z = x$ und somit $F = \overline{F}$, also ist F abgeschlossen. ■

. . . .

Satz 1.3.2. Es sei E ein topologischer Vektorraum und $F \subset E$ ein Unterraum mit $\dim F = n \in \mathbb{N}$. Dann ist jeder Isomorphismus von $\mathbb{K}^n$ auf F ein Homöomorphismus und F ist abgeschlossen.

Beweis. Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach $\dim F$.
Induktionsanfang $n = 1$:
Wir bezeichnen mit $T : \mathbb{K} \to F$ den Isomorphismus, insbesondere ist T daher bijektiv.
Sei $y := T(1)$. Dann ist $T(\alpha) = T(\alpha \cdot 1) = \alpha T(1) = \alpha y$. Daher ist T stetig, da die Skalarmultiplikation stetig ist.
Für $T^{-1} : F \to \mathbb{K}$ gilt $T^{-1} \in F^*$ mit $N(T^{-1}) = \{0\}$. Da $F \subset E$ ein Hausdorffraum ist, ist $\{0\}$ abgeschlossen und nach Satz 1.2.15 folgt die Stetigkeit von T^{-1}. Somit ist T ein Homöomorphismus.
Da $\mathbb{K}$ lokalkompakt ist, ist F ebenfalls lokalkompakt, da $\mathbb{K} \overset{\sim}{=} F$ gilt. Mit Lemma 1.3.1 folgt dann die Abgeschlossenheit von F.
Induktionsvoraussetzung:
Es sei $F \subset E$ ein Unterraum mit $\dim F = n - 1$. Dann sind F und $\mathbb{K}^{n-1}$ homöomorph und F

[3]Dies können wir ohne Einschränkung annehmen, da die Aussage für $M_x = \emptyset$ auch gilt.

ist abgeschlossen.
Induktionsschritt $n-1 \to n$:
Es sei $T : \mathbb{K}^n \to F$ ein Isomorphismus. Sei ferner $\{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^n$ und $y_k := T(e_k)$. Dann gilt $T((\alpha_1, \dots, \alpha_n)) = \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n$.
Da Skalarmultiplikation und Addition stetig sind, ist auch T stetig.
Für $T^{-1} : F \to \mathbb{K}^n$ und eine Basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ von F existieren $\phi_1, \dots, \phi_n \in F^*$, sodass $x = \phi_1(x)x_1 + \dots + \phi_n(x)x_n$ für $x \in F$.
Aus der linearen Algebra wissen wir $\dim N(\phi_k) = n-1$ für $k = 1, \dots, n$. Weiter ist $N(\phi_k)$ abgeschlossen nach Induktionsvoraussetzung für $k = 1, \dots, n$, also ist ϕ_k stetig für $k = 1, \dots, n$. Damit gilt $T^{-1}(x) = (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x))$ und somit ist T^{-1} stetig, da alle ϕ_k stetig sind.
Da $\mathbb{K}^n$ lokalkompakt ist, folgt wegen $\mathbb{K}^n \cong F$ sofort, dass F ebenfalls lokalkompakt ist. Nach Lemma 1.3.1 ist F somit abgeschlossen, also folgt die Behauptung. ■

....

Satz 1.3.3. Es sei E ein lokalkompakter topologischer Vektorraum. Dann gilt $\dim E < \infty$.

Beweis. Da E lokalkompakt ist existiert eine Nullumgebung U, die kompakt ist. Setze nun $V := U^\circ \subset U$. Nach Satz 1.2.13 b) ist U beschränkt, also ist auch V beschränkt. Nach Satz 1.2.13 c) ist nun $\mathcal{B} := \{2^{-n}V : n \in \mathbb{N}\}$ eine Nullumgebungsbasis, also ist $\left\{x + \frac{1}{2}V : x \in U\right\}$ eine offene Überdeckung von U.
Da U kompakt ist existieren $x_1, \dots, x_m \in U$ mit

$$U \subset \left(x_1 + \frac{1}{2}V\right) \cup \dots \cup \left(x_m + \frac{1}{2}V\right). \tag{$*$}$$

Definiere nun $F := \langle x_1, \dots, x_m \rangle \subset E$, wobei $\langle \dots \rangle$ den Spann der einbeschriebenen Vektoren bezeichnet. Dann gilt $\dim F \leq m$. Es bleibt zu zeigen, dass $E \subset F$ gilt.
Nach Satz 1.2.13 a) gilt

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} nV. \tag{$**$}$$

Ferner ist $V \subset U \overset{(*)}{\subset} F + \frac{1}{2}V \subset F + \frac{1}{2}F + \frac{1}{4}V \subset 2F + \frac{1}{4}V = F + \frac{1}{4}V$. Iterativ folgt daher $V \subset F + \frac{1}{2^n}V$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher

$$V \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (F + 2^{-n}V) \overset{1.2.11\text{ a)}}{=} \overline{F} = F.$$

Für $n \geq 1$ gilt $nV \subset nF = F$, also $nV \subset F$ für alle $n \geq 1$. Aus $(*)$ folgt somit $E \subset F$.

Insgesamt folgt daher $E = F$ und somit $\dim E = \dim F \leq m < \infty$. ■

. . . .

Folgerung 1.3.4. Es sei E ein normierter Raum und $B := \{x \in E\colon\ ||x|| \leq 1\}$. Dann gilt:
B ist kompakt. $\Leftrightarrow \dim E < \infty$.

. . . .

1.4 Beschränkte Mengen und lineare Abbildungen

Wir beginnen mit einer Erinnerung an Definition 1.2.6:
Eine Menge M ist beschränkt, falls für alle Nullumgebungen U ein $s > 0$ existiert mit $M \subset tU$ für alle $t \geq s$.

Beispiel 1.4.1.

a) Es sei E ein topologischer Vektorraum. Dann ist jede konvergente Folge (x_n) beschränkt.

   BEWEIS. Es sei x der Grenzwert der Folge (x_n), U eine Nullumgebung und V eine Nullumgebung der Gestalt, dass U, V kreisförmig sind mit $V + V \subset U$.
   Zu $x + V$ existiert ein $N \subset \mathbb{N}$ mit $x_n \in x + V$ für alle $n \geq N$. Sei nun $s > 1$ mit $x \in sV$[4].
   Dann folgt $x_n \in sV + V \overset{\text{kreisf.}}{\subset} sV + sV \subset sU$ für alle $n \geq N$.
   Zu $x_1, \ldots, x_{N-1}$ existiert nun ein $r > 0$ mit $x_1, \ldots, x_{N-1} \in rV = \frac{r}{2}V + \frac{r}{2}V \subset \frac{r}{2}U$.
   Falls $s \geq \frac{r}{2}$ ist, ist $\frac{r}{2s} \leq 1$, also folgt $\frac{r}{2s}U \subset U \subset sU$. Dann gilt $x_n \in sU$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit folgt aus einer Übungsaufgabe[5], dass $x_n \in tU$ für alle $t \geq s$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   Falls $s < \frac{r}{2}$ gilt, so folgt $sU \subset \frac{r}{2}U$, also gilt $x_n \in \frac{r}{2}U$ für alle $n \geq N$. Damit folgt dann wie oben $x_n \in tU$ für alle $t \geq \frac{r}{2}$.
   Kombiniert man diese beiden Fälle, ergibt sich die Beschränktheit von (x_n). ■

b) Es sei E ein topologischer Vektorraum und $0 \neq x \in E$. Wir definieren $M := \{nx \colon n \in \mathbb{N}\}$. Dann ist M *nicht* beschränkt.

   BEWEIS. Es ist $0 \notin M$, daher existiert aufgrund der Hausdorffeigenschaft von E eine Nullumgebung U mit $x \notin U$. Damit folgt $nx \notin nU$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit ist aber nach Definition $M \not\subset nU$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist M nicht beschränkt. ■

. . . .

Bemerkung:
Kein Unterraum eines topologischen Vektorraums E außer $\{0\}$ ist beschränkt.

Satz 1.4.2. Es sei E ein topologischer Vektorraum und $M \subset E$. Dann sind äquivalent:

a) M ist beschränkt.

b) Ist $(x_n) \subset M$ und $(\alpha_n) \subset \mathbb{K}$ mit $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so gilt $\alpha_n x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

BEWEIS.
a) $\Rightarrow$ b):
Es sei M beschränkt und U eine kreisförmige Nullumgebung. Dann existiert ein $t > 0$ mit $M \subset tU$, d.h. $t^{-1}M \subset U$.
Es seien nun $(x_n) \subset M$ und $(\alpha_n) \subset \mathbb{K}$ mit $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Da (α_n) konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha_n|\, t < 1$ für alle $n \geq N$. Daher folgt $\alpha_n x_n \in \alpha_n M \subset (\alpha_n t)U \subset U$ für alle $n \geq N$.Da U eine beliebige kreisförmige Nullumgebung ist, konvergiert $(\alpha_n x_n)$ somit gegen 0.
b) $\Rightarrow$ a):
Annahme: M sei nicht beschränkt.
Dann existiert eine Nullumgebung U und eine Folge $(r_n) \subset \mathbb{R}$ mit $r_n \geq 0$ und $r_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ so, dass $M \not\subset r_n U$ für alle $n \in \mathbb{N}$. $(*)$
Sei nun $(x_n) \subset M$. Wir betrachten nun die Folge $\left(r_n^{-1}x_n\right)$, wobei $r_n^{-1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ gilt. Dann gilt $r_n^{-1}x_n \in r_n^{-1}M \overset{(*)}{\not\subset} U$ für alle $n \in \mathbb{N}$, somit konvergiert $(r_n^{-1}x_n)$ nicht gegen 0. Dies ist allerdings ein Widerspruch zur Voraussetzung mit $(a_n) := \left(r_n^{-1}\right)$. ■

[4] Dies funktioniert sicher, da Nullumgebungen absorbierend sind.
[5] Blatt 4, Aufgabe 1.

Definition 1.4.3. Es seien E, F topologische Vektorräume und $T : E \to F$ linear. T heißt **beschränkt**, falls $T(M)$ in F beschränkt ist für alle beschränkten Mengen $M \subset E$, d.h. das Bild beschränkter Mengen unter T ist wieder beschränkt.

Bemerkung:
Man beachte den Unterschied zur Definition von beschränkten Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Dieser Begriff wäre hier nicht sinnvoll.

Lemma 1.4.4. Es sei (E, d) ein metrischer Vektorraum. Dann gelten:

a) Für $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt $d(nx, 0) \leq nd(x, 0)$.

b) Ist (x_n) eine folge in E mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so existiert eine Folge (α_n) in $(0, \infty)$ mit $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ und $\alpha_n x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Beweis.

a) Aus der Dreiecksungleichung und der Invarianz von d folgt $d(nx, 0) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} d(kx, (k-1)x) = nd(0, -x) = nd(x, 0)$.

b) Wegen $d(x_n, 0) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ existiert eine streng monoton wachsende Folge (n_k) in $\mathbb{N}$ mit $d(x_n, 0) < \frac{1}{k^2}$ für $n \geq n_k$. Wir definieren nun (α_n) wie folgt:
$\alpha_n = 1$ für $1 \leq n \leq n_1$, $\alpha_n = k$ für $n_k \leq n \leq n_{k+1}$.
Dann gilt $\alpha_n \nearrow \infty$ für $n \to \infty$. Somit gilt für $n_k \leq n \leq n_{k+1}$ nach a):
$d(\alpha_n x_n, 0) = d(kx_n, 0) \leq kd(x_n, 0) < \frac{1}{k}$. Daraus folgt die Behauptung.

■

Satz 1.4.5. Es seien E, F topologische Vektorräume und $T : E \to F$ linear. Weiterhin betrachten wir die folgenden Aussagen:

a) T ist stetig.

b) T ist beschränkt.

c) Ist (x_n) eine Folge in E mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so ist (Tx_n) beschränkt.

d) Ist (x_n) eine Folge in E mit $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, so gilt $Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dann gelten die Implikationen a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c).
Ist E ein metrischer Vektorraum, so sind alle vier Aussagen äquivalent.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Es sei $M \subset E$ beschränkt und V eine Nullumgebung in F. Dann existiert wegen der Stetigkeit von T eine Nullumgebung U in E mit $T(U) \subset V$, wobei $T(0) = 0$ zu beachten ist. Da M beschränkt ist, existiert ein $s > 0$ mit $M \subset tU$ für alle $t > s$. Daher folgt $T(M) \subset T(tU) = tT(U) \subset tV$ für alle $t > s$. Damit ist $T(M)$ beschränkt.
b) $\Rightarrow$ c):
Gilt, da konvergente Teilfolgen beschränkt sind.
c) $\Rightarrow$ d):

Nach Lemma 1.4.4 existiert eine FOlge (α_n) positiver Zahlen mit $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ und $\alpha_n x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Aus Satz 1.4.2 folgt dann $Tx = \underbrace{\alpha_n^{-1}}_{\to 0} \underbrace{T(\alpha_n x_n)}_{\text{beschränkt}} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

d) $\Rightarrow$ a):
Annahme: a) ist falsch.
Dann existiert eine Nullumgebung V in F, sodass $T^{-1}(V)$ keine Nullumgebung in E enthält. Da E ein metrischer Raum ist, existiert in E eine abzählbare Nullumgebungsbasis, da metrische Räume das erste Abzählbarkeitsaxiom erfüllen.
Somit existiert eine Folge $(x_n) \subset E$ mit $\alpha_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, aber $Tx_n \notin V$. Somit ist d) falsch, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. ∎

. . . .

Wir bezeichnen mit $L(E,F)$ die Menge aller stetigen linearen Abbildungen $T : E \to F$. Speziell sei $L(E) := L(E,E)$ und $E' := L(E,\mathbb{K})$.
Offensichtlich ist $L(E,F)$ mit der üblichen Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen wieder ein Vektorraum.
E' heißt **(topologischer) Dualraum** von E. Offenbar ist $E' \subset E^*$.

1.5 Halbnormen und lokale Konvexität

In diesem Abschnitt wollen wir untersuchen, wie man lokalkonvexe topologische Vektorräume erzeugen kann.

Definition 1.5.1. Es sei E ein Vektorraum und $p : E \to \mathbb{R}$.

a) p heißt eine **Halbnorm** auf E, wenn gilt:

(H1) $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ für alle $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$. (**Homogenität**)

(H2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$. (**Sublinearität**)

b) Eine Familie $\mathcal{P}$ von Halbnormen auf E heißt **punktetrennend**, wenn es zu jedem $x \in E$ mit $x \neq 0$ ein $p \in \mathcal{P}$ gibt mit $p(x) \neq 0$.

c) Für eine absorbierende Menge $A \subset E$ definieren wir

$$\mu_A(x) := \inf \{t > 0\colon x \in tA\} = \inf \left\{t > 0\colon t^{-1}x \in A\right\}. \tag{1.23}$$

Es gilt $0 \leq \mu_A(x) < \infty$ und μ_A heißt **Minkowski-Funktional** von A.

Beachte:
Nach Satz 1.2.13 ist jede Nullumgebung absorbierend und jede absorbierende Menge enthält 0.

Satz 1.5.2. Es sei E ein Vektorraum und p eine Halbnorm auf E. Dann gelten:

a) $p(0) = 0$.

b) $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ für alle $x, y \in E$.

c) $p(x) \geq 0$.

d) Die Menge $N := \{x \in E\colon p(x) = 0\}$ ist ein Unterraum von E.

e) Die Menge $B := \{x \in E\colon p(x) < 1\}$ ist absolutkonvex, absorbierend und es gilt $\mu_B = p$.

Beweis.

a) Dies folgt aus (H1) mit $\alpha = 0$.

b) Aus (H2) folgt $p(x) = p(x - y + y) \leq p(x - y) + p(y)$, also gilt $p(x) - p(y) \leq p(x - y)$. Vertauschen von x und y liefert $p(y) - p(x) \leq p(x - y)$ und damit folgt die Behauptung.

c) Folgt aus b) mit $y = 0$.

d) Es seien $x, y \in N$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Dann folgt $p(\alpha x + \beta y) \leq p(\alpha x) + p(\beta y) = |\alpha|\, p(x) + |\beta|\, p(y) = 0$. Somit gilt $\alpha x + \beta y \in N(p)$ und dies ist die Behauptung.

e) B ist kreisförmig, denn aus $x \in B$ folgt $p(x) < 1$ und für $\alpha \in \mathbb{K}$ mit $|\alpha| \leq 1$ folgt $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) < 1$, also ist $\alpha x \in B$ und somit $\alpha B \subset B$.
B ist konvex, denn sind $x, y \in B$, $\lambda \in [0, 1]$, so gilt $p(x), p(y) < 1$ und es folgt
$p(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda p(x) + (1 - \lambda)p(y) < \lambda + 1 - \lambda = 1$.

B ist absorbierend, denn ist $y \in E$ und $s > p(y)$, so folgt $p(s^{-1}y) = s^{-1}p(y) < 1$ also $s^{-1}y \in B$ und damit $y \in sB$.
Es bleibt zu zeigen, dass $p(y) = \mu_B(y)$.

i.) Für $s > p(y)$ gilt $s \in \{t > 0 \colon x \in tB\}$. Somit gilt $(p(y), \infty) \subset \{t > 0 \colon x \in tB\}$, also folgt $\mu_B(y) \leq p(y)$.

ii.) Jetzt wähle $0 < \hat{t} \leq p(y)$. Es gilt $p(\hat{t}^{-1}y) = \hat{t}^{-1}p(y) \geq 1$, also folgt $\hat{t}^{-1}y \notin B$. Dies impliziert $\hat{t} \notin \{t > 0 \colon x \in tB\}$, also folgt $(0, p(y)) \not\subset \{t > 0 \colon x \in tB\}$. Dies bedeutet aber $p(y) \leq \mu_B(y)$.

Fasst man i.) und ii.) zusammen, folgt die Behauptung.

■

Satz 1.5.3. Es sei E Vektorraum und $A \subset E$ konvex und absorbierend. Dann gelten die folgenden Aussagen:

a) $\mu_A(x+y) \leq \mu_A(x) + \mu_A(y)$ für alle $x, y \in E$.

b) $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$ für alle $t > 0$ und $x \in E$.

c) Ist A kreisförmig, dann ist μ_A eine Halbnorm.

d) Ist $B := \{x \in E \colon \mu_A(x) < 1\}$ und $C := \{x \in E \colon \mu_A(x) \leq 1\}$, so gilt $B \subset A \subset C$ und $\mu_B = \mu_A = \mu_C$.

