technische universität dortmund

fakultät für mathematik

Skript

zur Videovorlesung:

# Funktionentheorie

**B.Sc. Matthias Schulte**

Version vom 19. November 2022, 12:42

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Aus der klassischen Analysis sind die Begriffe *differenzierbar* und *integrierbar* bekannt. Typische Fragestellungen in diesem Kontext sind üblicherweise:

- Folgt aus der Differenzierbarkeit die Differenzierbarkeit der Ableitung?
- Sind integrierbare Funktionen differenzierbar?
- Darf man Integration und Differentiation vertauschen?

All diese Fragen kann man – ohne die Voraussetzungen teils erheblich einschränken zu müssen – mit „nein“ beantworten. Dies ist der zu Grunde liegenden Struktur geschuldet: *Den reellen Zahlen.*

Die Funktionentheorie ist nun – grob gesprochen – die Theorie von Funktionen einer *komplexen* Variablen. Diese auf den ersten Blick harmlose Änderung enthält aber auch schon die gesamte Sprengkraft dieses Gebiets: Mit dem richtigen Differenzierbarkeitsbegriff lauten nicht nur die Antworten auf obige Fragen stets „ja“, es gelten darüber hinaus noch viele weitere Erkenntnisse, die keine reellen Analoga besitzen – zum Beispiel den *Identitätssatz*, den *Satz von Liouville* oder den *Cauchyschen Integralsatz.* In dieser Vorlesung widmen wir uns daher dem Studium dieses Teilgebiets der Mathematik und seiner reichhaltigen theoretischen Fülle.

Ein Wort zur Stoffauswahl:
Diese Vorlesung basiert auf den von mir gehörten und betreuten Vorlesungen zur Funktionentheorie und ist stark von meinen persönlichen Interessen geprägt. Wir können den Stoff in vier grundlegende Typen einteilen:

- **Grundlagen**: Holomorphie, Cauchyintegralsatz, Cauchyintegralformel, Möbiustransformationen, Potenzreihen, Singularitäten, Laurentreihen, Residuensatz.
- **Analytische Vertiefungen**: Unendliche Produkte, Weierstraßscher Produktsatz, Satz von Mittag-Leffler, Gamma- und Zetafunktion, Riemannsche Vermutung, Dirichlet-Problem.
- **Algebraische Vertiefungen**: Analytische Fortsetzung, Homotopie und Homologie, Monodromiesatz, Elliptische Funktionen, $\wp$-Funktion, elliptische Kurven, Modulformen, Riemannsche Flächen, Idealtheorie, analytische Zahlentheorie.
- **Weiteres**: Normale Familien, Satz von Montel, Picardsche Sätze, Konforme Abbildungen, Riemannscher Abbildungssatz, Einführung in komplexe Dynamik, Laplacetransformation.

Zu beachten hierbei ist, dass die einzelnen Themen nicht zwingend disjunkt sein müssen, so kann z.B. der Riemannsche Abbildungssatz isoliert oder im Kontext Riemannscher Flächen betrachtet werden usw. Die obige Reihenfolge entspricht nicht der inhaltlichen Reihenfolge dieser Vorlesung, ist aber ein guter thematischer Überblick.

Als Voraussetzungen sind lediglich gute Kenntnisse einschlägiger Analysis I/II- und LinA I/II-Vorlesungen zu nennen. Die restliche Theorie wird von Null auf aufgebaut, wobei eine kurze Zusammenfassung zur Konstruktion von $\mathbb{C}$ im ersten Kapitel diskutiert wird.

# Videoliste

Hier sind die Links zu den Videos aufgelistet.

*Funktionentheorie I.*

Vorlesung 01. 1.1.1 bis 1.2.1.

Vorlesung 02. 1.2.2 bis 1.2.12.

Vorlesung 03. 1.3.1 bis 1.3.11.

Vorlesung 04. 1.3.11 bis 1.4.10.

Vorlesung 05. 1.4.11 bis 1.5.10.

Vorlesung 06. 1.5.11 bis 2.1.3.

Vorlesung 07. 2.1.3 bis 2.2.4.

Vorlesung 08. 2.2.5 bis 2.3.7.

Vorlesung 09. 3.1.1 bis 3.1.12.

Vorlesung 10. 3.2.1 bis 3.3.5.

Vorlesung 11. 3.3.6 bis 3.3.10.

# 1 Holomorphe Funktionen

## Inhaltsangabe

## 1.1 Der Körper der komplexen Zahlen

Wir beginnen mit einer kurzen Zusammenfassung zum Körper der komplexen Zahlen.

**Definition 1.1.1.**

Es sei $\mathrm{i}^2 = -1$. Dann ist die **Menge der komplexen Zahlen** definiert durch

$$\mathbb{C} := \{x + \mathrm{i}y \colon x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Für $z \in \mathbb{C}$ heißt $x =: \operatorname{Re} z$ der **Realteil** und $y =: \operatorname{Im} z$ der **Imaginärteil** von $z$.

---

Bereits bekannt vorausgesetzt ist die Addition und die Multiplikation komplexer Zahlen. Daraus folgt

**Satz 1.1.2.**

$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper.