Beweis. Es sei $H_A(x) := \{t > 0 \colon x \in tA\}$ und ferner seien $t \in H_A(x)$ und $s > t$. Wegen

$$\frac{1}{s}x = \frac{1}{s}\frac{t}{t}x = \frac{t}{s}\underbrace{\frac{x}{t}}_{\in A} + \left(1 - \frac{t}{s}\right) \cdot \underbrace{0}_{\in A} \in A$$

folgt $s \in H_A(x)$. Damit folgt $x \in sA$ und somit $s \in H_A(x)$. Somit muss gelten:

$$H_A(x) \subset [\mu_A(x), \infty) \text{ oder } H_A(x) \subset (\mu_A(x), \infty). \tag{$*$}$$

a) Wegen der Definition von $\mu_A(x)$ bzw. $\mu_A(y)$ existieren zu $\varepsilon > 0$ Punkte $s_1 \in H_A(x)$ und $s_2 \in H_A(y)$ mit $s_1 < \mu_A(x) + \frac{\varepsilon}{2}$ und $s_2 < \mu_A(y) + \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt $s_1^{-1}x \in A$ und $s_2^{-1}y \in A$. Außerdem gilt $\frac{s_1}{s_1+s_2} + \frac{s_2}{s_1+s_2} = 1$, womit folgt:

$$\frac{1}{s_1+s_2}(x+y) = \frac{s_1}{s_1+s_2}(s_1^{-1}x) + \frac{s_2}{s_1+s_2}(s_2^{-1}y) \in A,$$

da A konvex ist. Somit folgt $s_1 + s_2 \in H_A(x+y)$ und es folgt $\mu_A(x+y) \leq s_1 + s_2$. Nun folgt $\mu_A(x+y) < \mu_A(x) + \mu_A(y) + \varepsilon$ und mit $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

b) Es gilt

$$H_A(tx) = \{s > 0 \colon tx \in sA\} = \left\{s > 0 \colon \frac{1}{s}(tx) \in A\right\} = \left\{t\frac{s}{t} > 0 \colon \left(\frac{s}{t}\right)^{-1} x \in A\right\} = tH_A(x).$$

Damit folgt $\mu_A(tx) = t\mu_A(x)$.

c) (H2) folgt aus a).
Es bleibt zu zeigen: $\mu_A(\alpha x) = |\alpha|\,\mu_A(x)$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$.
Sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und betrachte $\frac{\alpha}{|\alpha|}$. Da A kreisförmig ist, gilt $\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\right)^{-1} A = A$. Also ergibt sich

$$\mu_A\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}x\right) = \inf\left\{t > 0\colon \frac{\alpha}{|\alpha|}x \in tA\right\} = \inf\left\{t > 0\colon \frac{1}{t}x \in A\right\} = \mu_A(x).$$

Hiermit folgt $\mu_A(\alpha x) = \mu_A\left(\frac{\alpha}{|\alpha|}\,|\alpha|\,x\right) = |\alpha|\,\mu_A(x)$ und damit die Behauptung.

d) Es sei $x \in B$. Da nn ist $\mu_A(x) < 1$ und wegen $(*)$ folgt $1 \in H_A(x)$. Damit ist $x \in B$, also folgt $B \subset A$.
Sei nun $x \in A$. Dann ist $1 \in H_A(x)$, also $\mu_A(x) < 1$. Somit ist $x \in C$ und es folgt $A \subset C$.
Da $B \subset A \subset C$ gilt, folgt $H_B(x) \subset H_A(x) \subset H_C(x)$, also $\mu_B(x) \leq \mu_A(x) \leq \mu_C(x)$.
Es bleibt zu zeigen: $\mu_C(x) = \mu_B(x)$ bzw. $\mu_C(x) \leq \mu_B(x)$.
Da $\mu_C(x)$ ein Infimum ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $s \in H_C(x)$ mit $s < \mu_C(x) + \varepsilon$. Somit ist $s^{-1}x \in C$, also folgt $\mu_A(s^{-1}x) \leq 1$.
Nun existiert ein $t > 0$, sodass $s < t < \mu_C(x) + \varepsilon$, also gilt $\mu_A(t^{-1}x) = \mu_A\left(t^{-1}\frac{s}{s}x\right) = \frac{s}{t}\mu_A(s^{-1}x) < 1$. Dies impliziert nun $t^{-1}x \in B$, also $t \in H_B(x)$ und $\mu_B(x) \leq t$.
Somit haben wir $\mu_B(x) \leq t \leq \mu_C(x) + \varepsilon$, woraus mit ε sofort $\mu_B(x) \leq \mu_C(x)$ folgt. Dies ist die Behauptung.

■

Satz 1.5.4. Es sei E ein Vektorraum und B eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen offenen Nullumgebungen. Dann ist $\mathcal{P} := \{\mu_U\colon U \in B\}$ eine punktetrennende Familie stetiger Halbnormen auf E.

Beweis. Es sei $U \in B$. Dann ist U absorbierend. Nach Voraussetzung sind alle U konvex und kreisförmig, nach Satz 1.5.3 sind also alle $\mu_0 \in \mathcal{P}$ Halbnormen.
Sei nun $xinE$ mit $x \neq 0$. Dann existiert ein $U \in B$ mit $x \notin U$ und $\mu_0(x) \geq 1$, da $1 \in H_U(x)$.
Insbesondere gilt $\mu_0(x) \neq 0$, also ist $\mathcal{P}$ punktetrennend.
Zum Nachweis der Stetigkeit sei $x \in U$. Da U offen ist, existiert ein $t > 1$ mit $x \in t^{-1}U \subset U$, also ist $\mu_0(x) < 1$. Seien nun $\varepsilon > 0$ und $x, y \in E$ so, dass $x - y \in \varepsilon U$ gilt. Dann folgt $|\mu_U(x) - \mu_U(y)| \leq \mu_U(x-y) < \varepsilon$, also ist μ_U stetig. ■

Satz 1.5.5. Es sei E ein Vektorraum und $\mathcal{P}$ eine punktetrennende Familie von Halbnormen auf E. Zu jedem $p \in \mathcal{P}$ definieren wir $U(p,n) := \left\{x \in E\colon p(x) < \frac{1}{n}\right\}$, $n \in \mathbb{N}$. Außerdem sei

$$B := \{U(p_1,n_1) \cap \ldots \cap U(p_m,x_m)\colon p_1,\ldots,p_m \in \mathcal{P}, n_1,\ldots,n_m \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}.$$

Dann ist B eine Nullumgebungsbasis aus absolutkonvexen Nullumgebungen einer Topologie auf E, mit der E zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum wird so, dass gilt:

a) Jedes $p \in \mathcal{P}$ ist stetig.

b) Eine Menge $M \subset E$ ist beschränkt genau dann, wenn alle $p \in \mathcal{P}$ auf M beschränkt sind.

Beweis. Wir müssen zeigen:

i.) $\mathcal{T}$ existiert und ist eine Topologie.

ii.) $(E, \mathcal{T})$ ist ein topologischer Vektorraum.

iii.) a) und b) gelten.

Zu i.):
Eine Menge $U \subset$ E ist offen genau dann, wenn U als Vereinigung von Translationen von Elementen in B dargestellt werden kann: $\mathcal{T} := \{U \subset E \colon U \text{ ist offen}\}$. Damit existiert $\mathcal{T}$ und ist eine Topologie.
Zu ii.):
Es sei $x \in E$ mit $x \neq 0$. Dann folgt $p(x) > 0$ für ein $p \in \mathcal{P}$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $np(x) > 2$ und setze $U := U(p,n)$, $V := x + U$. Dann ist U eine Nullumgebung und V eine Umgebung von x. Wir zeigen nun: $U \cap V = \emptyset$.
Wäre $y \in U \cap V$, so wäre $p(y) < \frac{1}{n}$, also gilt $p(x) \leq p(x-y) + p(y) < \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n} < p(x)$ und dies ist ein Widerspruch, somit ist $U \cap V = \emptyset$.
Nun zeigen wir noch die Stetigkeit der algebraischen Operationen.
Es sei V eine Nullumgebung. Dann existieren $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}$ und $n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ mit $U(p_1, n_1) \cap \ldots \cap U(p_m, n_m) \subset V$. $(*)$
Setze nun $U := U(p_1, 2n_1) \cap \ldots \cap U(p_m, 2n_m)$. Wegen (H2) folgt dann $U + U \subset V$, also ist die Addition stetig.
Es sei nun $x \in E$, $\alpha \in \mathbb{K}$ und V eine Nullumgebung. Wähle U wie oben. Dann existiert ein $s > 0$ mit $x \in sU$. Setze $t := \frac{s}{1+|\alpha|s} 0$. Ist $y \in x + tU$ und $\beta \in \mathbb{K}$ mit $|\beta - \alpha| < \frac{1}{s}$, so folgt

$$\beta y - \alpha x = \beta(y-x) + (\beta - \alpha)x \in \beta t U + (\beta - \alpha) s U \subset U + U \subset V,$$

da $|\beta| \leq 1$ und U kreisförmig ist. Somit ist die Skalarmultiplikation stetig.
Zu iii.):

a) Aus der Definition der $U(p,n)$ folgt sofort, dass jedes p stetig in 0 ist und aus Satz 1.5.2b) folgt, dass jedes p stetig auf E ist.

b) $\Rightarrow$) Es sei $M \subset E$ beschränkt und $p \in \mathcal{P}$. Dann ist $U(p,1)$ eine Nullumgebung. Daher existiert ein $k > 0$ mit $M \subset kU(p,1)$. Somit gilt $p(x) < k$ für alle $x \in M$ und p ist beschränkt auf M.

$\Leftarrow$) Nun sei umgekehrt $M \subset E$ und $p \in \mathcal{P}$ so, dass p beschränkt auf M ist. Ferner sei V eine Nullumgebung und es gelte $(*)$. Dann gibt es Konstanten $M_k < \infty$ mit $p_k(x) < M_k$ für $x \in M$ und $k = 1, \ldots, m$. Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_k M_k$ für $k = 1, \ldots, m$. Dann folgt $M \subset nV$ und somit ist M beschränkt.

■

....

Bemerkung 1.5.6. Es sei E ein Vektorraum und $\mathcal{P} := \{p_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ eine punktetrennende Familie von Halbnormen auf E. Diese erzeugt nach Satz 1.5.5 eine lokalkonvexe Topologie auf E.
In diesem Fall ($\mathcal{P}$ abzählbar) existiert eine invariante Metrik d, die die obige Topologie erzeugt. Setze dazu

$$d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{1, p_n(x-y)\} \text{ oder alternativ } d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(x-y)}{1+p_n(x-y)}. \tag{1.24}$$

Es ist leicht zu sehen, dass d eine Metrik ist. Um zu zeigen, dass d die obige Topologie erzeugt, betrachten wir die Kugeln $B_r := \{x \in E \colon d(x,0) < r\}$ für $r > 0$ und zeigen, dass sie eine Nullumgebungsbasis für $\mathcal{T}$ sind.

Da jedes p_n stetig auf E ist und die Reihe in (1.24) gleichmäßig auf $E \times E$ konvergiert, ist d stetig auf $E \times E$ und die B_r sind offen.
Nun sei U eine Nullumgebung bezüglich $\mathcal{T}$. Dann existieren $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $U(p_1, n) \cap \dots \cap U(p_m, n) \subset U$. Setze nun $\delta := \frac{1}{n}$ und $r := \frac{1}{2^n}\delta$. Ist $x \in B_r$, so folgt für $k = 1, \dots, m$: $\frac{1}{2^k} p_k(x) < \frac{1}{2^k}\delta$. Dies impliziert $p_k(x) < \delta = \frac{1}{n}$, also gilt $x \in U(p_k, n)$ für $k = 1, \dots, m$. Somit ist $x \in U$ und $B_r \subset U$.

Bemerkung: Die B_r müssen im Allgemeinen nicht konvex sein.

. . . .

Jetzt untersuchen wir die Stetigkeit von linearen Abbildungen zwischen lokalkonvexen Räumen.

Satz 1.5.7. Es seien E, F lokalkonvexe topologische Vektorräume, deren Topologie von Halbnormenfamilien $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ erzeugt werden. Weiter sei $T : E \to F$ eine lineare Abbildung. Dann sind äquivalent:

a) T ist stetig.

b) Zu jedem $q \in \mathcal{Q}$ existieren $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}$ und eine Konstante $M < \infty$ mit der Eigenschaft

$$q(Tx) \le M \cdot \max_{k=1,\dots,m} p_k(x) \; \forall x \in E. \tag{1.25}$$

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Es sei T stetig und $q \in \mathcal{Q}$. Dann ist $U(q, 1)$ eine Nullumgebung in F. Also gibt es wegen der Stetigkeit von T eine Nullumgebung U in E mit $T(U) \subset U(q, 1)$.
Nun existieren $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $U(p_1, n) \cap \dots \cap U(p_m, n) \subset U$. Setze nun $p(x) := \max_{k=1,\dots,m} p_k(x)$ für $x \in E$. Dann gilt $q(Tx) < 1$ für alle $x \in E$ mit $p(x) < \frac{1}{n}$.
Nun sei $x \in E$. Ist $p(x) = 0$, so ist $tx \in V$ für alle $t > 0$ und daher $tq(Tx) = q(T(tx)) < 1$ für alle $t > 0$. Somit ist $q(Tx) = 0$ und hier folgt die Behauptung.
Jetzt sei $p(x) > 0$. Dann ist

$$p\left(\frac{1}{2np(x)} x\right) = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$$

und somit $q(Tx) < 2np(x)$. Nun folgt die Behauptung mit $M = 2n$.
b) $\Rightarrow$ a):
Es sei V eine Nullumgebung in F. Dann existieren $q_1, \dots, q_l \in \mathcal{Q}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $W := U(q_1, n) \cap \dots \cap U(q_l, n) \subset V$. Nun existieren Konstanten $M \in \mathbb{N}$ und endliche viele $p_1, \dots, p_m \in \mathcal{P}$ mit $q(Tx) \le M \cdot \max_{k=1,\dots,m} p_k(x)$ für $x \in E$. Setzen wir $U := U(p_1, M, n) \cap \dots \cap U(p_m, M_n)$, so ist U eine Nullumgebung mit $T(U) \subset V$ und dies ist gerade die Stetigkeit von T. ∎

. . . .

Folgerung 1.5.8. Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $\phi \in E^*$. Dann sind äquivalent:

a) $\phi \in E'$

b) Es existieren $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}$ und $M < \infty$ mit $|\phi(x)| \leq M \cdot \max_{k=1,\ldots,m} p_k(x)$ für $x \in E$.

c) Es existiert eine Nullumgebung U in E mit $\sup_{x \in U} |\phi(x)| < \infty$.

Beweis. Folgt sofort aus Satz 1.5.7. ∎

Folgerung 1.5.9. Es seien E, F normierte Räume und $T : E \to F$ linear. Dann sind äquivalent:

a) T ist stetig.

b) Es existiert ein $M < \infty$ mit $||Tx||_F \leq M\, ||x||_E$ für alle $x \in E$.

Definition 1.5.10. Es seien E, F normierte Räume und $T \in L(E, F)$. Dann heißt

$$||T|| := \inf_{M>0} \{||Tx||_F \leq M\, ||x||_E\} \tag{1.26}$$

die **Operatornorm** von T. Gilt $||Tx||_F = ||x||_E$, so heißt T eine **Isometrie**. Dann ist insbesondere T injektiv und $||T|| = 1$.

Satz 1.5.11. Es seien E, F normierte Räume und $T \in L(E, F)$. Dann gilt:

a) $||T|| = \sup_{||x|| \leq 1} ||Tx|| = \sup_{||x||=1} ||T||\, x$.

b) $||Tx|| \leq ||T||\, ||x||$ für alle $x \in E$.

Beweis. Teil b) folgt sofort aus Teil a).
Zum Beweis von b) sei $M \in (0, \infty)$ mit $||Tx|| \leq M\, ||x||$ für alle $x \in E$. Dann gilt für alle $x \in E$:

$$\sup_{||x||\leq 1} ||Tx|| \leq M \Rightarrow \sup_{||x||\leq 1} ||Tx|| \leq ||T||\,.$$

Für $x \in E$ mit $x \neq 0$ ist $y = \frac{1}{||x||}x \in E$ mit $||y|| = 1$. Damit folgt nun:

$$||Tx|| = ||Ty||\,||x|| \leq \sup_{||z||=1} ||Tz|| \cdot ||x|| \Rightarrow ||T|| \leq \sup_{||z||=1} ||Tz|| \leq \sup_{||x||\leq 1} ||Tx|| \leq ||T||\,.$$

Damit folgt a). ■

. . . .

Satz 1.5.12. Es seien E, F normierte Räume. Dann ist $L(E, F)$ mit der Operatornorm ein normierter Raum. Ist F ein Banachraum, so auch $L(E, F)$. Insbesondere ist E' vollständig.

Beweis. Dass $L(E, F)$ ein normierter Raum ist, ist klar.
Es sei nun F ein Banachraum und (T_n) eine Cauchyfolge in $L(E, F)$. Wegen $||T_m x - T_n x|| \leq ||T_m - T_n||\,||x||$ ist $(T_n x)$ eine Cauchyfolge in F für jedes $x \in E$.
Da F vollständig ist, existiert der Grenzwert $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ für jedes $x \in E$ und offensichtlich ist T linear.
Es sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $||T_m - T_n|| < \varepsilon$ für alle $n, m > N$. Somit folgt $||T_m - T_n x|| \leq \varepsilon\,||x||$ für alle $n, m \geq N$ und $x \in E$.
Grenzübergang $M \to \infty$ liefert $||T_n x - Tx|| \leq \varepsilon\,||x||$. (∗)
Somit folgt $||Tx|| \leq (||T_N|| + \varepsilon)\,||x||$ für alle $x \in E$. T ist stetig, also gilt $T \in L(E, F)$ und $T_n \to T$ für $n \to \infty$ wegen

$$||T_n - T|| = \sup_{||x||\leq 1} ||T_n x - Tx|| \overset{(*)}{\leq} \varepsilon \text{ für } n \geq N.$$

Damit folgt die Behauptung. ■

. . . .

Definition 1.5.13. Es sei E ein normierter Raum. Dann heißt $E'' = (E')'$ der **Bidualraum** von E. Nach vorigem Satz ist E'' ein Banachraum.
Für $x \in E$ definieren wir $J_x : E' \to \mathbb{K}$ durch $J_x(\phi) := \phi(x)$. Dann ist J_x ein lineares Funktional auf E' und wegen $|J_x\phi| = |\phi(x)| \leq ||\phi||\,||x||$ für $\phi \in E'$ ist J_x stetig, also $J_x \in E''$. Weiter gilt $||J_x|| = \sup\limits_{||x||\leq 1} |\phi(x)| \leq ||x||$, d.h. $||J_x|| \leq ||x||$.

. . . .