---

Wir stellen nun zwei Methoden zur Erzeugung von $\mathbb{C}$ vor, werden aber nicht die Details der Konstruktionen durchgehen.

**Bemerkung 1.1.3.**

a) Mit $E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $I := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist die Menge

$$\mathcal{Z} := \{a \cdot E + b \cdot I\} \subset M(2; \mathbb{R})$$

isomorph zu $\mathbb{C}$.

b) $\mathbb{C}$ ist isomorph zum Faktorring (der sich als Körper herausstellt) $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$, wobei $(X^2 + 1)$ das von $X^2 + 1$ erzeugte maximale Ideal bezeichnet.

---

Der Vollständigkeit halber führen wir nun (nochmals) Rechenregeln für komplexe Zahlen ein, verzichten aber auf Beweise der bekannten Formeln.

**Definition 1.1.4.**

Die Abbildung $\overline{\phantom{x}}\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\overline{x + \mathrm{i}y} = x - \mathrm{i}y$ heißt **komplexe Konjugation**. Damit definieren wir den **Betrag** einer komplexen Zahl $z$ durch $|z|^2 := z\overline{z}$.

---

**Satz 1.1.5.**

Es gelten folgende Rechenregeln:

a) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$. Die Konjugationsabbildung ist somit ein Körperautomorphismus auf $\mathbb{C}$.

b) $\overline{\overline{z}} = z$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$, $|\overline{z}| = |z|$.

c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, $w \neq 0$.

---

**Definition 1.1.6.**

Für $z \in \mathbb{C}$ definieren wir das **Argument** $\operatorname{Arg} z \in \mathbb{R}$ so, dass

$$z = |z| \cdot (\cos \operatorname{Arg} z + \mathrm{i} \cdot \sin \operatorname{Arg} z)$$

gilt. Wir schreiben im Folgenden $r := |z|$ und $\varphi := \operatorname{Arg} z$. $(r, \operatorname{Arg} z)$ heißen die **Polarkoordinaten** von $z$.

---

Offensichtlich ist $\operatorname{Arg} z$ nicht eindeutig. Wir fordern daher zusätzlich $\operatorname{Arg} z \in (-\pi, \pi]$ um die Eindeutigkeit der Darstellung (außer für die Null) zu gewährleisten.

**Satz 1.1.7.**
Es seien $z = (r, \varphi)$ und $w = (R, \psi)$ zwei komplexe Zahlen. Dann gilt

$$z \cdot w = r \cdot R \cdot (\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi + \psi)) \,.$$

Induktiv ergibt sich die *Moivresche Formel*

$$z^n = r^n \cdot (\cos(n\varphi) + \mathrm{i}\sin(n\varphi)) \,, \ n \in \mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Mit diesem Satz diskutieren wir nun die Lösbarkeit der Gleichung $z^n = w$ für $w \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

**Satz 1.1.8.**
Alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ sind gegeben durch die Potenzen der **Einheitswurzeln**

$$\varepsilon_n^k := \left(\cos\frac{2\pi}{n} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\right)^k \,, \ k = 0, \dots, n-1. \tag{1.2}$$

Alle Lösungen der Gleichung $z^n = w$ sind die Zahlen

$$z_k = z_0 \cdot \varepsilon_n^k, \ z_0 = |w|^{1/n} \cdot \left(\cos\frac{\operatorname{Arg} w}{n} + \mathrm{i} \cdot \sin\frac{\operatorname{Arg} w}{n}\right).$$

Die $n$-ten Einheitswurzel bilden bezüglich der Multiplikation eine Gruppe.

Im Laufe der Vorlesung wollen wir für komplexwertige Funktionen den Wert $\infty$ sowohl als Bildwert als auch als Argument zulassen. Daür benötigen wir ein wenig topologischen Vorlauf.

**Definition 1.1.9.**
Es sei $X \neq \emptyset$ eine Menge. Eine **Topologie** ist ein System $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ mit :

(O1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

(O2) Beliebige Vereinigungen von Mengen in $\mathcal{T}$ sind wieder in $\mathcal{T}$.

(O3) Endliche Schnitte von Mengen in $\mathcal{T}$ sind wieder in $\mathcal{T}$.

$(X, \mathcal{T})$ heißt **topologischer Raum**, $A \in X$ heißt **offen**.

Aus der Analysis ist bekannt, dass jeder metrische Raum ein topologischer Raum ist, wobei die Topologie gerade von den offenen $\varepsilon$-Bällen induziert wird. An dieser Stelle ist es passend, folgende Notation zu vereinbaren:

$$U_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon \ |z - z_0| < r\} \,, \ B_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon \ |z - z_0| \leq r\} \,, \ K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C}\colon \ |z - z_0| = r\} \,.$$

**Satz 1.1.10.**
Mit der Metrik $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}, \ d(z, w) := |z - w|$ ist $(\mathbb{C}, d)$ ein vollständiger metrischer Raum.

Wir definieren nun zunächst ganz formal die Menge $\widehat{\mathbb{C}}$ als $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ und werden diese Definition im Rahmen der Behandlung von Möbiustransformation mit Leben füllen. Für den Moment machen wir noch die Beobachtung, dass $\widehat{\mathbb{C}}$ sogar zu einem kompakten topologischen Raum gemacht werden kann.