Wir werden später mit dem Satz von Hahn-Banach zeigen, dass $||Jx|| = ||x||$ gilt. Damit ist $J = J_E : E \to E''$, $x \mapsto Jx$, eine Einbettung von E in E''. In diesem Sinne schreibt man $E \subset E''$.

1.6 Quotientenräume

Es sei E ein Vektorraum und N ein Unterraum von E. Zu $x \in E$ betrachten wir die sogenannte **Komenge** $\pi(x) := x + N$ und

$$E/N := \{\pi(x) \colon x \in E\}. \tag{1.27}$$

In E/N definieren wir eine Addition und eine Skalarmultiplikation durch $\pi(x) + \pi(y) := \pi(x+y)$ und $\alpha\pi(x) := \pi(\alpha x)$ für $x, y \in E$ und $\alpha \in \mathbb{K}$.
Da N ein Vektorraum ist, sind diese Operationen wohldefiniert:
Sind $\pi(x) = \pi(x')$ und $\pi(y) = \pi(y')$, d.h. $x - x' \in N$ und $y - y' \in N$ so ist $\pi(x) + \pi(y) = \pi(x') + \pi(y')$. Analog zeigt man, dass die Skalarmultiplikation auch wohldefiniert ist.
Damit ist E/N ein Vektorraum. Nullvektor in E/N ist $\pi(0) = N$. E/N heißt dann **Quotientenraum von E modulo N**.
Weiter ist die Abbildung $\pi : E \to E/N$ definiert durch $\pi(x) = x + N$ linear und surjektiv mit $N(\pi) = N$. π heißt **Quotientenabbildung** oder **kanonischer Epimorphismus**.

Nun sei $\mathcal{T}$ eine Vektorraumtopologie auf E und N ein *abgeschlossener* Unterraum von E. Wir setzen

$$\mathcal{T}_N := \left\{M \subset E/N \colon \pi^{-1}(M) \subset \mathcal{T}\right\}. \tag{1.28}$$

Dann verifiziert man leicht, dass $\mathcal{T}_N$ eine Topologie auf E/N ist, sie heißt die **Quotiententopologie auf E/N**.

Satz 1.6.1. Es sei E ein topologischer Vektorraum, N ein abgeschlossener Unterraum, $\mathcal{T}$ die Topologie von E und $\mathcal{T}_N$ die Quotiententopologie auf E/N. Dann gelten:

a) i.) $\mathcal{T}_N$ ist eine Vektorraumtopologie auf E/N.
   ii.) $\pi \colon E \to E/N$ ist linear, stetig und offen.
   iii.) $\mathcal{T}_N$ ist die stärkste Topologie, sodass π stetig ist.
   iv.) $\mathcal{T}_N$ ist die schwächste Topologie, so dass π offen ist. Genauer bedeuten iii.) und iv.): Sind $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}''$ Topologien auf E/N und ist π stetig bezüglich $\mathcal{T}'$ und offen bezüglich $\mathcal{T}''$, so gilt: $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}_N \subset \mathcal{T}''$.

b) Ist B eine Nullumgebungsbasis von E, so ist $\mathcal{B}_N := \{\pi(U) \colon U \in \mathcal{B}\}$ eine Nullumgebungsbasis von E/N.

c) Ist E lokalkonvex / lokal beschränkt, so auch E/N.

d) Ist E ein metrischer Vektorraum mit Metrik d, so wird auch die Topologie auf E/N durch eine Metrik ρ erzeugt. Ist d vollständig, so auch ρ.

e) Ist E ein normierter Raum, so wird auch die Topologie von E/N durch eine Norm erzeugt.

f) Ist E ein Fréchetraum / Banachraum, so auch E/N.

Beweis.

a) ii.) Sind $U_1, \dots, U_n \in E/N$ und $V_\alpha \in E/N$ für $\alpha \in A$, so gilt $\pi^{-1}(U_1 \cap \ldots \cap U_n) = \pi^{-1}(U_1) \cap \ldots \cap \pi^{-1}(U_n)$ und $\pi^{-1}\left(\bigcup\limits_{\alpha \in A} V_\alpha\right) = \bigcup\limits_{\alpha \in A} \pi^{-1}(V_\alpha)$.

Die Stetigkeit von π folgt sofort aus der Definition.
Ist nun $U \in \mathcal{T}$, so ist $\pi(U) \in \mathcal{T}_N$, denn $\pi^{-1}(\pi(U)) = N + U \in \mathcal{T}$. Somit ist π offen und es folgt ii.).

i.) Es sei nun $\pi(x) \in {}^{E}/_{N}$ und $\pi(x) \neq 0$. Dann ist $x \notin N$, $\{x\}$ kompakt und da N abgeschlossen ist, existiert nach Lemma 1.2.9 eine Nullumgebung U in E mit $(x+N)\cap(N+U) = \emptyset$. Wir wählen eine symmetrische Nullumgebung V mit $V+V \subset U$ und setzen $U_1 := \pi(x+V)$, $U_2 := \pi(V)$.
Da π offen ist, ist U_1 eine Umgebung von $\pi(x)$ und U_2 Nullumgebung in ${}^{E}/_{N}$. Wir zeigen nun: $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.
Andernfalls gäbe es $y \in \pi^{-1}(U_1 \cap U_2) = (x + N + V) \cap (N + V)$. Dann wäre $y = x + n_1 + v_1 = n_2 + v_2$ mit $n_1, n_2 \in N$ und $v_1, v_2 \in V$. Dies lässt sich zu $x = n_2 - n_1 + v_2 - v_1 \in N + V + V \subset N + U$ umstellen, was ein Widerspruch ist. Somit ist ${}^{E}/_{N}$ ein Hausdorffraum.
Sei nun V eine Nullumgebung in ${}^{E}/_{N}$. Dann ist $\pi^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in E und daher existiert eine Nullumgebung U in E mit $U+U \subset \pi^{-1}(V)$. Daher ist $\pi(U)$ eine Nullumgebung in ${}^{E}/_{N}$ mit $\pi(U) + \pi(U) \subset V$ und somit ist die Addition stetig.
Die Stetigkeit der Skalarmultiplikation zeigt man ähnlich.
Damit folgt i.).

iii.) Folgt sofort.

iv.) Folgt ebenfalls direkt.

b) Dies folgt sofort aus a), da π stetig und offen ist.

c) Lokalkonvexität:
Da lineare Abbildungen konvexe Mengen in konvexe Mengen abbilden, folgt die Lokalkonvexität von ${}^{E}/_{N}$ aus b).
Lokale Beschränktheit:
Es sei U eine beschränkte Nullumgebung in E. Dann ist nach Satz 1.4.5 auch $\pi(U)$ eine beschränkte Nullumgebung in ${}^{E}/_{N}$.

d) Wir setzen $\rho(\pi(x), \pi(y)) := \inf\limits_{z \in N} d(x-y, z)$ für $\pi(x), \pi(y) \in {}^{E}/_{N}$. Dann ist ρ eine invariante Metrik auf ${}^{E}/_{N}$:
(M2) und (M3) sind klar. Zum Beweis von (M1) sei $\rho(\pi(x), \pi(y)) = 0$. Dann existiert eine Folge (z_n) in N mit $z_n \to x - y$ $(n \to \infty)$. Da N abgeschlossen ist, folgt $x - y \in N$. Somit ist $\pi(x) = \pi(y)$ und somit folgt (M1).
Wegen $\pi(\{x \in E\colon d(x,0) < r\}) = \{u \in {}^{E}/_{N}\colon \rho(u,0) < r\}$ folgt aus b), dass ρ die Topologie $\mathcal{T}_N$ induziert.
Nun sei d vollständig und (u_n) eine Cauchyfolge in ${}^{E}/_{N}$. Dann existiert eine Teilfolge (u_{n_k}) von (u_n) mit $\rho(u_{n_{k+1}}, u_{n_k}) < 2^{-k}$.
Wir wählen $\varepsilon_k > 0$ mit $\rho(u_{n_{k+1}}, u_{n_k}) + \varepsilon_k < 2^{-k}$ und $x_k \in E$ mit $\pi(x_k) = u_{n_k}$. Nun modifizieren wir die x_k, sodass (x_k) eine Cauchyfolge in E ist. Dazu gehen wir induktiv vor:

Wir wählen $y_1 \in N$ mit $d(x_1, y_1) < \rho(u_{n_1}, 0) + \varepsilon_1$ und setzen $z_1 := x_1 + y_1$. Nun seien $z_1, \dots, z_k$ gefunden. Wir wählen nun $\hat{y}_{k+1} \in N$ mit $d(x_k - x_{k+1}, \hat{y}_{k+1}) < d(u_{n_k}, u_{n_{k+1}}) + \varepsilon_k < 2^{-k}$. Ferner setzen wir $y_{k+1} := y_k + \hat{y}_{k+1}$ und $z_{k+1} := x_{k+1} + y_{k+1}$.
Aus der Invarianz von d folgt nun

$$d(z_k, z_{k+1}) = d(x_k + y_k, x_{k+1} + y_{k+1}) = d(x_k - x_{k-1}, \hat{y}_{k+1}) < 2^{-k}.$$

Somit ist (z_k) eine Cauchyfolge in E mit $\pi(z_k) = u_{n_k}$.

Da d vollständig ist, konvergiert (z_k) gegen ein $z \in E$. Die Stetigkeit von π impliziert nun die Konvergenz von (u_{n_k}) gegen $\pi(z)$ in ${}^{E}/_{N}$. Somit ist ρ vollständig.

e) Wir setzen $||\pi(x)|| := \inf_{z \in N} ||x - z||$ für $\pi(x) \in {}^{E}/_{N}$. Dann zeigt man wie oben, dass dadurch eine Norm auf ${}^{E}/_{N}$ definiert wird, die die Topologie $\mathcal{T}_N$ induziert.

f) Fréchetraum: Folgt aus c) und d).
Banachraum: Die Vollständigkeit zeigt man wie in d).

■

. . . .

Wir behandeln jetzt zwei kleine Anwendungen.

Satz 1.6.2. Es sei E ein topologischer Vektorraum, N ein abgeschlossener Vektorraum und F ein Unterraum endlicher Dimension. Dann ist $N + F$ abgeschlossen.

Beweis. Wir betrachten ${}^{E}/_{N}$ und $\pi : E \to {}^{E}/_{N}$. Dann ist $\pi(F)$ ein endlichdimensionaler Unterraum von ${}^{E}/_{N}$ und somit abgeschlossen nach Satz 1.3.2. Da $N + F = \pi^{-1}(\pi(F))$ und π stetig ist, folgt die Behauptung. ■

. . . .

Bemerkung 1.6.3. Es sei E ein Vektorraum und p eine Halbnorm auf E mit $N := \{x \in E\colon p(x) = 0\}$. Nach Satz 1.5.2 ist N ein Unterraum von E, daher können wir ${}^{E}/_{N}$ und $\pi\colon E \to {}^{E}/_{N}$ betrachten. Wir setzen $||\pi(x)|| = p(x)$ für $x \in E$. Ist $\pi(x) = \pi(y)$, so ist $p(x - y) = 0$ und wegen $|p(x) - p(y)| \leq p(x - y)$ ist $p(x) = p(y)$, also $||\pi(x)|| = ||\pi(y)||$, d.h. $||\pi(x)||$ ist wohldefiniert auf ${}^{E}/_{N}$. Man zeigt leicht, dass hierdurch eine Norm auf ${}^{E}/_{N}$ definiert wird.
Dies benötigen wir später bei den L^p-Räumen.

. . . .

1.7 Beispiele topologischer Vektorräume

1.7.1 Normierte Räume

Zuerst behandeln wir einige wichtige Banachräume.

Beispiel 1.7.1. Es sei $M \neq \emptyset$ und $\ell^\infty(M)$ die Menge aller beschränkten Funktionen $f : M \to \mathbb{K}$. Mit der üblichen Addition und Multiplikation ist $\ell^\infty(M)$ ein Vektorraum.
Durch

$$||f||_\infty := \sup_{t\in M} |f(t)|\,, \;\; f \in \ell^\infty(M) \tag{1.29}$$

wird eine Norm auf $\ell^\infty(M)$ definiert.
Die Konvergenz bezüglich dieser Norm ist die gleichmäßige Konvergenz auf M. Aus dem Cauchykriterium für gleichmäßige Konvergenz folgt, dass $\ell^\infty(M)$ ein Banachraum ist.
Für $M = \mathbb{N}$ schreiben wir kurz $\ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N})$. Dies ist der Raum aller beschränkten Folgen (x_n) von ℓ^∞ und daher ein Banachraum. Dies gilt ebenfalls für den Raum c_0 aller Nullfolgen.

....

Beispiel 1.7.2. Es sei X ein topologischer Raum und

$$CB(X) := \{f : X \to \mathbb{K}\colon f \text{ ist stetig auf } X \text{ und beschränkt}\}\,. \tag{1.30}$$

Dies ist ein abgeschlossener Unterraum von $\ell\infty(X)$ (unter der gleichen Norm) und daher ein Banachraum. Weiter sei nun X lokalkompakt und

$$C_0(X) := \{f : X \to \mathbb{K}\colon f \text{ ist stetig } \underline{\text{und}} \;\forall \varepsilon > 0 \;\exists K \subset X \text{ kompakt}\colon\; |f(x)| < \varepsilon \;\forall x \in X \setminus K\}\,. \tag{1.31}$$

Speziell ist $C_0(\mathbb{R}) = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}\colon f \text{ ist stetig } \underline{\text{und}} \lim\limits_{|t|\to\infty} f(t) = 0\right\}$. Dies ist ein abgeschlossener Unterraum von $CB(X)$ und daher ein Banachraum.
Ist X kompakt, so gilt $C(X) := \{f : X \to \mathbb{K}\colon f \text{ ist stetig}\} = CB(X)$.

....

Beispiel 1.7.3. Für $N \in \mathbb{N}$ heißt $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_N] \in \mathbb{N}_0^N$ ein **Multiindex**. Jedem Multiindex ordnen wir einen Differentialoperator zu:

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_N}}{\partial x_N^{\alpha_N}}. \tag{1.32}$$

Die **Ordnung** von D^α ist $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_N$.
Nun sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$C^n(\overline{\Omega}) := \{f : \Omega \to \mathbb{K}\colon \forall \text{MIs } \alpha, |\alpha| \leq n \;\exists D^\alpha \text{ auf } \Omega \;\underline{\text{und}}\; D^\alpha f \text{ ist glm. stetig auf } \Omega\}\,. \tag{1.33}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $D^\alpha f$ kann man $D^\alpha f$ zu einer stetigen Funktion auf $\overline{\Omega}$ fortsetzen (und zwar eindeutig). Diese Fortsetzung nennen wir wieder $D^\alpha f$.

Setzt man

$$||f|| = \max_{|\alpha|\leq n} \sup_{t\in\Omega} |D^\alpha f(t)|\,, \tag{1.34}$$

so wird hierdurch eine Norm auf $C^n(\overline{\Omega})$ definiert, die die gleichmäßige Konvergenz aller Ableitungen beschreibt.
Ist (f_k) eine Cauchyfolge in $C^n(\overline{\Omega})$, so folgt, dass $(D^\alpha f_k)$ eine Cauchyfolge in $C^\mu(\overline{\Omega})$ mit $\mu = n - |\alpha|$ ist und daher konvergent gegen eine Funktion g_α nach dem Cauchykriterium für gleichmäßige Konvergenz. Insbesondere konvergiert (f_k) gegen eine Funktion g_0. Nach Sätzen der Analysis ist $g_0 \in C^n(\overline{\Omega})$ und $D^\alpha g_0 = g_\alpha$. Daher ist $C^n(\overline{\Omega})$ ein Banachraum.

. . . .

Eine weitere wichtige Klasse von Banachräumen sind die L^p-Räume. Dazu sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum mit einem positiven Maß μ, z.B. $X = [0,1]$ oder $X = \mathbb{R}^n$ mit dem Lebesguemaß. Weiter seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, wobei $\frac{1}{\infty} = 0$ sei[6].

Definition 1.7.4. Für $1 \leq p < \infty$ sei

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{K} \colon f \text{ ist messbar } \underline{\text{und}} \ ||f||_p := \left(\int_X |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} < \infty \right\}. \tag{1.35}$$

Für $p = \infty$ sei

$$\mathcal{L}^\infty(\mu) := \left\{ f : X \to \mathbb{K} \colon f \text{ ist messbar } \underline{\text{und}} \ ||f||_\infty := \operatorname*{ess-sup}_{x\in X} |f(x)| \right\}, \tag{1.36}$$

wobei $\operatorname*{ess-sup}_{x\in X} := \inf_{N\in\mathcal{A}\colon \mu(N)=0} \sup_{x\in X\setminus N} |f(x)|$ das **wesentliche Supremum** von f ist.
Speziell: $X = \mathbb{R}^n$, $\mu = \lambda^n$: Dann schreiben wir $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}^p(\mu)$.
Speziell: $X = \mathbb{N}$, μ das Zählmaß: Dann schreiben wir $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}) =: \ell^p$ (Menge aller Folgen (x_n) in $\mathbb{K}$ mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$ für $1 \leq p < \infty$).

. . . .

Satz 1.7.5 (*Hölderungleichung*). Es seien $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und $g \in \mathcal{L}^q(\mu)$. Dann ist $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $||fg||_1 \leq ||f||_p \, ||g||_q$.
[Hier ohne Beweis.[7]]

. . . .

Satz 1.7.6 (*Minkowskiungleichung*). Es seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\mu)$. Dann ist $f + g \in \mathcal{L}^p(\mu)$ und es gilt $||f + g||_p \leq ||f||_p + ||g||_p$.

. . . .

Hieraus folgt jetzt, dass $\mathcal{L}^p(\mu)$ mit den üblichen algebraischen Operationen für Funktionen ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist und dass $||\cdot||_p$ eine Halbnorm ist, denn aus $||f||_p = 0$ folgt nur $f = 0$ fast überall.

[6] Solche Zahlen bezeichnen wir als **konjugiert**. Für diesen Abschnitt seien p, q bei Vorkommen stets konjugiert.

[7] Ein Beweis dieses und auch des nächsten Satzes ist hier (bzw. im nächsten Teil der Videoreihe) zu finden.

Wir betrachten daher $N_p := \left\{ f \in \mathcal{L}^p(\mu) \colon \ ||f||_p = 0 \right\}$ und den Quotientenraum

$$L^p(\mu) := {}^{\mathcal{L}^p(\mu)}/_{N_p}. \tag{1.37}$$

Nach Bemerkung 1.6.3 ist dann $L^p(\mu)$ ein Banachraum.
Ist $\mu(X) < \infty$, so folgt aus der Hölderungleichung:

$$L^\infty(\mu) \subset L^r(\mu) \subset L^p(\mu) \text{ für } 1 \leq p \leq r \leq \infty. \tag{1.38}$$

Andererseits gilt $\ell^1 \subset \ell^p \subset \ell^r \subset \ell^\infty$.
Ist zum Beispiel $X = \mathbb{R}$ und μ das Lebesguemaß, so gilt weder $L^p(\mathbb{R}) \subset L^r(\mathbb{R})$ noch $L^r(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$.

Satz 1.7.7. Es sei (f_n) eine Cauchyfolge in $L^p(\mu)$. Dann gibt es ein $f \in L^p(\mu)$ mit $||f_n - f||_p \to 0$ $(n \to \infty)$. Weiterhin existiert eine Teilfolge (f_{n_k}) von (f_n), die fast überall punktweise gegen f konvergiert.
[Hier ohne Beweis.[8]]

. . . .
Die L^p-Räume sind somit vollständig. Obiger Satz wird manchmal auch als *Satz von Fischer-Riesz* bezeichnet.

[8]Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.

1.7.2 Lokalkonvexe topologische Vektorräume

Wir wollen jetzt einige lokalkonvexe topologische Vektorräume konstruieren, die nicht normierbar sind. Die Konstruktion beruht auf einem gemeinsamen Konzept.

Satz 1.7.8. Es sei $(E_n, ||\cdot||_n)$ eine Folge normierter Räume und $E := \prod_{n=1}^{\infty} E_n$. Dann wird durch $d(x,y) := \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, ||x_n - y_n||_n\}$ für $x = (x_n)$, $y = (y_n) \subset E$ eine Metrik definiert. Weiter gelten folgende Aussagen:

a) Eine Folge $(x^{(k)})_k$ ist konvergenz bzw. eine Cauchyfolge genau dann, wenn alle Komponentenfolgen $(x_n^{(k)})_k$ konvergieren bzw. Cauchyfolgen sind.

b) (E, d) ist ein lokalkonvexer metrischer Vektorraum.

c) Sind alle (E_n) Banachräume, so ist E ein Fréchetraum. Ist $E_n \neq \{0\}$ für unendliche viele n, so ist E kein Banachraum, d.h. die Topologie von E wird nicht durch eine Norm induziert.

Beweis.

a) Vgl. Übungsblatt 2, Aufgabe 1.

b) Dies Stetigkeit der Skalarmultiplikation folgt aus a) und die Stetigkeit der Addition folgt aus der Invarianz der Metrik d.
Zum Nachweis der Lokalkonvexität betrachten wir folgendes Argument:
Es sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen $k \in \mathbb{N}$ so, dass $2^{k-1}\varepsilon > 1$. Dann gilt für $x \in E$ mit $||x_n||_n < \frac{\varepsilon}{2}$ für $1 \leq k \leq n$:

$$d(x,0) = \sum_{n=1}^{k} 2^{-n}\frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=k+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit ist die Menge $V := \left\{x \in E\colon\ ||x_n||_n < \frac{\varepsilon}{2} \text{ für } 1 \leq n \leq k\right\} \subset U_\varepsilon(0)$ konvex als Durchschnitt konvexer Mengen und offen, somit also eine konvexe Nullumgebung.
Da ε beliebig war, bilden die V's eine Nullumgebungsbasis.

c) Die erste Aussage folgt aus a) und b).
Zum Beweis der zweiten Aussage nehmen wir an, dass die Topologie von E durch eine Norm $||\cdot||$ induziert wird. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $V \subset U_\varepsilon(0) \subset \{x \in E\colon\ ||x|| \leq 1\}$. Nun finden wir ein $m > k$ (k wie in b)) und $x_m \in E_m$ mit $x_m \neq 0$. Wir setzen jetzt $\xi := (\delta_{nm} x_m)_{n=1}^{\infty} \in E$. Dann ist $\lambda\xi \in V$ für alle $\lambda \geq 0$ und somit $\lambda\,||\xi|| \leq 1$ für alle $\lambda \geq 0$. Dann folgt aber $\xi = 0$, ein Widerspruch zu $x_m \neq 0$.

■

Beispiel 1.7.9. Es sei $\omega := \mathbb{K}^N$ die Menge aller Folgen (x_n) in $\mathbb{K}$. Mit den üblichen algebraischen Operationen für Folgen ist ω ein Vektorraum. Nach Satz 1.7.8 ist ω ein Fréchetraum bezüglich der Metrik $d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, |x_n - y_n|\}$ für $x = (x_n), y = (y_n)$.
Eine Folge in ω ist genau dann konvergent, wenn jede Komponentenfolge konvergiert. Man kann zeigen (→ Übungsblatt 10, Aufgabe 1), dass ω die Heine-Borel-Eigenschaft (HBE) hat, d.h. jede beschränkte und abgeschlossene Teilmenge $K \subset \omega$ ist kompakt.

....

Für die nächsten Beispiele erinnern wir an zwei Konvergenzbegriffe für Funktionenfolgen. Es seien dazu X, Y topologische Räume und (f_n) eine Folge von Funktionen $f_n : X \to Y$.

- (f_n) heißt **lokal gleichmäßig konvergent** gegen eine Grenzfunktion $f : X \to Y$, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung U_x besitzt, so dass (f_n) in U_x gleichmäßig konvergiert.

- (f_n) heißt **kompakt konvergent** gegen f, wenn (f_n) auf jeder kompakten Teilmenge von X konvergiert.

Bemerkung:
Die lokal gleichmäßige Konvergenz impliziert die kompakte Konvergenz. Ist X lokalkompakt, so sind beide Begriffe äquivalent.

Beispiel 1.7.10. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $C(\Omega) := \{f \text{ ist stetig auf } \Omega\}$. Mit den üblichen algebraischen Operationen für Funktionen ist dies ein Vektorraum. Wir wollen jetzt auf $C(\Omega)$ eine Vektorraumtopologie einführen, sodass die Konvergenz in dieser Topologie die kompakte Konvergenz ist.
Dazu wählen wir eine Ausschöpfungsfolge (K_n) kompakter Mengen $K_n \subset \Omega$, d.h. $K_n \subset K_{n+1}^\circ$ und $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} K_n^\circ = \Omega$. Bemerke, dass dies impliziert, dass zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ ein $m \in \mathbb{N}$ existiert mit $K \subset K_n$ für alle $n \geq m$.
Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $||f||_n := \max\limits_{t\in K_n} |f(t)|$ für $f \in C(\Omega)$. Dann ist $(C(K_n), ||\cdot||_n)$ ein Banachraum nach Beispiel 1.7.2 und daher $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C(K_n)$ nach Satz 1.7.8 ein Fréchetraum.
Die Abbildung $\phi : C(\Omega) \to \prod\limits_{n=1}^{\infty} C(K_n)$ mit $\phi(f) := (f\,|_{K_n})_{n=1}^{\infty}$ ist linear und injektiv. Weiter gilt

$$R(\phi) = \left\{ (f_n)_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} C(K_n) \colon f_m\,|_{K_j} = f_j \ \forall m \geq j \ \underline{\text{und}} \ j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Also ist $R(\phi)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C(K_n)$ und daher nach Satz 1.2.11 ein Fréchetraum mit der Metrik $d(f,g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, ||f-g||_n\}$.
Eine Folge (f_n) in $C(\Omega)$ konvergiert genau dann, wenn sie kompakt konvergiert. Man kann zeigen: $C(\Omega)$ hat die (HBE) nicht.
Man kann dieses Beispiel noch verallgemeinern, indem man Ω durch einen beliebigen lokalkompakten topologischen Raum ersetzt. Dann existiert im Allgemeinen keine Ausschöpfungsfolge mehr und man muss daher folgende Familie von Halbnormen verwenden:

$$\mathcal{P} := \{p_k \colon K \subset X \text{ kompakt}\}, \ p_k(f) := \max_{t\in K} |f(t)|. \tag{1.39}$$

Dann erhält man einen lokalkonvexen topologischen Vektorraum, der aber im Allgemeinen nicht metrisierbar ist.

....

Beispiel 1.7.11. Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ und $H(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{C} \colon f \text{ ist holomorph in } \Omega\}$. Nach dem Satz von Weierstraß ist $H(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $C(\Omega)$ und daher ein Fréchetraum. Der kleine Satz von Montel impliziert nun, dass $H(\Omega)$ die (HBE) hat.

....

Beispiel 1.7.12. Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir setzen

$$C^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R} \colon D^\alpha \text{ existiert für alle Multiindizes } \alpha\}. \tag{1.40}$$

Wir wollen auf $C^\infty(\Omega)$ nun eine „sinnvolle" Topologie einführen. Die Teilraumtopologie von $C(\Omega)$ ist nicht nützlich.
Wir wählen wieder eine Ausschöpfungsfolge (K_n) kompakter Mengen und setzen noch $\Omega_n := K_n^\circ$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$||f||_n := \max_{|\alpha| \leq n} \sup_{t \in \Omega_n} |D^\alpha f(t)|\,, \ f \in C^\infty(\Omega). \tag{1.41}$$

Dann ist $(C^n(\overline{\Omega}), ||\cdot||_n)$ ein Banachraum nach Beispiel 1.7.3 und daher ist $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C^n(\overline{\Omega_n})$ ein Fréchetraum.
Die Abbildung $\phi : C^\infty(\Omega) \to \prod\limits_{n=1}^{\infty} C^n(\overline{\Omega_n})$ mit $\phi(f) := (f\,|_{\Omega_n})_{n=1}^\infty$ linear und injektiv und es gilt

$$R(\phi) = \left\{ (f_n)_{n=1}^\infty \in \prod_{n=1}^{\infty} C^n(\overline{\Omega_n}) \colon f_m\,|_{\Omega_j} = f_j \ \forall m \geq j \ \underline{\text{und}} \ j \in \mathbb{N} \right\}.$$

Hieraus folgt, dass $R(\phi)$ ein abgeschlossener Unterraum von $\prod\limits_{n=1}^{\infty} C^n(\overline{\Omega_n})$ ist und daher ein Fréchetraum mit der Metrik $d(f,g) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \min\{1, ||f-g||_n\}$. Den Vektorraum $C^\infty(\Omega)$ mit dieser lokalkonvexen Topologie bezeichnet man auch mit $\mathcal{E}(\Omega)$. Man kann zeigen, dass $C^\infty(\Omega)$ die (HBE) <u>nicht</u> hat.

. . . .

Beispiel 1.7.13. Es sei $K \subset \mathbb{R}^N$ kompakt und $\mathcal{D}_k := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \colon \operatorname{supp}(f) \subset K\}$. Es ist $\mathcal{D}_k$ ein Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R}^N)$.
Zu $t \in \mathbb{R}^n$ definiere $\Phi_t : C^\infty(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ durch $\Phi_t(f) := f(t)$. Dann ist Φ_t stetig und

$$\mathcal{D}_k = \bigcap_{t \in \mathbb{R}^N \setminus K} N(\phi_t). \tag{1.42}$$

Beachte, dass diese Menge abgeschlossen ist, da die enthaltenen Kerne alle abgeschlossen sind. Daher ist $\mathcal{D}_k$ ein abgeschlossener Unterraum von $C^\infty(\mathbb{R}^N)$, also auch ein Fréchetraum.

. . . .

2 Die grundlegenden Prinzipien der Funktionalanalysis und Anwendungen

2.1 Das Bairesche Kategorieprinzip

2.1.1 Der Satz von Baire

Definition 2.1.1. Es sei X ein topologischer Raum. Eine Menge $E \subset X$ heißt **nirgends dicht**, wenn $\overline{E}^{\circ} = \emptyset$ gilt. E heißt **mager** oder **von erster Kategorie**, wenn E als abzählbare Vereinigung nirgends dichter Mengen geschrieben werden kann. Andernfalls heißt E **von zweiter Kategorie**. X heißt **Baireraum**, wenn der Durchschnitt von abzählbar vielen dichten offenen Mengen wieder dicht in X ist.

....

Bemerkung:

- $\mathbb{Q}$ ist mager.
- Die Kategorie von $\mathbb{R}$ werden wir später einsehen.
- Folgende Tatsachen sind offensichtlich und werden häufig benutzt:
  - Ist $A \subset B$ und B mager, so ist auch A mager.
  - Jede abzählbare Vereinigung von mageren Mengen ist mager.
  - Jede abgeschlossene Menge E mit $E^{\circ} = \emptyset$ ist nirgends dicht.
  - Ist h ein Homöomorphismus von X auf X, so sind E und $h(E)$ von gleicher Kategorie.

Satz 2.1.2. [*Bairescher Kategoriensatz*] Es sei X ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist X ein Baireraum.

Beweis. Es sei (U_n) eine Folge dichter offener Mengen in X. Weiter sei B_0 eine beliebige offene Menge in X. Da $B_0 \cap U_1 \neq \emptyset$, da U_1 dicht ist, und zudem offen ist, existiert eine offene Menge $\emptyset \neq B_1 \subset X$ mit $\overline{B_1} \subset B_0 \cap U_1$.
Da $B_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ und zudem offen ist, existiert eine offene Menge $\emptyset \neq B_2 \subset X$ mit $\overline{B_2} \subset B_1 \cap U_2$. So fährt man induktiv fort und erhält eine Folge offener Mengen $B_n \neq \emptyset$ mit $\overline{B_n} \subset B_{n-1} \cap U_n$ für $n \in \mathbb{N}$.
Man kann B_n als Kugeln vom Radius $r < \frac{1}{n}$ wählen, da X ein metrischer Raum ist.
Wir setzen nun $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{B_n}$. Die Mittelpunkte dieser Kugeln bilden eine Cauchyfolge[9], konvergieren also nach Voraussetzung, da X vollständig ist. Somit existiert ein $a \in K$ als Grenzwert all dieser Mittelpunkte und folglich ist $K \neq \emptyset$. Da $K \subset \overline{B_0}$ und $K \subset U_n$ ist, folgt $K \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$.
Folglich ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n \cap \overline{B_0} \neq \emptyset$ und somit ist $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ dicht in X. ∎

....

[9] Was streng genommen noch zu zeigen wäre. Dies kann man ähnlich zum Beweis des Banachschen Fixpunktsatzes zeigen, siehe zum Beispiel [Kaballo, 2011], Satz 4.6.

Satz 2.1.3. Es sei X ein topologischer Raum. Dann sind äquivalent:

a) X ist ein Baireraum.

b) $A^\circ = \emptyset$ für jede magere Menge $A \subset X$.

c) Jede nichtleere Menge in X ist von zweiter Kategorie.[10]

d) $\overline{X \setminus A} = X$ für jede mager Menge $A \subset X$.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Es ist $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ mit nirgends dichten Mengen A_n. Dann ist $U_n := X \setminus \overline{A_n}$ offen und dicht, da $\overline{U_n} = X \setminus \overline{A}^\circ = X$ gilt.
Nach a) folgt $X \overset{\text{Vor.}}{=} \overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n} = \overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X \setminus \overline{A_n}} = \overline{X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n}} = X \setminus \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A_n} \right)^\circ$. SOmit folgt $A^\circ = \emptyset$ und da A ein Baireraum ist, folgt die Behauptung.
b) $\Rightarrow$ c):
Offensichtlich.
c) $\Rightarrow$ d):
Angenommen, es existiert ein $A \subset X$, welches mager ist und $\overline{X \setminus A} \subsetneq X$ erfüllt. Dann ist $X \setminus A^\circ \subsetneq X$ und somit $A^\circ \neq \emptyset$. Nun ist $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ mit A_n nirgends dicht, also ist $A_n \cap A^\circ$ nirgends dicht und es gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap A^\circ) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cap A^\circ = A \cap A^\circ.$$

Somit ist A° mager, was ein Widerspruch ist.
d) $\Rightarrow$ a):
Es seien $U_n \subset X$ offen und dicht in X. Wir setzen $A_n := X \setminus U_n$. Dann ist A_n abgeschlossen und es gilt $A_n^\circ = X \setminus \overline{U_n} = \emptyset$. Somit ist A_n nirgends dicht und es gilt $\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n} = \overline{\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X \setminus A_n} = \overline{X \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n} = X$ und somit folgt die Behauptung. ■

....

Folgerung 2.1.4. Es sei X ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist jede offene Menge $U \subset X$ von zweiter Kategorie.

....

Beispiel:
$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist mager, $\mathbb{R}$ und damit auch die irrationalen Zahlen sind von zweiter Kategorie.

[10] Diese Aussage wird auch häufig als Bairescher Kategoriensatz formuliert.

2.1.2 Unstetigkeitsstellen reeller Funktionen

Aus Analysis I ist bekannt: Es existiert eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, die in allen irrationalen Stellen stetig und in allen rationalen Stellen unstetig ist.
Frage: Geht dies auch umgekehrt bzw. kann man die Unstetigkeitsstellen vorschreiben.

Satz 2.1.5. Es sei X ein topologischer Raum, $D \subset X$ dicht in X und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig auf D. Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstellen mager. Insbesondere ist die Menge der Stetigkeitsstellen von f von zweiter Kategorie, wenn X ein Baireraum ist.

Beweis.

1. Zu jedem $x \in D$ und jedem $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Umgebung $U_{n,x} \in \mathcal{U}(x)$ mit $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{n}$ für alle $y \in U_{n,x}$. Wir setzen nun $U_n := \bigcup\limits_{x \in X} U_{n,x}$. Dann ist U_n offen, also $X \setminus U_n$ abgeschlossen, und $(X \setminus U_n)^\circ = X \setminus \overline{U_n} \subset X \setminus \overline{D} = \emptyset$, da D dircht in X ist. Somit ist $X \setminus U_n$ nirgends dicht, also ist $M := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X \setminus U_n$ mager.

2. Wir zeigen jetzt, dass alle Unstetigkeitsstellen von f in M liegen. Sei also f unstetig in $x_0 \in X$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ und in jeder Umgebung U von x_0 ein $x \in U$ mit $|f(x) - f(x_0)| \geq \frac{1}{n}$.
Angenommen, es gilt $x_0 \in U_{2n}$. Dann existiert ein $x' \in D$ mit $x_0 \in U_{2n,x'}$. Wir wählen ein $x \in U_{2n,x'}$ mit obiger Eigenschaft. Dann ist

$$\frac{1}{n} \leq |f(x) - f(x_0)| \leq \left|f(x) - f(x')\right| + \left|f(x') - f(x_0)\right| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n}. \lightning$$

∎

Folgerung 2.1.6. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{Q}$. Dann existiert mindestens eine irrationale Zahl x_0, in der f ebenfalls stetig ist.

2.1.3 Folgen stetiger Funktionen

Ist (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die auf X gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist f stetig auf X.
Kann man Aussagen über f treffen, wenn (f_n) nur punktweise konvergiert?