**Satz 1.1.11.**
Mit der Topologie

$$\mathcal{T} := \left\{X \subset \widehat{\mathbb{C}}\colon X \subset \mathbb{C} \text{ ist offen oder } X = (\mathbb{C} \setminus K) \cup \{\infty\} \ \text{ mit } K \text{ kompakt}\right\}$$

ist $(\widehat{\mathbb{C}}, \mathcal{T})$ ein kompakter topologischer Raum.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 1.* ■

## 1.2 Komplexe Differenzierbarkeit und Holomorphie

Wir wollen nun für eine komplexwertige Funktion einen passenden Differenzierbarkeitsbegriff einführen. Dabei betrachten wir einfach die analoge Definition zur reellen Differenzierbarkeit, werden aber feststellen, dass diese im Komplexen einen stärkeren Begriff induziert.

**Definition 1.2.1.**

a) Eine Teilmenge $D \subset \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**, falls $D$ nichtleer, offen und zusammenhängend ist.

b) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. $f$ heißt in $z_0 \in D$ **komplex differenzierbar**, falls der Differenzenquotient

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \in \mathbb{C} \tag{1.3}$$

existiert.

c) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph** auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$, falls $f$ in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar ist. Wir schreiben dann $f \in H(D)$.

d) Eine Funktion $f \in H(\mathbb{C})$ heißt **ganz**.

e) Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt **holomorph im Punkt $z$**, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass $f \in H(U_\varepsilon(z))$ gilt.

**Beachte**, dass aus dieser Definition sofort folgt, dass eine Funktion nie holomorph in einem einzigen Punkt sein kann! Dies ist ein wesentlicher Unterschied zum reellen Differenzierbarkeitsbegriff.

Notation: Mit $f \in H(D)$ implizieren wir stets, dass $f$ eine komplexwertige Funktion ist und $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, solange nicht explizit etwas anderes gesagt wird.

Man kann nun leicht das folgende strukturelle Lemma beweisen.

**Lemma 1.2.2.**

$(H(D), +, \cdot)$ ist ein kommutativer Ring mit Eins.

Beweis. Es ist klar, Dass $(H(D), +)$ eine abelsche Gruppe und $(H(D), \cdot)$ eine Halbgruppe ist. Distributivität folgen sofort aus Satz 1.1.2. Die Kommutativität folgt aus der Kommutativität von $\cdot$ in $\mathbb{C}$. Die konstante Einsfunktion ist nun das neutrale Element der Multiplikation. ■

Mit diesem Lemma erhält man nun leicht

**Satz 1.2.3.**

Für holomorphe Funktionen gelten alle Ableitungsregeln.

Beweis. Man überträgt einfach die reellen Beweise und benutzt für die Verknüpfungen der Funktionen Lemma 1.2.2. ■

Wir suchen nun erste äquivalente Kriterien zur komplexen Differenzierbarkeit und zur Holomorphie. Wie in der reellen Analysis erhalten wir

**Satz 1.2.4 (*Restglieddarstellung*).**

Es sei $f \in H(D)$ und $z_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

a) $f$ ist in $z_0$ komplex differenzierbar.

b) Es gibt ein $w \in \mathbb{C}$ und eine Funktion $R : D \to \mathbb{C}$ mit $R = o(z - z_0)$[1], sodass gilt:

$$f(z) = f(z_0) + w(z - z_0) + R(z) \ \forall\ z \in D. \tag{1.4}$$

In dieser Situation gilt $w = f'(z_0)$.

[1] Dies bedeutet, dass $\lim_{z \to z_0} \frac{R(z)}{z - z_0} = 0$ gilt.

Beweis. Analog zur reellen Analysis. ■

Dieses Kriterium lässt sich für eine spezielle Funktion nicht gut nachrechnen. Wir suchen daher ein besser überprüfbares Kriterium und finden dies mit den *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen*, im Folgenden mit CRDen abgekürzt. Vorher zeigen wir allerdings, dass die komplexe Differenzierbarkeit die Stetigkeit bedingt.

**Lemma 1.2.5.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f$ in einem $z_0 \in D$ komplex differenzierbar. Dann ist $f$ stetig in $z_0$.

Beweis. Folgt sofort aus Satz 1.2.4 mit $z \to z_0$. ■

Um die CRDen zu beweisen, vereinbaren wir folgende
Notation: Für eine komplexwertige Funktion $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ schreiben wir $f(z) = f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i} \cdot v(x,y)$. Damit können wir $f$ als reelle vektorwertige Funktion $f : D \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ schreiben.

**Satz 1.2.6 (*Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen*).**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0 \in D$. Dann sind äquivalent:

a) $f$ ist in $z_0$ komplex differenzierbar.

b) $f$ ist in $(x_0, y_0)$ total differenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \textbf{ und } \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x,y). \tag{1.5}$$

Ist $f$ in $z_0$ komplex differenzierbar, so gilt

$$f'(z_0) = f_x(z_0) = u_x(z_0) + \mathrm{i}v_x(z_0) = v_y(z_0) - \mathrm{i}u_y(z_0) = -\mathrm{i}f_y(z_0).$$

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 2.* ■

Bevor wir nun Beispiele betrachten, beleuchten wir zwei einfache Anwendungen der CRDen.