Satz 2.1.7 (*Baire*). Es sei X ein topologischer Raum und (f_n) eine Folge stetiger Funktionen $f_n : X \to \mathbb{R}$, die punktweise auf X gegen eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ konvergiert, d.h. $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in X$.
Dann ist die Menge der Unstetigkeitsstellen von f mager. Insbesondere ist die Menge der Stetigkeitsstellen von f dicht, wenn X ein Baireraum ist.

Beweis.

1. Für $m \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ setzen wir $A_m(\varepsilon) := \{x \in X\colon |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon\}$, $G(\varepsilon) := \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m^\circ(\varepsilon)$ und $D := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{1}{n}\right)$, d.h. D ist die Menge aller $x_0 \in X$ mit der Eigenschaft, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Umgebung U von x_0 gibt mit

$$|f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{n} \ \forall x \in U. \tag{$*$}$$

2. Wir zeigen nun, dass D die Menge der Stetigkeitsstellen von f ist. Dazu sei $x_0 \in D$ und $\varepsilon > 0$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{3}$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und eine Umgebung U von x_0, sodass $(*)$ gilt. Da f_m stetig in x_0 ist, gibt es eine Umgebung V von x_0 mit $|f_m(x_0) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für $x \in V$. Dann folgt für $x \in U \cap V$:

$$|f(x_0) - f(x)| \le |f(x_0) - f_m(x_0)| + |f_m(x_0) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

   Somit ist f stetig in x_0.

3. Es sei nun umgekehrt f stetig in x_0 und $n \in \mathbb{N}$. Wegen der Konvergenz von $(f_k(x_0))$ existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|f(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{1}{3n}$. Da f_m und f stetig in x_0 sind, gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $|f(x_0) - f(x)| < \frac{1}{3n}$ und $|f_m(x_0) - f_m(x)| < \frac{1}{3n}$ für alle $x \in U$. Mit der Dreiecksungleichung erhalten wir aus den letzten drei Ungleichungen die Ungleichung $(*)$ und damit $x_0 \in D$.

4. Wir setzen nun noch für $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$B_m(\varepsilon) := \{x \in X\colon |f_m(x) - f_{m+k}(x)| \le \varepsilon \ \forall k \in \mathbb{N}\}.$$

   Dann ist $B_m(\varepsilon)$ abgeschlossen und aus der punktweisen Konvergenz folgt mittels Cauchykriterium

$$X = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m(\varepsilon). \tag{$**$}$$

   Ferner gilt $B_m(\varepsilon) \subset A_m(\varepsilon)$, also $B_m^\circ(\varepsilon) \subset A_m^\circ(\varepsilon)$. Es folgt $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} B_m^\circ(\varepsilon) \subset G(\varepsilon)$. Da $B_m(\varepsilon)$

abgeschlossen ist, ist $B_m(\varepsilon) \setminus B_m^\circ(\varepsilon)$ nirgends dicht. Somit folgt aus (∗∗), dass

$$X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m^\circ(\varepsilon) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(B_m(\varepsilon) \setminus B_m^\circ(\varepsilon)\right)$$

mager ist. Nun gilt $X \setminus D = \bigcup_{n=1}^{\infty} X \setminus G\left(\frac{1}{n}\right) \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(X \setminus \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m^\circ\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Also ist $X \setminus D$ mager, da eine abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder mager ist.

■

2.1.4 Stetige, nirgends differenzierbare Funktionen

Bekanntlich gibt es Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die auf $\mathbb{R}$ stetig, aber in keinem Punkt differenzierbar sind.
Frage: Wie viele solche Funktionen gibt es?

Satz 2.1.8. Es sei M die Menge aller $f \in C[0,1]$, die an mindestens einer Stelle rechtsseitig differenzierbar sind. Dann ist M von erster Kategorie in $C[0,1]$.
[Hier ohne Beweis.[11]]

. . . .

[11] Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.

2.2 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

2.2.1 Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit

Satz 2.2.1 (*Das Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit*).
Es sei E ein Banachraum, F ein normierter Raum, $\Gamma \subset L(E,F)$ und $A \subset E$ von zweiter Kategorie[12] in E mit $\sup\limits_{T\in\Gamma} ||Tx|| < \infty$ für alle $x \in A$, d.h. Γ ist *punktweise* beschränkt.
Dann existiert eine Konstante $M < \infty$ mit $||Tx|| \leq M\,||x||$ für alle $x \in E$ und $T \in \Gamma$, d.h. Γ ist *gleichmäßig* beschränkt. Äquivalent hierzu ist: $||T|| \leq M$ für alle $T \in \Gamma$.

Beweis. Für $t > 0$ sei

$$V_t := \left\{ x \in E\colon \sup_{T\in\Gamma} ||Tx|| \leq t \right\} = \bigcap_{T\in\Gamma} \{x \in E\colon\ ||Tx|| \leq t\}\,.$$

Dann ist V_t abgeschlossen und nach Voraussetzung gilt $\bigcup\limits_{t>0} V_t = E$. Nach dem Baireschen Kategoriensatz existiert nun ein $m > 0$ mit $V_m^\circ \neq \emptyset$.
Wir wählen $\xi \in V_m^\circ$ und $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\xi) \subset V_m^\circ$. Da V_m absolutkonvex ist, gilt $U_\varepsilon(-\xi) = -U_\varepsilon(\xi) \subset -V_m^\circ = V_m^\circ$. Somit folgt

$$U_\varepsilon(0) \subset \frac{1}{2}U_\varepsilon(\xi) + \frac{1}{2}U_\varepsilon(-\xi) \subset \frac{1}{2}V_m + \frac{1}{2}V_m \overset{\text{absolutkonvex}}{=} V_m.$$

Nach Definition von V_m folgt hieraus für $T \subset \Gamma$:

$$||T|| = \frac{1}{\varepsilon} \sup_{||x||<\varepsilon} ||Tx|| \leq \frac{m}{\varepsilon}.$$

Hieraus folgt nun die Behauptung. ■

. . . .

Satz 2.2.2. Es sei E ein normierter Raum und $A \subset E$ mit $\sup\limits_{x\in A} |\phi(x)| < \infty$ für $\phi \in E'$.[13] Dann ist A beschränkt.

Beweis. Es sei $J : E \to E'',\ x \mapsto J_x,\ J_x\phi = \phi(x)$, die kanonische Einbettung und $\Gamma := J(A) \subset E'' = L(E', \mathbb{K})$. Nach Voraussetzung gilt für jedes $\phi \in E'$:

$$\sup_{T\in\Gamma} ||T\phi|| = \sup_{x\in A} |J_x\phi| = \sup_{x\in A} |\phi(x)| < \infty.$$

Satz 2.2.1 impliziert nun

$$\sup_{x\in A} ||x|| = \sup_{x\in A} ||J_x|| = \sup_{T\in\Gamma} ||T|| < \infty$$

und dies ist die Behauptung. ■

. . . .

[12] Existiert, da E ein Banachraum ist.
[13] Solche Mengen A nennt man **schwach beschränkt**.

Bemerkung 2.2.3. Satz 2.2.2 zeigt, dass man die Voraussetzung

$$\sup_{T\in\Gamma} ||Tx|| < \infty,\ \ x \in A,$$

abschwächen kann zu

$$\sup_{T\in\Gamma} |\phi(Tx)| \ \text{ für } x \in A, \phi \in E'. \tag{2.1}$$

. . . .

2.2.2 Folgen stetiger linearer Abbildungen

Satz 2.2.4. Es seien E ein Banachraum, F ein normierter Raum und (T_n) eine Folge in $L(E,F)$, sodass für jedes $x \in E$ der Grenzwert $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ existiert, die Folge also punktweise konvergiert. Dann ist $T : E \to F$ linear und stetig, also $T \in L(E,F)$.

Beweis. Die Linearität von T ist klar.
Wir setzen $\Gamma := \{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(E,F)$. Da konvergente Folgen beschränkt sind. erfüllt Γ die Voraussetzungen von Satz 2.2.1 und wir erhalten

$$||Tx|| = \left|\left|\lim_{n\to\infty} T_n x\right|\right| \overset{||\cdot||\text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty} ||T_n x|| \leq \underbrace{\sup_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||}_{<\infty} \cdot ||x|| \,.$$

Damit folgt die Behauptung. ■

....

Satz 2.2.5. Es seien E ein normierter Raum, F ein Banachraum und A eine dichte Teilmenge von E mit folgenden Eigenschaften:

a) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| < \infty$.

b) Für jedes $x \in A$ ist $(T_n x)$ eine Cauchyfolge in F.

Dann existiert der Grenzwert $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ für alle $x \in E$ und es gilt $||T|| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||T_n||$.

Beweis. Wir setzen $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||T_n x||$. Es seien nun $x \in E$ und $\varepsilon > 0$. Da A dicht ist, gibt es $\xi \in A$ mit $||x - \xi|| \leq \frac{\varepsilon}{M}$. Dann gilt für $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} ||T_m x - T_n x|| &\leq ||T_m x - T_m \xi|| + ||T_m \xi - T_n \xi|| + ||T_n \xi - T_n x|| \\ &\leq ||T_m||\,||x - \xi|| + ||T_m \xi - T_n \xi|| + ||T_n||\,||x - \xi|| \\ &\leq 2\varepsilon + \underbrace{||T_m \xi - T_n \xi||}_{\text{Ist Cauchyfolge in } F} \,. \end{aligned}$$

Somit ist $(T_n x)$ eine Cauchyfolge in F und daher konvergent.
Aus a) folgt dann wie im Beweis von Satz 2.2.4 die Behauptung. ■

....

Satz 2.2.6 (*Banach-Steinhaus*). Es seien E, F Banachräume, $(T_n) \subset L(E,F)$ und $A \subset E$ dicht. Außerdem erfülle (T_n) die Eigenschaften

a) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\phi(T_n x)| < \infty$ für alle $\phi \in F'$ und $x \in E$.

b) Für alle $x \in A$ ist $(T_n x)_n$ eine Cauchyfolge.

Dann existiert $Tx := \lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ für alle $x \in E$, $T \in L(E,F)$ und es gilt $||T|| \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| < \infty$.

Beweis. Da F ein Banachraum ist, folgt aus Bemerkung 2.2.3, dass a) durch die Bedingung $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||T_n|| < \infty$ ersetzt werden kann. Jetzt folgt die Behauptung aus Satz 2.2.5. ■

2.2.3 Konvergenz von Quadraturverfahren

Wir wollen $\int\limits_0^1 f(t)\ dt$ berechnen, indem wir geeignet approximieren. Es sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $Q_n f := \sum\limits_{k=0}^{n} a_{n,k} f(t_{n,k})$, wobei $a_{n,k} \in \mathbb{R}$ und $0 \leq t_{n,0} < t_{n,1} < \ldots < t_{n,n} \leq 1$.

Frage: Unter welchen Voraussetzungen konvergiert $(Q_n f)$ gegen $\int\limits_0^1 f(t)\ dt$?

Satz 2.2.7 (*Szegö*). Die Folge $(Q_n f)$ konvergiert gegen $\int\limits_0^1 f(t)\ dt$ genau dann, wenn folgende beide Bedingungen erfüllt sind:

(Q1) $M := \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=0}^{n} |\alpha_{n,k}| < \infty$

(Q2) $Q_n p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^1 p(t)\ dt$ für alle Polynome p auf $[0,1]$

Beweis.

1. $Q_n : C[0,1] \to \mathbb{R}$, $Q_n f := \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} f(t_{n,k})$ ist ein lineares Funktional von $C[0,1]$ nach $\mathbb{R}$. Dies sind beides Banachräume. Es gilt

$$|Q_n f| \leq \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k} \right) \cdot ||f||_\infty .$$

Damit folgt $||Q_n|| \leq \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}$ und Q_n ist stetig, also $Q_n \in L(C[0,1], \mathbb{R})$.
Es sei nun $\hat{f}$ stückweise stetig linear mit $\hat{f}(t_{n,k}) = \operatorname{sgn}(\alpha_{n,k})$. Dann ist $\hat{f}$ linear auf $[t_{n,k-1}, t_{n,k}]$ für alle $k = 1, \ldots, n$ und $\hat{f}$ ist konstant auf $[0, t_{n,0}]$ und $[t_{n,n}, 1]$, also gilt $||f||_\infty = 1$. Somit gilt nun

$$||Q_n|| \geq |Q_n f| = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{n,k},$$

also insgesamt $||Q_n|| = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_{n,k}$.

2. $\Rightarrow$:
Folgt aus Satz 2.2.1.
$\Leftarrow$:
Folgt aus Satz 2.2.5: Die Polynome auf $[0,1]$ liegen dicht in $C[0,1]$. Aus (Q2) und der Banachraumeigenschaft von $C[0,1]$ folgt, dass $(Q_n p)_n$ eine Cauchyfolge ist. (Q1) bedeutet, dass $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||Q_n|| < \infty$.

■

2.2.4 Divergenz von Fourierreihen stetiger Funktionen

Die Fourierreihe einer stetigen Funktion kann an vielen Stellen divergieren. Wir schreiben

$$C_{2\pi} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \colon f \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch und stetig}\}\,. \tag{2.2}$$

Dann ist $(C_{2\pi}, ||\cdot||_\infty)$ ein Banachraum.

Sei nun $f \in C_{2\pi}$ mit

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)]\,, \tag{2.3}$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\ \mathrm{d}t \text{ und } b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\ \mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

Wir definieren nun

$$s_n(t; f) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)] \overset{[...]}{=} \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(s) D_n(s-t)\ \mathrm{d}s, \tag{2.5}$$

wobei $D_n(t) := \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right)}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ der sogenannte **Dirichletkern** ist.
Bemerkung:
(2.5) ist als **Dirichletintegraldarstellung** bekannt, D_n ist selbst wieder periodisch.

Ziel: Es existiert $f \in C_{2\pi}$ mit $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} |s_n(t_j; f)| = \infty$ für alle $t_j \in T$, wobei T eine beliebige abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

. . . .

Jetzt sei $T := \{t_j \colon j \in \mathbb{N}\}$ beliebig in $\mathbb{R}$. Wir setzen

$$\Phi_{n,j} f := S_n(t_j; f)\ \forall f \in C_{2\pi},$$

also $\Phi_{n,j} : C_{2\pi} \to \mathbb{R}$. Dies ist ein lineares Funktional. Es gelten – hier ohne Beweis – folgende Tatsachen:

a) $\Phi_{n,j}$ ist stetig auf $C_{2\pi}$.

b) Es gilt $||\Phi_{n,j}|| = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |D_n(s-t)|\ \mathrm{d}s = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} |D_n(t)|\ \mathrm{d}t$.

Dies folgt aus

Lemma 2.2.8. Es sei $g \in C_{2\pi}$ und $\Phi_g f := \int\limits_0^{2\pi} f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$ für alle $f \in C_{2\pi}$. Dann ist Φ_g stetig auf $C_{2\pi}$ mit $||\Phi_g|| = ||g||_1$.
[Hier ohne Beweis.[14]]

[14] Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.

....

Jetzt rechnet man nach:

$$\begin{aligned}
||\Phi_{n,j}|| &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |D_n(t)| \; \mathrm{d}t \\
&\overset{\sin t\leq t}{\geq} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\left|\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)t\right|}{t} \; \mathrm{d}t \\
&\overset{s=(n+1/2)t}{=} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{(2n+1)\pi} \frac{|\sin s|}{s} \; \mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{\pi}\cdot\sum_{k=1}^{2n-1}\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin s|}{s} \; \mathrm{d}s \\
&\overset{s\leq k\pi}{\geq} \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k\pi}\int\limits_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin s| \; \mathrm{d}s \\
&= \frac{2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{1}{k} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.
\end{aligned}$$

Somit ist $\lambda_n := ||\Phi_{n,j}||$ divergent. $(*)$

Es seien nun $A_j := \left\{ f\in C_{2\pi}\colon s_n(t_j;f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t_j) \right\}$ und

$$A := \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j = \left\{ f\in C_{2\pi}\colon \exists j\in\mathbb{N}\colon s_n(t_j;f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t_j) \right\}.$$

Falls $s_n(t_j;f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t_j)$ gilt, folgt $\Phi_{n,j}(f) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(t_j)$ und $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |\Phi_{n,j}(f)| < \infty$.[15] Wäre A_j nun von zweiter Kategorie in $C_{2\pi}$, so auch A und nach Satz 2.2.1 folgt, dass $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} ||\Phi_{n,j}|| < \infty$ und dies ist ein Widerspruch zu $(*)$. Somit sind A_j und auch A von erster Kategorie.
Nach dem baireschen Satz folgt die Existenz einer Funktion $f\in C_{2\pi}$, deren Fourierentwicklung an t_j für alle j divergent ist.

Bemerkung:

Wir haben hier nur die Existenz einer solchen Funktion bewiesen, es gibt aber auch konkrete Beispiele. Solche Funktionen sind von der Form $f(t) = A(t)\sin(\omega(t)t)$ mit A,ω so, dass gilt:

$A(0) = 0$ und $\omega(t)\to\infty$ $(t\to 0)$.

Dies ist die Aussage eines Satzes von Du Bois-Reymond.

[15] **Noch genau klären, was hier woraus folgt!**

2.3 Der Satz von der offenen Abbildung

Aus Aufgabe 2a) von Blatt 9 wissen wir: Sind E und F topologische Vektorräume und $T : E \to F$ linear, so ist T offen genau dann, wenn für jede Nullumgebung U in E eine Nullumgebung V in F existiert mit $V \subset T(U)$.
Außerdem gilt:
Falls T bijektiv und stetig ist, ist T ein Homöomorphismum genau dann, wenn T offen ist (bzw. T^{-1} stetig).

Satz 2.3.1 (*Satz von der offenen Abbildung*).
Es seien E, F metrische Vektorräume, E sei vollständig, $T \in L(E, F)$ und $T(E)$ sei von zweiter Kategorie in F. Dann ist T offen und surjektiv.

Beweis.