**Folgerung 1.2.7.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f = u + \mathrm{i}v : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Die partiellen Ableitungen $u_x, u_y, v_x$ und $v_y$ seien in ganz $D$ existent und stetig und erfülle n ferner die CRDen. Dann ist $f$ holomorph in $D$.

**Satz 1.2.8.**
Es sei $f \in H(D)$ mit $f' \equiv 0$ in $D$. Dann ist $f$ konstant.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 2.* ■

Nun diskutieren wir wie angekündigt einige Beispiele.

**Beispiel 1.2.9.**

a) $f(z) = |z|$. Es gilt $f(x+\mathrm{i}y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Die CRDen liefern als einzige Kandidatenstelle $(0,0)$, dort ist $f$ aber nicht total differenzierbar. Also ist $f$ in keinem Punkt komplex differenzierbar.

b) $f(z) = z^2$. Es gilt $f(x+\mathrm{i}y) = x^2 - y^2 + \mathrm{i} \cdot 2xy$. Die CRDen gelten in jedem Punkt, daher ist $f$ ganz. Dies kann man allgemeiner für jedes Monom und damit auch für jedes Polynom zeigen.

c) $f(z) = \operatorname{Re} z$. Es gilt $f(x+\mathrm{i}y) = x$. Die CRDen liefern keine Kandidatenstelle, somit ist $f$ nirgends komplex differenzierbar.

Bisher haben wir wenig Beispiele für holomorphe Funktionen. Wir werden nun für eine große Klasse von Funktionen die Holomorphie nachweisen: Für Potenzreihen.
Wir betrachten komplexe Potenzreihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k,\ a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}. \tag{1.6}$$

Diese haben Konvergenzradius $\rho > 0$, den wir wie im Reellen mit der Formel von Cauchy-Hadamard berechnen können. Daher wird durch

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k,\ \rho_f := \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}},$$

eine Funktion in $U_{\rho_f}(z_0)$ definiert, wobei die Reihe in jedem Kreis $B_r(z_0)$, $0 < r < \rho_f$, gleichmäßig konvergiert. Aus der Analysis ist dann bekannt, dass $f$ stetig auf $U_{\rho_f}(z_0)$ ist.

**Satz 1.2.10.**
Es sei $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann ist $f \in H(U_\rho(z_0))$ mit

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z-z_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (z-z_0)^k,\ z \in U_\rho(z_0). \tag{1.7}$$

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 2.* ■

Nun können wir interessante Beispiele betrachten.

**Beispiel 1.2.11.**

a) Wir definieren die aus dem Reellen bekannte Exponentialfunktion sowie Kosinus und Sinus auch im Komplexen und zwar durch die entsprechenden Potenzreihen:

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},\ \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k},\ \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1},\ z \in \mathbb{C}.$$

Dies sind ganze Funktionen. Für die Ableitungen erhält man dieselben Resultate wie im Reellen:

$$\exp'(z) = \exp(z),\ \sin' z = \cos z,\ \cos' z = -\sin z.$$

Insbesondere sind $\exp, \sin$ und $\cos$ ganze Funktionen.

b) Mit dem Cauchyprodukt erhält man auch hier das Additionstheorem

$$e^{z+w} = e^z e^w,\ z, w \in \mathbb{C}. \tag{1.8}$$

Hieraus folgt $e^z \neq 0$ und $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

c) Ersetzen wir in der Exponentialreihe $z$ durch $\mathrm{i}z$, so folgt:

$$e^{\mathrm{i}z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k!} z^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l)!} z^{2l} + \mathrm{i} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} z^{2l+1} = \cos z + \mathrm{i} \cdot \sin z.$$

Hieraus erhält man die *Eulersche Formel*

$$e^{x+\mathrm{i}y} = e^x (\cos y + \mathrm{i} \sin y), \tag{1.9}$$

sowie die Beziehungen

$$\operatorname{Re} e^z = e^x \cos y,\ \operatorname{Im} e^z = e^x \sin y \text{ und } |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

Insbesondere folgt $e^{2\pi \mathrm{i}} = 1$, $e^{\pi \mathrm{i}} = -1$ und $e^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$. Die komplexe Exponentialfunktion ist daher periodisch.

d) Wegen $e^{\mathrm{i}z} = \cos z + \mathrm{i}\sin z$ und $e^{-\mathrm{i}z} = \cos z - \mathrm{i}\sin z$ erhalten wir durch Addition bzw. Subtraktion dieser Gleichungen die folgenden Formeln:

$$\cos z = \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}\right), \ \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}\right) \tag{1.10}$$

Hieraus folgt, dass die aus dem Reellen bekannten Additionstheoreme auch im Komplexen gelten. Insbesondere behält auch die Gleichung $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ für jedes $z \in \mathbb{C}$ ihre Gültigkeit. Ferner bleibt die $2\pi$-Periodizität von cos und sin im Komplexen erhalten.

e) Nun kann man auch die Hyperbelfunktionen in's Komplexe fortsetzen:

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}), \ \sinh z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}).$$

Auch hier bleiben die bekannten Ableitungen $\sinh' z = \cosh z$ und $\cosh' z = \sinh z$ erhalten. Ferner erhalten wir

$$\sinh z = \mathrm{i}\sin(\mathrm{i}z) \text{ und } \cosh z = \cos(\mathrm{i}z).$$

f) Aus diesen Darstellungen erhält man die Zerlegung von Kosinus und Sinus in Real- und Imaginärteil:

$$\cos(x + \mathrm{i}y) = \cos x \cosh y - \mathrm{i}\sin x \sinh y \tag{1.11}$$

$$\sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cosh y + \mathrm{i}\cos x \sinh y \tag{1.12}$$

Hieraus folgt nun, dass Kosinus und Sinus im Komplexen nur die aus dem Reellen bekannten Nullstellen hat. Damit können wir schließlich auch die Funktionen *Tangens*, *Kotangens*, tanh und coth in's Komplexe fortsetzen.[2]

Als Abschluss dieses Abschnitts betrachten wir nach der Exponentialfunktion nun den Logarithmus im Komplexen. Wir werden sehen, dass dies ein wenig diffiziler ist.

**Beispiel 1.2.12.**

Die reelle Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und hat daher eine Umkehrfunktion. Im Komplexen gilt dies nicht mehr, da die Exponentialfunktion $2\pi\mathrm{i}$-periodisch ist.
Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezeichnen wir jede Lösung der Gleichung $e^z = w$ mit $z = \log w$. Es gelten hiermit folgende zwei Aussagen:

- $\log w \mod 2\pi\mathrm{i}$ ist eindeutig bestimmt.
- $\log(w_1 w_2) = (\log w_1 + \log w_2) \mod 2\pi\mathrm{i}$.

Der **Hauptzweig des Logarithmus** ist dann die Umkehrfunktion $\mathrm{Log}\colon \mathbb{C}_- \to S$. Es ist $\mathrm{Log} \in H(\mathbb{C}_-)$ und $\mathrm{Log}' z = \frac{1}{z}$. Ferner ist

$$\mathrm{Log}\ z = \mathrm{Log}\ re^{\mathrm{i}\varphi} = \log|z| + \mathrm{i}\cdot \mathrm{Arg}\ z \text{ und } \log z = \log|z| + \mathrm{i}\cdot \arg\ z.$$

Zweige des komplexen Logarithmus unterscheiden sich also nur um additive Konstanten, genauer um Vielfache von $2\pi$ (welche aus der Wahl des Arguments stammen).

Der komplexe Logarithmus lässt sich also nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ definieren. Dies liegt daran, dass die unterliegende Struktur eine sogenannte *Riemannsche Fläche* ist, im Fall des Logarithmus eine geometrische Form ähnlich einer Wendeltreppe. Wir werden dies in einem späteren Kapitel behandeln, als Literatur sei an dieser Stelle jedoch vorgreifend schon einmal [5] empfohlen.

[2] Diese sind allerdings nicht mehr ganz, da sie in den Nullstellen des auftretenden Nenners nicht definiert und somit auch nicht holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ sind.

## 1.3 Der Integralsatz von Cauchy

Nachdem wir im vorigen Abschnitt den passenden Differenzierbarkeitsbegriff für komplexwertige Funktionen definiert haben, fehlt uns nun noch der passende Integralbegriff. Hierbei lassen wir uns von Kurvenintegralen im $\mathbb{R}^2$ inspirieren und treffen folgende

**Definition 1.3.1.**

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in C(D, \mathbb{C})$. Zudem sei $\gamma$ eine Kurve in $D$, für die eine Parameterdarstellung $z : [a, b] \to \mathbb{C}$ existiert, die stetig differenzierbar ist mit $z'(t) \neq 0$ für $t \in [a, b]$. Dann heißt

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t)\mathrm{d}t \in \mathbb{C} \tag{1.13}$$

das **komplexe Kurvenintegral** von $f$ längs $\gamma$. Weiter setzen wir

$$\int_\gamma f(z)\,|\mathrm{d}z| := \int_a^b f(z(t)) \cdot \left|z'(t)\right| \mathrm{d}t \in \mathbb{C}.$$

Den **Träger** von $\gamma$ bezeichnen wir mit $|\gamma|$, d.h. $|\gamma| := \{z(t)\colon t \in [a, b]\}$. $z(a)$ heißt **Anfangspunkt**, $z(b)$ **Endpunkt** von $\gamma$. Ist $\Gamma := \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ stückweise glatt, so setzen wir

$$\int_\Gamma f(z)\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z.$$

Eine stückweise glatte Kurve heißt **Integrationsweg**.

Mit dieser Setzung zeigt man wie in der Analysis, dass folgende Rechenregeln gelten:

**Satz 1.3.2.**

Es gilt für komplexe Kurvenintegrale:

1) $\int_\gamma (f(z) + g(z))\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z + \int_\gamma g(z)\ \mathrm{d}z$
2) $\int_\gamma c \cdot f(z)\ \mathrm{d}z = c \cdot \int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z,\ c \in \mathbb{C}$
3) $\int_{-\gamma} f(z)\ \mathrm{d}z = -\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z;\ \int_{-\gamma} f(z)\ |\mathrm{d}z| = \int_\gamma f(z)\ |\mathrm{d}z|$
4) $\left|\int_\gamma f(z)\ \mathrm{d}z\right| \leq \int_\gamma |f(z)|\ |\mathrm{d}z| \leq \max_{z\in|\gamma|} |f(z)| \cdot L(\gamma)$, wobei $L(\gamma)$ die Länge von $\gamma$ ist.

Man kann leicht zeigen (vgl. Aufgabe 1.9), dass das Kurvenintegral unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung ist. Daher haben wir eine gewisse Freiheit bei der Parametrisierung von Kurven. Wir geben hierfür nun ein paar Beispiele.

**Beispiel 1.3.3.**

a) Die Strecke zwischen $a$ und $b$ bezeichnen wir mit $[a, b]$ und parametrisieren sie standardmäßig durch $z(t) = a + (b - a)t$, $t \in [0, 1]$. Wir schreiben $\int_a^b f(z)\mathrm{d}z = \int_{[a,b]} f(z)\mathrm{d}z$.
b) Die Kreislinie $K_r(z_0)$ parametrisieren wir standardmäßig mit $z(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$. Wir schreiben $\int_{K_r(z_0)} f(z)\mathrm{d}z = \int_{\partial U_r(z_0)} f(z)\mathrm{d}z = \int_{|z-z_0|=r} f(z)\mathrm{d}z$.
c) Bei „einfachen“ Gebieten $D$, wie z.B. Dreiecken, Vierecken usw., schreiben wir einfache $\int_{\partial D} f(z)\mathrm{d}z$.

In der reellen Integrationstheorie spielt der Begriff der Stammfunktion eine wichtige Rolle. Wir werden diesen Begriff nun auf komplexwertige Funktionen übertragen und anschließend die Existenz einer solchen *komplexen* Stammfunktion untersuchen.

**Definition 1.3.4.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Ein $F : D \to \mathbb{C}$ heißt **komplexe Stammfunktion** oder kurz Stammfunktion von $f$, wenn $F \in H(D)$ und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$ gilt.

**Satz 1.3.5.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann sind äquivalent:

a) $f$ besitzt in $D$ eine Stammfunktion $F$.

b) Für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma$ in $D$ gilt $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

c) Für je zwei Integrationswege $\gamma_1, \gamma_2$ mit gleichen Anfangs- und Endpunkten gilt: $\int\limits_{\gamma_1} f(z)\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\mathrm{d}z$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 3.* ■

Wir wollen nun den Integralsatz von Cauchy beweisen. Dieser macht grob gesagt eine Aussage darüber, unter welchen Voraussetzungen das komplexe Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve verschwindet. Dafür brauchen wir allerdings noch einige vorbereitende Dinge. Wir beginnen mit dem Beweis des *Lemmas von Goursat*, welches der Schlüssel zum Beweis des Integralsatzes (und gleichzeitig ein wichtiger Spezialfall desselben) ist.

**Lemma 1.3.6 (*Lemma von Goursat*).**
Es sei $f \in H(D)$, $a, b, c \in D$ paarweise verschieden, $\Delta \subset D$ das abgeschlossene Dreieck mit den Ecken $a, b$ und $c$ und $T := \partial\Delta$. Dann gilt $\int\limits_T f(z)\mathrm{d}z = 0$. Die Aussage bleibt richtig, wenn es ein $z_0 \in D$ gibt, so dass $f$ stetig in $D$ und holomorph in $D \setminus \{z_0\}$ ist.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 3.* ■

Ähnlich wie in der reellen Analysis müssen wir zur Existenz einer Stammfunktion (das reelle Analogon wäre ein zweidimensionales Potential) Einschränkungen an das Gebiet treffen müssen, wenn wir keine Voraussetzungen an die Kurvenintegrale (wie in Satz 1.3.5 stellen wollen) müssen. Auch bei der komplexen Integration ist der Schlüsselbegriff hierbei die *Sternförmigkeit* eines Gebiets.

**Definition 1.3.7.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. $D$ heißt **sternförmig**, wenn es ein $a \in D$ gibt, so dass $[a, z] \subset D$ für jedes $z \in D$ gilt. $a$ heißt dann ein **Zentrum** von $D$.

**Beispiel 1.3.8.**

a) Das Zentrum eines sternförmigen Gebiets ist nicht eindeutig: Jedes konvexe Gebiet ist sternförmig und jeder Punkt eines konvexen Gebiets ist ein Zentrum.

b) Die Menge $\mathbb{C}_-$ aus Beispiel 1.2.12 ist sternförmig, $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ hingegen nicht.

**Satz 1.3.9.**
Es sei $f \in H(D)$ und $D$ sei sternförmig. Dann besitzt $f$ eine Stammfunktion $F$ in $D$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 3.* ■

**Satz 1.3.10 (*Integralsatz von Cauchy*).**
Es sei $f \in H(D)$ und $D$ sei sternförmig. Dann gilt für jeden geschlossenen Integrationsweg $\gamma$:

$$\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Beweis. Nach Satz 1.3.9 besitzt $f$ eine Stammfunktion. Dann folgt die Behauptung aus Satz 1.3.5. ■

Als erste Anwendung des Integralsatzes von Cauchy zeigen wir, dass $z \mapsto \frac{1}{z}$ keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt.