1. Wir zeigen zunächst, dass T offen ist.

   a) Es sei d eine invariante Metrik in E, die die Topologie auf E induziert und $U \subset E$ eine Nullumgebung. Sei ferner $(U_n)_{\subset} E$ eine Folge von Nullumgebungen mit

   $$U_n := \left\{x \in E \colon d(x, 0) < \frac{r}{2^{n+1}}\right\}$$

   und r sei so gewählt, dass $U_0 \subset U$. Dann gilt insbesondere $U_{n+1} \subset U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen jetzt, dass eine Nullumgebung $V \subset F$ existiert mit

   $$V \subset \overline{T(U)} \subset T(U). \tag{$*$}$$

   b) Um die erste Inklusion zu zeigen, betrachten wir $U_2 - U_2 \subset U_1$. Dann folgt

   $$\overline{T(U2)} - \overline{T(U_2)} \subset \overline{T(U_2) - T(U_2)} \subset \overline{T(U_1)}.$$

   Setze nun $V := \overline{T(U2)} - \overline{T(U_2)}$. Dann ist $0 \in V$. Es bleibt noch zu zeigen, dass V Nullumgebung ist.
   U_2 ist eine Nullumgebung, also ist U_2 absorbierend und es gilt

   $$T(E) = T\left(\bigcup_{k=0}^{\infty} kU_2\right) = \bigcup_{k=0}^{\infty} kT(U_2).$$

   Nach Annahme ist $T(E)$ von zweiter Kategorie, also existiert $k \in \mathbb{N}$ mit $kT(U_2)$ von zweiter Kategorie. Außerdem ist die Abbildung $y \mapsto ky$ ein Homöomorphismus und daher ist $T(U_2)$ von zweiter Kategorie. Somit gilt $\left(\overline{T(U_2)}\right)^\circ \neq \emptyset$ und daher erfüllt V wie oben die erste Inklusion in ($*$).

   c) Zum Beweis der zweiten Inklusion in ($*$) sei $y_1 \in \overline{T(U_1)}$. Wie im vorigen Beweisschritt zeigt man, dass auch $\overline{T(U_{n+1})}$ eine Nullumgebung in F enthält. Konstruiere nun induktiv eine Folge (y_n) mit

   $$y_{n+1} - \overline{T(U_{n+1})} \cap T(U_n =\neq \emptyset.$$

   Dann existiert ein $x_n \in U_n$ mit $Tx_n \in y_n - \overline{T(U_{n+1})}$. Wir setzen nun $y_{n+1} := y_n - Tx_n$. Dann ist $y_{n+1} \in \overline{T(U_{n+1})}$. Somit haben wir induktiv eine solche Folge (y_n) in F

konstruiert.
Wegen der Stetigkeit von T gilt nun $y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
Wir setzen nun $z_n := x_1 + \ldots + x_n$. Wegen $d(x_n, 0) < 2^{-n}r$ ist (z_n) eine Cauchyfolge in E und somit konvergent gegen ein $x \in E$. Wegen $d(x, 0) < r$ ist $x \in U$.
Da $Tz_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Tx_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (y_k - y_{k+1}) \overset{\text{Teleskop}}{=} y_1 - y_{n+1}$ gilt, erhalten wir durch Grenzübergang $n \to \infty$:

$$Tx = y_1 \text{ mit } x = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Somit ist $y_1 \in T(U)$ und es folgt die zweite Inklusion.

(2) Aus $(*)$ folgt nun, dass $T(U)$ offen ist. Daher ist $T(E)$ ein offener Unterraum in F. Somit folgt aus einer Übungsaufgabe, dass $T(E) = F$ gelten muss, also ist T surjektiv.

■

Folgerung 2.3.2.

a) Es seien E, F vollständige, metrische Vektorräume und $T \in L(E, F)$ surjektiv. Dann ist T offen.

b) Es seien E, F vollständige, metrische Vektorräume und $T \in L(E, F)$ bijektiv. Dann ist $T^{-1} \in L(E, F)$. Insbesondere ist T ein Homöomorphismus.

c) Es seien E, F vollständige, metrische Vektorräume und $T \in L(E, F)$ injektiv. Dann gilt: $T^{-1} : T(E) \to E$ ist stetig. $\Leftrightarrow$ $T(E)$ ist abgeschlossen in F.

d) Es seien E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$ bijektiv. Dann existierten Konstanten $m, M > 0$ mit

$$m\,||x|| \leq ||Tx|| \leq M\,||x|| \;\; \forall x \in E. \tag{2.6}$$

Beweis.

a) Da F von zweiter Kategorie in sich ist (da F vollständig), folgt die Aussage aus dem Satz von der offenen Abbildung.

b) folgt aus a).

c) Ist $T(E)$ abgeschlossen in F, so ist $T(E)$ vollständig und daher folgt die Stetigkeit von T^{-1} aus b).
Ist umgekehrt T^{-1} stetig, so ist T ein Homöomorphismus von E auf $T(E)$ und damit $T(E)$ vollständig, also auch abgeschlossen, da F vollständig ist.

d) folgt aus Folgerung 1.5.9 und b).

■

Eine Anwendung in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.
Dazu betrachten wir linare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = r(x) \tag{2.7}$$

mit stetigen Koeffizientenfunktionen a_j auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$ für $j = 0, \ldots, n-1$ und r stetig auf $[a, b]$. Sind $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$ gegeben, so besitzt (2.7) genau eine Lösung mit den Anfangswerten $y^{(j)}(a) = \eta_j$ für $j = 0, \ldots, n-1$. Wir zeigen jetzt, dass diese Lösungen stetig von den Anfangswerten abhängen.

Satz 2.3.3. Es sei (r_k) eine Folge in $C[a, b]$, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen r_0 konvergiert. Weiter sei $((\eta_{0,k}, \eta_{1,k}, \ldots, \eta_{n-1,k}))_{k=1}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}^n$, die gegen $(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert. Für $k \in \mathbb{N}$ sei (y_k) die eindeutig bestimmte Lösung von (2.7) mit $y_k^{(j)} = \eta_{j,k}$ für $j = 0, \ldots, n-1$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} y_k^{(j)} = y_0^{(j)} \text{ für } j = 0, \ldots, n-1 \text{ gleichmäßig auf } [a, b].$$

Beweis. Es sei $E := C^n[a, b]$ und $F := C[a, b] \times \mathbb{R}^n$ mit der Norm

$$||(y, x_1, \ldots, x_n)|| := ||y||_\infty + \sum_{k=1}^{n} |x_k| \,.$$

Betrachte die lineare Abbildungen $D : E \to C[a, b]$ mit

$$Dy := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y$$

und $T : E \to F$ mit

$$Ty := \Big(Dy, y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a)\Big) \,.$$

Dann ist das Anfangswertproblem (2.7) äquivalent zur Operatorgleichung

$$Ty = (r, \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}) \,.$$

Aufgrund der eindeutigen Lösbarkeit ist T bijektiv und offenbar stetig. Aus Folgerung 2.3.2 b) erhalten wir, dass auch T^{-1} stetig ist und damit folgt die Behauptung. ■

2.4 Der Satz vom abgeschlossenen Graphen

Definition 2.4.1. Es seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann heißt

$$G_f := \{(x,y) \in X \times Y : y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y \tag{2.8}$$

der **Graph** von f.

. . . .

Jetzt seien X, Y topologische Räume.
Frage: Wenn f stetig ist, ist dann G_f abgeschlossen und gilt eventuell die Umkehrung?

Satz 2.4.2. Es sei X ein topologischer Raum und Y ein Hausdorffraum. Ferner sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist G_f abgeschlossen in $X \times Y$.

Beweis. Es sei $(x,y) \in X \times Y$ und $(x,y) \notin G_f$. Dann ist $y \neq f(x)$. Aus der Hausdorffeigenschaft von Y folgt die Existenz von Umgebungen V von y und W von $f(x)$ mit $V \cap W = \emptyset$. Da f stetig in x ist, existiert eine Umgebung U von x in X mit $f(U) \subset W$, also ist $U \times V$ eine Umgebung von (x,y) mit $(U \times V) \cap G_f = \emptyset$. Somit ist $(X \times Y) \setminus G_f$ offen und G_f somit abgeschlossen. ■

. . . .

Bemerkung:
Die Aussage ist im Allgemeinen falsch, wenn Y kein Hausdorffraum ist. Ein Gegenbeispiel liefert die Abbildung $\mathrm{id} : X \to X$. In diesem Fall ist die Abgeschlossenheit von G_{id} äquivalent zur Hausdorffeigenschaft von Y. Die Umkehrung der Aussage gilt auch nicht, wie die Funktion $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$ zeigt.

Satz 2.4.3 (*Satz vom abgeschlossenen Graphen*).
Es seien E, F vollständige metrische Vektorräume und $T : E \to F$ linear und G_f abgeschlossen. Dann ist $T \in L(E,F)$.

Beweis. Es seien d_E und d_F invariante vollständige Metriken auf E bzw. F. Dann definiert $d : X \times Y \to \mathbb{R}$ mit $d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = d_E(x_1,x_2) + d_F(y_1,y_2)$ eine invariante vollständige Metrik auf $E \times F$.
Da T linear ist, ist G_T ein abgeschlossener Unterraum von $E \times F$ und daher ein vollständiger metrischer Vektorraum. Wir definieren die Projektionen

$$\pi_1 : G_T \to E,\ \pi_1((x,y)) = x \text{ und } \pi_2 : E \times F \to F,\ \pi_2((x,y)) = y.$$

Dann sind π_1 und π_2 stetig und π_1 ist bijektiv, da nur auf dem Graphen von T definiert. Somit ist π_1^{-1} stetig nach dem Satz von der offenen Abbildung und wegen $T = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}$ folgt die Behauptung. ■

. . . .

Gesucht: Einfaches Kriterium, um die Abgeschlossenheit des Graphen zu zeigen.

Lemma 2.4.4. Es seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung. Dann ist G_f abgeschlossen genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in X$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = y \in Y$ folgt, dass $y = f(x)$ gilt.

Beweis.

„$\Leftarrow$“: Es sei (x, y) ein Häufungspunkt von G_f. Dann gibt es eine Folge $(x_n, f(x_n)) \subset G_f$ mit $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$ $(n \to \infty)$ und nach Definition der Produkttopologie gilt diese Konvergenz komponentenweise. Nach Voraussetzung ist dann $y = f(x)$, also $(x, y) \in G_f$.

„$\Rightarrow$“: Es sei (x_n) eine Folge in X mit $x_n \to x$, $f(x_n) \to y$ für $n \to \infty$. Dann folgt $(x_n, f(x_n)) \xrightarrow{n\to\infty} (x, y)$ nach Definition der Produkttopologie. Da $(x_n, f(x_n)) \in G_f$ und G_f abgeschlossen ist, folgt $(x, y) \in G_f$ und somit $y = f(x)$.

■

. . . .

2.5 Die Sätze von Hahn-Banach

2.5.1 Stetige lineare Funktionale auf lokalkonvexen Räumen

Aus den Übungen ist bekannt (Blatt 12, Aufgabe 1):
Es existiert ein topologischer Vektorraum E, sodass die einzigen offenen konvexen Mengen die leere Menge oder E sind bzw. $E' = \{0\}$.
Wir wollen daher jetzt zeigen, dass dies für lokalkonvexe Räume nicht der Fall ist. Dazu erinnern wir an das Lemma von Zorn.

Definition 2.5.1.
Es sei $M \neq \emptyset$ eine Menge.

a) Eine **Ordnung** auf M ist eine Relation $\prec$ auf $M \times M$, die reflexiv, antisymmetrisch[16] und transitiv ist. Dann heißt das Paar $(M, \prec)$ eine **geordnete Menge**.

b) Eine Ordnung auf M heißt **totale Ordnung**, wenn für je zwei Elemente $x, y \in M$ gilt: $x \prec y$ oder $y \prec x$. Dann heißt $(M, \prec)$ eine **totalgeordnete Menge**.

c) Eine totalgeordnete Teilmenge einer geordneten Menge heißt **Kette**.

d) Nun sei M eine geordnete Menge und N eine Teilmenge von M. Ein Element $s \in M$ heißt **obere Schranke von N**, wenn $x \prec s$ für alle $x \in N$ gilt.

e) $(M, \prec)$ heißt **induktiv geordnete Menge**, wenn jede Kette in M eine obere Schranke besitzt.

f) Ein Element $m \in M$ heißt **maximales Element**, wenn für jedes $x \in M$ mit $m \prec x$ gilt: $m = x$.

g) Eine totalgeordnete Menge heißt **wohlgeordnet**, falls jede Teilmenge N von M ein kleinstes Element besitzt, d.h. es existiert ein $k \in N$ mit $k \prec n$ für alle $n \in N$.

....

Beispiele:

- Die Relationen $\leq$ und $\geq$ auf den reellen Zahlen sind Ordnungen, ebenso die Relationen $\subset$ und $\supset$ auf $\mathcal{P}(X)$.
- $\leq$ und $\geq$ sind auch totale Ordnungen.
- $\mathcal{P}(X)$ mit der Relation $\subset$ ist eine induktiv geordnete Menge.
- Die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist wohlgeordnet.

Lemma 2.5.2 (*Lemma von Zorn*). Es sei M eine induktiv geordnete Menge und $x \in M$. Dann existiert ein maximales Element $m \in M$ mit $x \prec m$.

....

Bemerkung:
Mit dem Lemma von Zorn lässt sich zeigen, dass jeder Vektorraum $V \neq \{0\}$ eine Basis hat:
Wähle dazu eine linear unabhängige Teilmenge $M \subset V$. Diese ist bezüglich Mengeninklusion induktiv geordnet und besitzt nach dem Lemma von Zorn somit ein maximales Element $\hat{M}$. Nach Definition ist $\hat{M}$ nun eine Basis von V.

[16] $x \prec y$ und $y \prec x$ impliziert $x = y$.

Das Lemma von Zorn ist äquivalent zum Auswahlaxiom und zum Wohlordnungssatz.
Auswahlaxiom:
Ist A eine Indexmenge und X_α nichtleere Mengen, so existiert eine Abbildung $F : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ mit $F(\alpha) \in X_\alpha$ für alle $\alpha \in A$. Anschaulich: F wählt aus jeder Menge X_α ein Element aus. F heißt *Auswahlfunktion*. Dies ist insbesondere äquivalent zu $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$.
Wohlordnungssatz:
Jede Menge $M \neq \emptyset$ kann wohlgeordnet werden.

Wir nehmen hier das Lemma von Zorn als Axiom.

Lemma 2.5.3. Es sei E ein komplexer Vektorraum.

- Ist ϕ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional auf E, so ist $u = \mathrm{Re}(\phi)$ ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional auf E und es gilt

$$\phi(x) = u(x) - \mathrm{i}u(\mathrm{i}x), \; x \in E. \tag{2.9}$$

- Ist umgekehrt u ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional auf E und ϕ durch (2.9) definiert, so ist ϕ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional auf E.

Nun sei E ein topologischer Vektorraum.

- Ist ϕ ein $\mathbb{C}$-lineares Funktional auf E, so ist $\phi \in E'$ genau dann, wenn $u = \mathrm{Re}(\phi)$ stetig ist.
- Ist u ein $\mathbb{R}$-lineares, stetiges Funktional auf E , so existiert genau ein $\phi' \in E'$ mit $u = \mathrm{Re}(\phi')$.

Beweis. Der Beweis wird dem Leser überlassen. ∎

....

Definition 2.5.4. Es sei E ein Vektorraum und $p : E \to \mathbb{R}$ ein Funktional. p heißt **sublinear**, wenn gilt:

(SL1) $p(tx) = tp(x)$ für alle $t > 0$, $x \in E$.

(SL2) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in E$.

....

Satz 2.5.5 (*Satz von Hahn-Banach, Urversion*).
Es sei E ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, M ein Unterraum von E, $p : E \to \mathbb{R}$ sublinear und $\phi \in M^*$ mit $\phi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in M$. Dann existiert ein $\Phi \in E^*$ mit $\Phi\,|_M = \phi$ und $\Phi(x) \leq p(x)$ für alle $x \in E$.

Beweis.

1. Es sei $M \neq E$, $x_0 \in E \setminus M$ und $F := M \oplus \langle x_0 \rangle$. Dann hat jedes $y \in F$ eine eindeutige Darstellung der Form $y = x + \alpha x_0$ mit $x \in M$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $\beta \in \mathbb{R}$ definieren wir $\Psi(y) := \alpha\beta + \Phi(x)$. Dann ist $\Psi \in E^*$ mit $\Psi\,|_M = \phi$.

Ziel: Wähle β so, dass $\Psi(y) \leq p(y)$ für alle $y \in E$ gilt.
Diese Ungleichung ist äquivalent zu

$$\phi(x) + \alpha\beta \leq p(x + \alpha x_0). \tag{$*$}$$

Für $\alpha = 0$ ist $(*)$ nach Voraussetzung erfüllt.
Für $\alpha > 0$ ist $(*)$ äquivalent zu:

$$\begin{aligned}\alpha\beta \leq p(x + \alpha x_0) - \phi(x) &\Leftrightarrow \beta \leq p(\alpha^{-1}x + x_0) - \phi(\alpha^{-1}x),\ x \in M \\ &\Leftrightarrow \beta \leq p(u + x_0) - \phi(u),\ u \in M.\end{aligned}$$

Für $\alpha < 0$ erhält man analog:

$$(*) \Leftrightarrow \beta \geq \phi(v) - p(v - x_0),\ v \in M.$$

Also existiert ein geeignetes β genau dann, wenn

$$\phi(v) - p(v - x_0) \leq p(u + x_0) - \phi(u)$$

für $u, v \in M$ gilt. Dies ist äquivalent zu:

$$\phi(u) + \phi(v) \leq p(u + x_0) + p(v - x_0),\ u, v \in M.$$

Diese Ungleichung ist nun tatsächlich richtig wegen

$$\begin{aligned}\phi(u) + \phi(v) &= \phi(u + v) \\ &\leq p(u + v) \\ &= p(u + x_0 - x_0 + v) \\ &\leq p(u + x_0) + p(v - x_0).\end{aligned}$$

2 Wir schreiben im Folgenden $F \leq E$, wenn F ein Unterraum von E ist. Betrachte

$$\mathfrak{M} := \{\Psi\colon E_\Psi \to \mathbb{R}\colon M \leq E_\Psi \leq E \text{ so, dass } \Psi \text{ linear und } \Psi\,|_M = 0\},$$

d.h. die Menge aller Fortsetzungen von Φ. Es ist $\mathfrak{M} \neq \emptyset$, da $\phi \in \mathfrak{M}$ ist.
Jetzt ordnen wir $\mathfrak{M}$ wie folgt induktiv:
$\Psi_1 < \Psi_2$, wenn $E_{\Psi_1} \leq E_{\Psi_2}$ und $\Psi_2\,|_{E_{\Psi_1}} = \Psi_1$ gilt.
Diese Ordnung ist tatsächlich induktiv, denn ist $\mathfrak{K}$ eine Kette in $\mathfrak{M}$, so ist $F := \bigcup\limits_{\Psi \in \mathfrak{K}} E_\Psi$ ein Unterraum von E mit $M \leq F$. Definiere $\Psi_0 \in F^*$ durch $\psi_0(x) = \Psi(x)$ für $x \in E_\Psi$ und $\Psi \in \mathfrak{K}$. Da $\mathfrak{K}$ eine Kette ist, ist Ψ_0 wohldefiniert und damit eine obere Schranke von $\mathfrak{K}$.
Nach dem Lemma von Zorn existiert ein maximales Element $\Psi \in \mathfrak{M}$ mit $\phi < \Psi$, d.h. $\Psi\,|_M = \phi$. Wegen 1 ist $E_\Psi = E$ und es folgt die Behauptung, denn andernfalls könnten wir wie in 1 noch weiter fortsetzen, was ein Widerspruch zur Maximalität wäre.