**Beispiel 1.3.11.**

Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $k \in \mathbb{Z}$. Wir berechnen das Integral

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k \mathrm{d}z.$$

Dazu parametrisieren wir die Kreislinie durch $z(t) = z_0 + re^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$ mit $z'(t) = \mathrm{i}re^{\mathrm{i}t}$. Mit der Definition des komplexen Kurvenintegrals gilt nun

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k \mathrm{d}z = \mathrm{i}r^{k+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}(k+1)t} \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq -1 \\ 2\pi\mathrm{i} & : \quad k = -1 \end{cases}.$$

Somit kann die Funktion $\frac{1}{z}$ nach Satz 1.3.5 keine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ haben. Dieses Gebiet ist nicht sternförmig, was sich mit dem Integralsatz von Cauchy deckt.

## 1.4 Die Integralformel von Cauchy

Im vorigen Abschnitt haben wir den Integralsatz von Cauchy kennengelernt, der charakterisiert, unter welchen Voraussetzungen das Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve verschwindet. Wir können allerdings noch mehr zeigen: Für eine auf $B_r(z_0)$ holomorphe Funktion sind die Werte in $U_r(z_0)$ durch die Werte auf dem Rand $K_r(z_0)$ eindeutig festgelegt. Dies ist – etwas unpräzise – die Aussage der *Integralformel von Cauchy*, die wir in diesem Abschnitt beweisen werden. Dazu benötigen wir ein wenig technische Vorarbeit.

**Definition 1.4.1.**
Es sei $\gamma$ ein Integrationsweg in $\mathbb{C}$, $\Phi : |\gamma| \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $F : D := \mathbb{C} \setminus |\gamma| \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$F(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\Phi(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta, \ z \in D. \tag{1.14}$$

Dann heißt $F$ ein **Cauchyintegral**. Allgemeiner definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die **Cauchyintegrale $n$-ter Stufe** $F_n : D \to \mathbb{C}$ durch

$$F_n(z) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\Phi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} \mathrm{d}\zeta, z \in D. \tag{1.15}$$

Wir sammeln nun zunächst einige Eigenschaften von Cauchyintegralen.

**Satz 1.4.2.**

a) Es ist $F_n \in H(D)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist also $F = F_1$ holomorph.

b) Es gilt die Formel $F_n' = nF_{n+1}$.

c) Es gilt $\lim\limits_{z \to \infty} F_n(z) = 0$.

d) Ist speziell $\Phi(\zeta) = 1$ für alle $\zeta \in |\gamma|$ und $\gamma$ ein *geschlossener* Integrationsweg, so ist für jedes $a \in D$ die Zahl

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}z}{z - a} \tag{1.16}$$

eine ganze Zahl und in jeder (topologischen) Zusammenhangskomponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ konstant. Insbesondere gilt $n(\gamma, a) = 0$, wenn $a$ in der unbeschränkten Komponente von $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ liegt.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 4.* ■

**Definition 1.4.3.**
Die Zahl $n(\gamma, a)$ aus (1.16) heißt **Windungszahl** von $\gamma$ um $a$.

Nun können wir die Integralformel von Cauchy beweisen. Anschließend verallgemeinern wir sie direkt auf Ableitungen und ziehen erste interessante Folgerungen – unter anderem beweisen wir den Fundamentalsatz der Algebra.

**Satz 1.4.4 (*Integralformel von Cauchy*).**
Es sei $f \in H(D)$, $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset D$. Dann gilt für alle $z \in U_r(z_0)$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \mathrm{d}\zeta. \tag{1.17}$$

Insbesondere gilt die *Mittelpunktsformel* $f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}t}) \mathrm{d}t$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 4.* ■

Die Werte holomorpher Funktionen auf einer (abgeschlossenen) Kreisscheibe sind also bereits durch die Werte auf dem Rand dieser Kreisscheibe festgelegt!
Wir können diesen Satz noch verallgemeinern.

**Satz 1.4.5 (*Integralformel von Cauchy für Ableitungen*).**
Es sei $f \in H(D)$. Dann ist $f$ unendlich differenzierbar. Ist $z_0 \in D$ und $r > 0$ mit $B_r(z_0) \subset D$, so gilt für alle $z \in U_r(z_0)$ und $k \in \mathbb{N}_0$:

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi\mathrm{i}} \int\limits_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta. \tag{1.18}$$

Beweis. Vollständige Induktion nach $k$ und Satz 1.4.4. ∎

Beachte, dass
Eine unmittelbare Folgerung aus der Cauchyformel für Ableitungen ist folgender

**Satz 1.4.6 (*Cauchyabschätzungen*).**
Es sei $f \in H(D)$, $z_0 \in D$ und $0 < r < R$ mit $B_r(z_0) \subset D$. Dann gilt für $k \in \mathbb{N}_0$:

$$\max_{z \in B_r(z_0)} \left| f^{(k)}(z) \right| \leq \frac{k!R}{(R-r)^{k+1}} \cdot \max_{\zeta \in K_r(z_0)} |f(\zeta)| \,. \tag{1.19}$$

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 4.* ∎

Wir werden nun einen ersten sehr mächtigen Satz beweisen, der kein reelles Analogon besitzt.