■

Satz 2.5.6 (*Satz von Hahn-Banach, komplexifizierte Version*).
Es sei E ein Vektorraum, $M \leq E$, p eine Halbnorm und $\phi \in M^*$ mit $|\phi(x)| \leq p(x)$ für $x \in M$. Dann existiert ein $\Phi \in E^*$ mit $\Phi|_M = \phi$ und $|\Phi(x)| \leq p(x)$ für $x \in E$.

BEWEIS.

1. Fall 1: E ist reeller Vektorraum.
Dann folgt die Behauptung aus Satz 2.5.5, denn wegen $-\Phi(x) = -\Phi(x) \leq p(-x) = p(x)$ gilt $|\Phi(x)| \leq p(x)$.

2. Fall 2: E ist komplexer Vektorraum.
Wir setzen $u := \mathrm{Re}(\phi)$. Dann ist u $\mathbb{R}$-linear auf M mit $|u(x)| \leq |\Phi(x)| \leq p(x)$ für $x \in M$. Daher existiert nach 1 ein $\mathbb{R}$-lineares Funktional U auf E mit $|U(x)| \leq p(x)$ für $x \in E$. Definiere nun $\Phi : E \to \mathbb{C}$ durch $\Phi(x) := U(x) - \mathrm{i}U(\mathrm{i}x)$, $x \in E$. Dann ist Φ $\mathbb{C}$-linear mit $\Phi|_M = \phi$.
Zu $x \in X$ existiert nun $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $|\alpha| = 1$ und $\alpha\Phi(x) = |\Phi(x)|$, somit ist $|\Phi(x)| = \Phi(\alpha x) = U(\alpha x) \leq p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x) = p(x)$ für $x \in E$.

■

Wir notieren nun zwei wichtige Folgerungen aus dem Satz von Hahn-Banach.

Satz 2.5.7. Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, M ein Unterraum von E und $\phi \in M'$. Dann existiert $\Phi \in E'$ mit $\Phi|_M = \phi$.

BEWEIS. Es sei $\mathcal{P}$ eine Familie von Halbnormen, die die Topologie von E erzeugt. Nach Folgerung 1.5.8 ist $\Phi \in E'$ stetig genau dann, wenn es eine Konstante $C > 0$ und $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}$ gibt mit

$$|\Phi(x)| \leq C \max_{j=1,\ldots,m} p_j(x), \; x \in E.$$

Dann definiert die rechte Seite dieser Ungleichung eine Halbnorm und die Behauptung folgt direkt aus Satz 2.5.6. ■

Satz 2.5.8. Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, M ein abgeschlossener Unterraum von E und $x_0 \in E \setminus M$. Dann existiert $\Phi \in E'$ mit $\Phi(x) = 0$ für $x \in M$ und $\Phi(x_0) = 1$. Insbesondere ist $E' \neq \{0\}$.

BEWEIS. Wir setzen $F := M \oplus \langle x_0 \rangle$. Dann gilt $M \leq F \leq E$. Somit hat jedes $y \in F$ eine eindeutige Darstellung der Form $y = x + \alpha x_0$ mit $x \in M$ und $\alpha \in \mathbb{K}$.
Definiere nun $\phi \in E^*$ durch $\phi(y) := \alpha$. Dann ist $N(\phi) = M$ und $\Phi(x_0) = 1$. Da $N(\phi)$ abgeschlossen ist, folgt aus Satz 1.2.15, dass ϕ stetig ist, also ist $\phi \in M'$. Jetzt setzen wir ϕ mit Satz 2.5.7 zu $\Phi \in E'$ fort. ■

Für praktische Anwendungen in der Approximationstheorie notieren wir noch:

Folgerung 2.5.9. Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und M ein Unterraum von E. Dann gilt:
M ist dicht in E genau dann, wenn für jedes $\Phi \in E'$ mit $\Phi(x) = 0$ für alle $x \in M$ gilt: $\Phi(x) = 0$ für alle $x \in E$.

Beweis. $\Rightarrow$: Klar.
$\Leftarrow$: Angenommen, M ist nicht dicht, d.h. $\overline{M} \neq E$. Wähle dann $x_0 \in E \setminus \overline{M}$. Dann existiert ein $\Phi \in E'$ mit $\Phi(x_0) \neq 0$, also $\Phi \not\equiv 0$. Dies ist ein Widerspruch. ■

. . . .

Jetzt formulieren wir den Satz von Hahn-Banach noch speziell für normierte Räume.

Satz 2.5.10. Es sei E ein normierter Raum, M ein Unterraum von E und $\phi \in E'$. Dann existiert ein $\Phi \in E'$ mit $\Phi\,|_M = \phi$ und $||\Phi|| = ||\phi||$.

Beweis. Durch $p(x) = ||\phi||\,||x||$ wird eine Halbnorm auf E definiert und es gilt $|\phi(x)| \leq ||\phi||\,||x|| = p(x)$ für alle $x \in M$.
Nach Satz 2.5.6 existiert ein $\Phi \in E^*$ mit $\Phi\,|_M = \phi$ und $|\Phi(x)| \leq p(x)$ für $x \in E$. Dann ist $\Phi \in E'$ und es gilt $||\Phi|| \leq ||\phi||$.
Für $x \in M$ ist $|\phi(x)| = |\Phi(x)| \leq ||\Phi||\,||x||$, somit folgt also $||\phi|| \leq ||\Phi||$ und es folgt die Behauptung. ■

. . . .

Satz 2.5.11. Es sei E ein normierter Raum, M ein abgeschlossener Unterraum von E und $x_0 \in E \setminus M$ oder allgemeiner $\delta := \inf_{x \in M} ||x - x_0|| > 0$. Dann existiert ein $\Phi \in E'$ mit $\Phi(x) = 0$ für $x \in M$, $\Phi(x_0) = \delta$ und $||\Phi|| = 1$.

Beweis. Wir betrachten F wie im Beweis von Satz 2.5.8 und definieren $\phi : F \to \mathbb{K}$ durch $\phi(x) := \alpha\delta$. Dann ist $\phi \in F^*$, $\phi(x) = 0$ für $x \in M$ und $\phi(x_0) = \delta$. Für $y = x + \alpha x_0 \in F$ mit $\alpha \neq 0$ gilt dann:

$$||y||\,0\,||{-\alpha}(\alpha{-}1x - x_0)|| = |\alpha|\,\left|\left|\alpha^{-1}x - x_0\right|\right| \geq |\alpha|\,\delta.$$

Damit ist $|\phi(y)| \leq ||y||$ für alle $y \in F$, also ist $\phi \in F'$ und $||\phi|| \leq 1$.
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in M$ mit $||x - x_0|| < \delta + \varepsilon$. Wir setzen nun $z := \frac{1}{||x - x_0||}(x - x_0)$, also gilt $||z|| = 1$. Somit ist $||\phi|| \geq |\phi(z)| = \frac{\delta}{||x - x_0||} > \frac{\delta}{\delta + \varepsilon}$. Für $\varepsilon \to 0$ folgt $||\phi|| \geq 1$, also ist $||\phi|| = 1$. Jetzt setze ϕ mit Satz 2.5.10 fort zu $\Phi \in E'$. ■

. . . .

Folgerung 2.5.12. Es sei E ein normierter Raum und $x_0 \in E$ mit $x_0 \neq 0$. Dann existiert ein $\Phi \in E'$ mit $||\Phi|| = 1$ und $\Phi(x_0) = ||x_0||$.

Beweis. Folgt sofort aus Satz 2.5.11 mit $M = \{0\}$. ■

. . . .

Folgerung 2.5.13. Es sei E ein normierter Raum. Dann gilt

$$||x|| = \sup\left\{|\Phi(x)| : \Phi \in E',\ ||\Phi|| \leq 1\right\} \text{ für } x \in E. \tag{2.10}$$

Beweis. Es gilt „$\geq$“ nach Definition von $||\Phi||$ und „$\leq$“ nach Folgerung 2.5.12. ■

. . . .

Folgerung 2.5.14. Es sei E ein normierter Raum. Dann ist die kanonische Einbettung $J : E \to E''$, $x \mapsto (Jx)(\phi) := \phi(x)$ für $\phi \in E'$, eine Isometrie.

. . . .

2.5.2 Trennung konvexer Mengen

Wir behandeln hier jetzt die *geometrische Version* des Satzes von Hahn-Banach.

Satz 2.5.15. Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, $U, V \subset E$ konvex, $U \neq \emptyset$, $V \neq \emptyset$ und U offen mit $U \cap V = \emptyset$. Dann existiert ein $\Phi \in E'$ mit

$$\mathrm{Re}(\Phi(x)) < \mathrm{Re}(\Phi(y)) \text{ für } x \in U, v \in V.$$

Beweis. Es genügt, die Behauptung für einen reellen Vektorraum zu beweisen, denn ist E ein komplexer Vektorraum und ein stetiges $\mathbb{R}$-lineares Funktional gefunden, so ist nach Lemma 2.5.3 $\phi = \mathrm{Re}(\Phi)$ mit einem eindeutig bestimmten $\Phi \in E'$.
Es sei also E ein reeller Vektorraum. Seien nun $u_0 \in U$, $v_0 \in V$, $x_0 := v_0 - u_0$ und $W = U - V + x_0$. Dann ist W eine offene Nullumgebung.
Es sei p das Minkowskifunktional von W. Nach Satz 1.5.3 ist p sublinear. Wegen $U \cap V = \emptyset$ ist $x_0 \notin W$, also gilt $p(x_0) \geq 1$.
Sei nun $M := \langle x_0 \rangle$. Wir definieren $\phi \in M'$ durch $\phi(tx_0) = t$. Ist $t \geq 0$, so gilt $\phi(tx_0) = t \leq tp(x_0) = p(tx_0)$. Ist $t < 0$, so gilt $\phi(tx_0) = t < 0 < p(tx_0)$. Insgesamt haben wir somit $\phi(x) \leq p(x)$ für $x \in M$.
Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert $\Phi \in E^*$ mit $\Phi|_M = \phi$ und $\Phi(x) \leq p(x)$ für $x \in E$. Insbesondere gilt $\Phi(x) \leq 1$ für $x \in W$ und somit $\Phi(y) \geq -1$ für $y \in -W$. Somit ist $|\Phi(x)| \leq 1$ für alle $x \in W \cap (-W)$ und somit ist nach Bemerkung 1.2.5 $\Phi \in E'$.
Für $x \in U$ und $y \in V$ gilt $\Phi(x) - \Phi(y) + 1 = \Phi(x - y + x_0) \leq p(x - y + x_0) < 1$, da $\Phi(x_0) = 1$, $x - y + x_0 \in W$ und W offen ist. Somit ist $\Phi(x) \leq \Phi(y)$. ■

. . . .

Satz 2.5.16. Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, $A \subset E$ abgeschlossen und konvex und $x_0 \in E \setminus A$. Dann existiert $\Phi \in E'$ und $\varepsilon > 0$ mit

$$\mathrm{Re}(\Phi(x_0)) < \mathrm{Re}(\Phi(x_0)) + \varepsilon \leq \mathrm{Re}(\Phi(y)) \text{ für } x \in A. \tag{2.11}$$

Ist A zusätzlich absolutkonvex, so existiert $\Phi \in E'$ und $\varepsilon > 0$ mit $|\Phi(y)| + \varepsilon \leq \mathrm{Re}(\Phi(x_0))$ für $y \in A$.

Beweis. Nach Lemma 1.2.9 existiert eine konvexe Nullumgebung U in E mit $(x - 0 + U) \cap A = \emptyset$. Nach vorigem Satz existiert dann ein $\Phi \in E'$ mit $\mathrm{Re}(\Phi(x)) + \mathrm{Re}(\Phi(u)) < \mathrm{Re}(\Phi(y))$ für $u \in U$, $y \in A$. Wir setzen nun $\varepsilon := \sup_{u \in U} \mathrm{Re}(\Phi(y))$. Da U absolutkonvex ist, ist $\varepsilon > 0$ und die erste Behauptung folgt.
Nun sei A absolutkonvex. Dann existiert ein $\Phi \in E'$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ mit $\mathrm{Re}(\Phi(y)) < \gamma < \mathrm{Re}(\Phi(x_0))$ für alle $y \in A$ (ersetze oben Φ durch $-\Phi$). Da $\Phi(A)$ kreisförmig ist, gilt sogar $|\Phi(y)| \leq \gamma$ für alle $y \in A$. Dies ist die zweite Behauptung. ■

. . . .

Folgerung 2.5.17. Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum. Dann ist E' punktetrennend auf E, d.h. sind $x, y \in E$ mit $x \neq y$, so existiert ein $\Phi \in E'$ mit $\Phi(x) \neq \Phi(y)$.

Beweis. Folgt aus Satz 2.5.16 mit $A = \{y\}$ und $x = x_0$. ■

. . . .

Definition 2.5.18. Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum, $M \subset E$ und $N \subset E'$ mit $M \neq \emptyset$, $N \neq \emptyset$. Dann heißen

- $M^\circ := \{\Phi \in E' \colon \, |\Phi(x)| \leq 1 \; \forall x \in M\} \subset E'$ bzw.
- $N^\circ := \{x \in E \colon \, |\Phi(x) \leq 1 \; \forall \Phi \in N|\} \subset E$

die **Polare** von M bzw. N. Weiter heißt $M^{\circ\circ} := (M^\circ)^\circ \subset E$ die **Bipolare** von M.

. . . .

Offenbar sind Polare immer absolutkonvex. Weiter ist N° abgeschlossen in E, denn es ist $N^\circ = \bigcap_{\Phi \in N} \Phi^{-1} \{\lambda \in \mathbb{K} \colon \, |\lambda| \leq 1\}$.

Satz 2.5.19 (*Bipolarensatz*).
Es sei E ein lokalkonvexer topologischer Vektorraum und $A \subset E$ absolutkonvex. Dann gilt $A^{\circ\circ} = \overline{A}$.

Beweis. „$\supseteq$“ ist klar.
Zum Beweis der anderen Inklusion sei $x_0 \in E \setminus \overline{A}$. Dann existiert nach Satz 2.5.16 ein $\Phi \in E'$ und $\varepsilon > 0$ mit $|\Phi(x)| + \varepsilon < \mathrm{Re}(\Phi(x_0))$ für $x \in A$. Wir setzen $\alpha := \mathrm{Re}(\Phi(x_0)) - \varepsilon > 0$ und $\Psi := \alpha^{-1}\Phi \in E'$. Dann ist $|\Psi(x)| \leq 1$ für alle $x \in A$, also ist $\Psi \in A^\circ$. Weiter ist $\Psi(x_0) > 1$, also ist $x \notin A^{\circ\circ}$ und somit folgt die Behauptung. ■

. . . .

3 Banachräume und lineare Operatoren

3.1 Der Dualraum eines normierten Raumes

Für einen normierten Raum E bezeichne $B_E := \{x \in E\colon \ ||x|| = 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel. Ist F ein weiterer normierter Raum, so ist aus Abschnitt 1.5 bekannt, dass $L(E, F)$ mit der Operatornorm $||T|| = \sup\limits_{x \in B_E} ||Tx||$ ein normierter Raum ist. Ist F ein Banachraum, so auch $L(E, F)$. Die Elemente von E' bezeichnen wir im Folgenden mit x'. Wir werden sehen, dass zwischen E und E' eine gewisse Symmetrie bzw. Dualität besteht. Daher schreiben wir statt $x(x')$ auch $\langle x, x'\rangle$.
Es ist E' ein Banachraum mit der Norm $||x'|| := \sup\limits_{x \in B_E} |\langle x, x'\rangle|$ und für jedes $x \in E$ gilt nach Folgerung 2.5.13:

$$||x|| = \sup_{x' \in B_{E'}} \left|\left\langle x, x'\right\rangle\right| . \tag{3.1}$$

Satz 3.1.1. Es seien E, F normierte Räume und $T \in L(E, F)$. Dann gilt

$$||T|| = \sup \left\{ \left|\left\langle Tx, y'\right\rangle\right| : x \in B_E, \ y\prime \in B_{F'} \right\} . \tag{3.2}$$

Beweis. Wir wenden Formel (3.1) mit F statt E an und erhalten

$$||Tx|| = \sup \left\{ \left|\left\langle Tx, y'\right\rangle\right| : y' \in B_{F'} \right\} .$$

Damit folgt die Behauptung aus der Definition der Operatornorm. ■

....

Für normierte Räume E sei jetzt stets $J_E : E \to E''$ die kanonische Einbettung. Diese ist definiert durch $x \mapsto J_E x$, $\langle x', J_E x\rangle = \langle x, x'\rangle$.

Definition 3.1.2. Ein Banachraum E heißt **reflexiv**, wenn $J_E : E \to E''$ surjektiv ist.

....

Bemerkung:

- In diesem Fall sind E und E'' isometrisch isomorph und wir *schreiben* $E = E''$.
- **Beachte:** Normierte Räume, die nicht vollständig sind, können nicht reflexiv sein. Die Bedingung $E = E''$ ist nur notwendig, aber im Allgemeinen nicht hinreichend für Reflexivität.

Beispiele behandeln wir später.

Satz 3.1.3. Es sei E ein Banachraum. Dann gelten folgende Aussagen:

a) Ist E reflexiv und F ein abgeschlossener Unterraum von E, so ist auch F reflexiv.

b) E ist reflexiv genau dann, wenn E' reflexiv ist.

Beweis.

a) Es sei $y'' \in F''$. Dann liegt die Abbildung $x' \mapsto \langle x' |_F, y'' \rangle$ in E'', denn es gilt

$$\left|\left\langle x' |_F, y'' \right\rangle\right| \leq ||y''|| \cdot ||x' |_F|| \leq ||y''|| \cdot ||x'|| \,.$$

Da E reflexiv ist, existiert ein $x \in E$ mit $\langle x, x' \rangle = \langle x' |_F, y'' \rangle$ für $x' \in E'$. $(*)$
Wir zeigen jetzt $x \in F$.
Andernfalls gäbe es wegen der Abgeschlossenheit von F ein $x' \in E'$ mit $\langle x, x' \rangle = 1$ und $x' |_F = 0$ nach Satz 2.5.11, was ein Widerspruch zu $(*)$ ist.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $J_F x = y''$ gilt, d.h. $\langle y', y'' \rangle = \langle y', J_F x \rangle$ für $y' \in F'$.
Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert ein $x' \in E'$ mit $x' |_F = y'$. Dann folgt aus $(*)$:

$$\left\langle y', y'' \right\rangle = \left\langle x' |_F, y'' \right\rangle = \left\langle x, x' \right\rangle = \left\langle x, y' \right\rangle = \left\langle y', J_F x \right\rangle$$

für alle $y' \in F'$. Somit ist $y'' = J_F x$, d.h. J_F ist surjektiv, somit ist F reflexiv.

b) „$\Rightarrow$“: Es sei E reflexiv. Es ist zu zeigen, dass die kanonische Einbettung $J_E : E' \to E'''$ surjektiv ist.
Es sei dazu $x''' \in E'''$. Dann ist die Abbildung $x' : E \to \mathbb{K}$ mit $x \mapsto \langle J_E x, x''' \rangle$ linear und stetig, also ist $x' \in E'$. Wir zeigen jetzt: $x''' = J_{E'} x'$.
Da E reflexiv ist, ist jedes x'' von der Form $x'' = J_E x$ für ein $x \in E$. Daher gilt

$$\left\langle x'', x''' \right\rangle = \left\langle J_E x, x''' \right\rangle = \left\langle x, x' \right\rangle = \left\langle x', J_E x \right\rangle = \left\langle x', x'' \right\rangle = \left\langle x'', J_{E'} x' \right\rangle .$$

Damit folgt die Behauptung.

„$\Leftarrow$“: Es sei nun E' reflexiv. Dann ist auch E'' reflexiv nach a). Da E ein abgeschlossener Unterraum von E'' ist, folgt damit die Behauptung aus Teil a).

■

. . . .

Jetzt wollen wir Dualräume von Unterräumen und Quotientenräumen untersuchen. Dafür benötigen wir zwei Begriffe:

Definition 3.1.4. Es sei E ein Banachraum, M ein Unterraum von E und N ein Unterraum von E'. Wir setzen

$$M^\perp := \left\{x' \in E' \colon \left\langle x, x' \right\rangle = 0 \text{ für } x \in M\right\} \text{ und } {}^\perp N := \left\{x \in E \colon \left\langle x, x' \right\rangle = 0 \text{ für } x' \in N\right\} . \qquad (3.3)$$

Diese Mengen heißen **Annulator** von M bzw. **Annihilator** von N.

. . . .

$M^\perp$ und ${}^\perp N$ sind abgeschlossene Unterräume von E' bzw. E.

Satz 3.1.5. Es sei E ein Banachraum und M ein abgeschlossener Unterraum von E. Dann gelten:

a) Nach Hahn-Banach ist jedes $m' \in M'$ zu einem $x' \in E'$ fortsetzbar. Wir definieren $S_m : M' \to E'/M^\perp$ durch $S_m := x + M^\perp$ für $m' \in M'$. Dann ist S_m ein isometrischer Isomorphismus von M' auf $E'/M^\perp$.

b) Es sei $\pi : E \to {}^{E}/_{M}$ die Quotientenabbildung und $F = {}^{E}/_{M}$. Wir definieren $T : F' \to M^{\perp}$ durch $Ty' = y' \circ \pi$ für $y' \in F'$. Dann ist T ein isometrischer Isomorphismus von F' auf M'.

Beweis.

a) Sind x' und x'_1 Fortsetzungen von M, so gilt $x' - x'_1 \in M^{\perp}$, also ist $x' + M^{\perp} = x'_1 + M^{\perp}$. S_m ist somit wohldefiniert. Man verifiziert leicht, dass S_m linear ist. Ferner gilt für jedes $x' \in E' : m' = x' \mid_M \in M'$. Somit ist S_m surjektiv. Es bleibt zu zeigen: S_m ist eine Isometrie.
Sei dazu $m' \in M'$. Ist $x' \in E'$ eine Fortsetzung von m', so ist $||m'|| \leq ||x'||$. Nach der Definition der Operatornorm ist $\left|\left|x' + M^{\perp}\right|\right| = \inf\{||y'|| : y' \in E',\ y' \mid_M = m'\}$. Also erhalten wir $||m'|| \leq ||S_{m'}|| \leq ||x'||$.
Andererseits existiert nach Satz 2.5.10 ein $x' \in E'$ mit $x' \mid_M = m'$ und $||x'|| = ||m'||$. Somit folgt $||S_{m'}|| = ||x'||$ und dies ist gerade die Behauptung.

b) Für $x \in E$ und $y' \in F'$ ist $\pi(x) \in F$, also ist $x \mapsto \langle \pi(x), y' \rangle$ ein stetiges, lineares Funktional auf E, das auf M verschwindet. Daher ist $Ty' \in M^{\perp}$. Die Linearität von T ist klar.
Es sei nun $x' \in M^{\perp}$ und $N := N(x')$. Da $M \subset N$ gilt, gibt es nach Aufgabe 1 auf Blatt 9 genau ein lineares Funktional ϕ auf F mit $\phi \circ \pi = y'$ und ϕ ist stetig. Damit folgt $\phi \in F'$, also auch $T\phi = x'$. Somit ist T surjektiv und es bleibt zu zeigen, dass T eine Isometrie ist.
Dazu sei nun $y' \in F'$. Zu $y \in F$ mit $||y|| = 1$ und $r > 1$ existiert nach Definition der Qoutientennorm (vgl. Bemerkung 1.6.3) in F ein $x_0 \in E$ mit $||x_0|| < r$ und $\pi(x_0) = y$. Damit folgt

$$\left|\left\langle y, y' \right\rangle\right| = \left|\left\langle \pi(x_0), y' \right\rangle\right| = \left|\left\langle x_0, Ty' \right\rangle\right| \leq \left|\left|Ty'\right|\right| \cdot ||x_0||\,,$$

also gilt $||y'|| < r\,||Ty'||$. Mit Grenzübergang $r \to 1$ gilt also $||y'|| \leq ||Ty'||$.
Andererseits ist $||\pi(x)|| \leq ||x||$ für $x \in E$. Damit gilt nun

$$\left|\left\langle x, Ty' \right\rangle\right| = \left|\left\langle \pi(x), y' \right\rangle\right| \leq \left|\left|y'\right|\right| \cdot ||x||\,.$$

Dies impliziert $||Ty'|| \leq ||y'||$, also folgt insgesamt $||Ty'|| = ||y'||$ und dies ist die Behauptung.

■

Definition 3.1.6. Es sei X ein topologischer Raum und A eine abzählbar dichte Teilmenge von X. Dann heißt X **separabel**.

Lemma 3.1.7. Es sei E ein topologischer vektorraum. Dann sind äquivalent:

a) E ist separabel.

b) Es existiert eine Folge $(x_n) \subset E$ mit $\overline{\langle x_n : n \in \mathbb{N} \rangle} = E$.

Beweis. Der Beweis wird dem Leser als Übung überlassen. ■

Satz 3.1.8. Es sei E ein normierter Raum und E' separabel. Dann ist E separabel.

Beweis. Da E' separabel ist, ist auch $S' := \{x' \in E' \colon \, ||x'|| = 1\}$ separabel, denn ist $\{y'_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ dicht in E', so zeigt man leicht, dass die Menge $\left\{\frac{y'_n}{||y'_n||} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$ dicht in S' ist.
Nun sei $\{x'_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ dicht in S'. Zu $n \in \mathbb{N}$ wähle $x_n \in E$ mit $||x_n|| = 1$ und $|\langle x_n, x'_n\rangle| \geq \frac{1}{2}$. Dies ist möglich, da $||x'_n|| = 1$ ist. Es sei nun $F := \overline{\langle x_n \colon n \in \mathbb{N}\rangle}$. Dann folgt, dass F separabel ist.
Behauptung: $F = E$.
Zum Beweis nehmen wir an, dass $F \neq E$ gilt. Nach Satz 2.5.11 existiert ein $x' \in S'$ mit $\langle x, y'\rangle = 0$ für alle $x \in F$. Dann folgt

$$\frac{1}{2} \leq \left|\left\langle x_n, x'_n\right\rangle\right| = \left|\left\langle x_n, x'_n\right\rangle - \left\langle x_n, x'\right\rangle\right| = \left|\left\langle x_n, x'_n - x'\right\rangle\right| \leq ||x_n|| \cdot \left|\left|x'_n - x'\right|\right| = \left|\left|x'_n - x'\right|\right|.$$

Somit ist $\{x'_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ nicht dicht in S'. ↯ ■

. . . .

3.2 Der duale Operator

Satz 3.2.1. Es seien E, F normierte Räume. Dann existiert zu jedem $T \in L(E,F)$ *genau* ein $T' \in L(F', E')$ mit

$$\langle Tx, y\prime\rangle = \left\langle x, T'y'\right\rangle \tag{3.4}$$

für $x \in E$ und $y \in F'$. T' heißt der zu T **duale Operator**. Weiterhin gelten

a) $||T|| = ||T'||$ für $T \in L(E,F)$.

b) $(\alpha S + \beta T)' = \alpha S' + \beta T'$ für $S, T \in L(E,F)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

c) $(S \circ T)' = T' \circ S'$ für $T \in L(E,F)$, $S \in L(F,G)$ und G ein passender Raum.

Beweis. Für $T \in L(E,F)$ definieren wir $T' : F' \to E'$ durch $T'y' = y' \circ T$. Dann gilt

$$\left\langle Tx, y'\right\rangle = y'(Tx) = T'(y'(x)) = \left\langle x, T'y'\right\rangle.$$

Damit folgt die Existenz. Wegen (3.4) ist T' eindeutig bestimmt. Die Linearität von T' rechnet man leicht nach. Schließlich folgt aus Satz 3.1.1:

$$||T|| = \sup\left\{\left|\left\langle Tx, y'\right\rangle\right| : x \in B_E, y' \in B_{F'}\right\} \overset{(3.4)}{=} \sup\left\{\left|\left|T'y'\right|\right| : y\prime \in B_{F'}\right\} = \left|\left|T'\right|\right|.$$

Somit ist T' stetig und $||T|| = ||T'||$. Die restlichen Eigenschaften rechnet man leicht nach. ∎

....

Satz 3.2.2. Es seien E, F Banachräume und $T \in L(E,F)$. Dann gelten:

a) $N(T') = R(T)^\perp$.

b) $N(T) = ^\perp R(T')$.

c) $\overline{R(T)} = ^\perp N(T')$.

Beweis.

a) Es gilt $y' \in N(T')$ genau dann, wenn $T'y' = 0$ gilt. Dies ist äquivalent zu $\langle x, T'y'\rangle = 0$ für alle $x \in E$. Dualisieren liefert $\langle Tx, y'\rangle = 0$ für alle $x \in E$, also ist $y \in R(T)^\perp$.

b) Ebenso gilt $x \in N(T)$ genau dann, wenn $Tx = 0$. Dies ist äquivalent zu $\langle Tx, y'\rangle = 0$ für alle $y' \in F'$, also durch Dualisieren $\langle x, T'y'\rangle = 0$ für alle $y' \in F'$. Somit ist $x \in^\perp R(T')$.

c) Zum Beweis dieser Gleichung sei zunächst $y \in R(T)$, d.h. $y = Tx$ für ein $x \in E$. Ist $y' \in N(T')$, so gilt

$$0 = \left\langle y, y'\right\rangle = \left\langle Tx, y'\right\rangle = \left\langle x, T'y'\right\rangle.$$

Daher ist $R(T) \subset^\perp N(T')$, also folgt $\overline{R(T)} \subset^\perp N(T')$.
Zum Nachweis der anderen Inklusion setzen wir $N := \overline{R(T)}$. Dann ist N ein abgeschlossener Unterraum von F. Ist $y \in F$, $y \notin N$, so existiert nach Hahn-Banach ein $y' \in F'$ mit $y' \mid_N = 0$ und $\langle y, y'\rangle \neq 0$. Insbesondere ist $\langle Tx, y'\rangle = 0$ für alle $x \in E$, d.h. $y' \in N(T')$. Somit ist $y \notin {}^\perp N(T)$.

■

Folgerung 3.2.3. Es seien E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$. Dann gilt:
$R(T)$ ist dicht in E. $\Leftrightarrow$ T' ist injektiv.

Lemma 3.2.4. Es seien E, F Banachräume und U bzw. V die offenen Einheitskugeln von E bzw. F. Weiter sei $T \in L(E, F)$ und $c > 0$. Dann gelten folgende Aussagen:

a) Falls $\overline{T(U)} \supset cV$, so ist $T(U) \supset cV$.

b) Ist $c\,||y'|| \leq ||T'y'||$ für alle $y' \in F'$, so ist $T(U) \supset cV$. Insbesondere ist T eine offene Abbildung.

[Hier ohne Beweis.[17]]

Satz 3.2.5. Es seien E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$. Dann sind äquivalent:

a) $R(T)$ ist abgeschlossen in F.

b) $R(T')$ ist abgeschlossen in E'.

Beweis.
a) $\Rightarrow$ b):
Da $N(T)^{\perp} \subset E'$ abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, dass $N(T)^{\perp} = R(T')$ ist.
„$\subset$“: Ist $x' \in R(T')$, so ist $x' = T'y'$ für ein $y' \in F'$. Dann gilt für alle $x \in N(T)$:

$$\langle x, x' \rangle = \langle x, T'y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle = y'(0) = 0.$$

Somit ist $x' \in N(T)^{\perp}$.

„$\supset$“: Nun sei umgekehrt $x' \in N(T)^{\perp}$. Wir definieren ein lineares Funktional ϕ auf $R(T)$ durch $\phi(Tx) := \langle x, x' \rangle$ für $x \in E$. Die Linearität von ϕ ist klar. Ist $Tx = T\hat{x}$, so ist $x - \hat{x} \in N(T)$ und daher $\langle x - \hat{x}, x \rangle = 0$, daher ist ϕ wohldefiniert.
Da $R(T)$ abgeschlossen ist, ist $R(T)$ vollständig. Daher ist nach dem Satz von der offenen Abbildung bzw. einer Folgerung daraus (Folgerung 2.3.2 a).) die Abbildung $T : E \to R(T)$ offen. Somit gibt es eine Konstante $K > 0$, sodass es zu jedem $y \in R(T)$ ein $x \in E$ gibt mit $Tx = y$ und $||x|| \leq K\,||Tx||$, denn:

Es seien U, V die offenen Einheitskugeln in E bzw. F. Da T offen ist, existiert eine Konstante $c > 0$ mit $T(U) \supset c\overline{V}$. Dann leistet $c = K^{-1}$ das Gewünschte.

Daraus folgt nun für $y \in R(T)$:

$$||\phi(y)|| = |\phi(Tx)| = |\langle x, x' \rangle| \leq ||x|| \cdot ||x'|| \leq K \cdot ||x'|| \cdot ||Tx|| = K \cdot ||x'|| \cdot ||y||\,.$$

Somit ist ϕ stetig, also $\phi \in L(R(T), \mathbb{K})$.
Nach dem Satz von Hahn-Banach können wir ϕ zu einem $y' \in F'$ fortsetzen. Also gilt für $x \in E$:

$$\langle x, T'y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle = \phi(Tx) = \langle x, x' \rangle\,.$$

[17] Ein Beweis dieses Satzes kann hier gefunden werden.

Somit ist $x' = T'y'$, also ist $x' \in R(T')$.

Somit folgt die Behauptung. ■

b) $\Rightarrow$ a):
Es sei $G := \overline{R(T)}$. Wir definieren $S \in L(E, G)$ durch $Sx := Tx$ für $x \in E$.[18] Da $R(S)$ dicht in G liegt, ist $S' \colon G' \to E'$ injektiv nach Folgerung 3.2.3.
Ist $z' \in G'$, so ist z' nach Hahn-Banach zu einem $y \in F'$ fortsetzbar und für $x \in E$ gilt

$$\langle x, T'y' \rangle = \langle Tx, y' \rangle = \langle Sx, y' \rangle = \langle Sx, z' \rangle = \langle x, S'z' \rangle .$$

Somit ist $S'z' = T'y'$ und somit gilt $R(S') = R(T')$.
Nach Voraussetzung ist $R(S')$ abgeschlossen und daher vollständig. Wieder nach dem Satz von der offenen Abbildung ist $S' \colon G' \to R(S')$ offen. Da S' injektiv ist, gibt es eine Konstante $c > 0$ mit $c\,||z'|| \leq ||S'z'||$ für alle $z' \in G'$. Nach Lemma 3.2.4 b) ist $S : E \to G$ offen. Insbesondere ist $S(E) = G$ und damit $R(T) = R(S) = G = \overline{R(T)}$. Daher ist $R(T)$ abgeschlossen.

. . . .

Satz 3.2.6. Es seien E, F Banachräume und $T \in L(E, F)$. Dann sind äquivalent:

a) T ist surjektiv.

b) Es gibt keine Konstante $c > 0$ mit $||T'y'|| \geq c\,||y'||$ für $y' \in F'$.

c) T' ist injektiv und $R(T')$ ist abgeschlossen in E'.

Beweis. Es gilt a) genau dann wenn $R(T)$ dicht und abgeschlossen ist. Nach Folgerung 3.2.3 und Satz 3.2.5 ist dann a) äquivalent zu c).
Falls c) gilt, so folgt b) aus dem Satz von der offenen Abbildung angewandt auf $T' \colon F' \to R(T')$. Umgekehrt folgt aus b) sofort die Injektivität von T'. Ist nun (x'_n) eine Cauchyfolge in $R(T')$, so ist (y'_n) definiert durch $y'_n := (T')^{-1}(x'_n)$ eine Cauchyfolge in F'. Also ist (y'_n) konvergent und damit auch (x'_n), somit ist $R(T')$ vollständig und daher abgeschlossen. ■

. . . .

[18] Beachte: T und S sind unterschiedliche Abbildungen, da sie verschiedene Wertebereiche haben.

Literaturverzeichnis

[Alt, 2012] Alt, H. W. (2012). Lineare Funktionalanalysis. Springer, Heidelberg.

[Elstrodt, 2011] Elstrodt, J. (2011). Maß- und Integrationstheorie. Springer, Heidelberg.

[Kaballo, 2000] Kaballo, W. (2000). Einführung in die Analysis I. Spektrum, Heidelberg.

[Kaballo, 2011] Kaballo, W. (2011). Grundkurs Funktionalanalysis. Spektrum, Heidelberg.

[Kaballo, 2014] Kaballo, W. (2014). Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie. Spektrum, Heidelberg.

[Meise and Vogt, 2011] Meise, R. and Vogt, D. (2011). Einführung in die Funktionalanalysis. Vieweg+Teubner, Wiesbaden.

[von Querenburg, 2001] von Querenburg, B. (2001). Mengentheoretische Topologie. Springer, Heidelberg.

[Werner, 2011] Werner, D. (2011). Funktionalanalysis. Springer, Heidelberg.