**Satz 1.4.7 (*Satz von Liouville*).**
Es sei $f$ eine ganze beschränkte Funktion. Dann ist $f$ konstant.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 4.* ∎

**Beispiel 1.4.8.**
Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) = \sin z$. Nach Beispiel 1.2.11 a) ist $f$ eine ganze Funktion und offensichtlich nicht konstant. Mit dem Satz von Liouville 1.4.7 folgt dann, dass $f$ nicht beschränkt ist. Genauso verhält es sich mit dem Kosinus.

Dieser Satz ist nun der Schlüssel zum Beweis des *Fundamentalsatzes der Algebra*, den wir in folgender Version notieren wollen.

**Satz 1.4.9 (*Fundamentalsatz der Algebra*).**
Es sei $P$ ein Polynom mit $\deg P = n \geq 1$. Dann besitzt $P$ mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 4.* ∎

**Folgerung 1.4.10.**
Es sei $P$ ein Polynom mit $\deg P = n$. Dann existieren $c, z_0, \ldots, z_m \in \mathbb{C}$ und $k_1, \ldots, k_m$ mit $\sum\limits_{j=1}^{m} k_j = n$ und $P(z) = c \cdot \prod\limits_{j=1}^{m} (z - z_j)^{k_j}$.

Beweis. Fortgesetztes Abspalten von Linearfaktoren und Satz 1.4.9. ∎

Zum Abschluss dieses Abschnitts wollen wir nun den Integralsatz von Cauchy gewissenermaßen umkehren. Wir erhalten

**Satz 1.4.11 (*Satz von Morera*).**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in C(D, \mathbb{C})$ und für jedes abgeschlossene Dreieck $\Delta \subset D$ gelte $\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\mathrm{d}z = 0$. Dann ist $f \in H(D)$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 5.* ■

## 1.5 Homologie

Wir wollen nun den Cauchy-Integralsatz auf eine größere Klasse von Gebieten verallgemeinern. Dazu führen wir zunächst den Begriff der Homologie ein.

**Definition 1.5.1.**

Es seien $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ geschlossene Integrationswege.

a) $\gamma := \overset{m}{\underset{j=1}{+}} \gamma_j$ heißt **Zyklus**. Der **Träger** von $\gamma$ ist definiert durch $|\gamma| := \bigcup_{j=1}^{m} |\gamma_j|$.

b) Ist $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ stetig, so definieren wir die Integrale

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z := \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z \text{ und } \int_\gamma f(z)\,|\mathrm{d}z| := \sum_{j=1}^{m} \int_{\gamma_j} f(z)\,|\mathrm{d}z|\,.$$

c) Ein Zyklus $\gamma$ in $D$ heißt **nullhomolog modulo $D$**, wenn $n(\gamma, a) = 0$ für alle $a \in \mathbb{C} \setminus D$ gilt. Wir schreiben dann $\gamma \sim 0 \mod D$.

d) Zwei Zyklen heißen **homolog modulo $D$**, falls ihre Differenz nullhomolog modulo $D$ ist.

e) Die Menge aller Zyklen auf $D$ bezeichnen wir mit $\mathrm{Zyk}(D)$.

---

Mit dieser Begrifflichkeit können wir nun zunächst die sogenannte *Homologieversion des Integralsatzes von Cauchy* beweisen. Um dies allerdings möglichst effizient zu tun, beweisen wir zunächst

**Satz 1.5.2 (*Homologieversion der Integralformel von Cauchy*).**

Es sei $f \in H(D)$ und $\gamma$ ein nullhomologer Zyklus modulo $D$. Dann gilt für $z \in D \setminus |\gamma|$:

$$n(\gamma, z) \cdot f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta.$$

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 5.* ■

---

**Satz 1.5.3 (*Homologieversion des Integralsatzes von Cauchy*).**

Es sei $f \in H(D)$ und $\gamma$ ein nullhomologer Zyklus modulo $D$. Dann gilt $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 5.* ■

---

Neben der Homologieversion gibt es auch noch eine *Homotopie*version des Integralsatzes von Cauchy, welche wir allerdings erst später behandeln werden, da sie einige Voraussetzungen benötigt, die wir an dieser Stelle noch nicht zur Verfügung haben.

Wir wollen nun zeigen, dass der Integralsatz von Cauchy auch für *einfach zusammenhängende* Gebiet gilt. Diesen Begriff müssen wir zunächst definieren, machen dies aber direkt für mehrfach zusammenhängende Gebiete.

**Definition 1.5.4.**

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $m \in \mathbb{N}$.

a) $D$ heißt **$m$-fach zusammenhängend**, wenn $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ aus genau $m$ Zusammenhangskomponenten besteht. Die Zahl $m$ heißt die **Zusammenhangszahl** von $D$.

b) Besteht $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ aus unendlich vielen Komponenten, so heißt $D$ **unendlichfach zusammenhängend**.

c) $D$ heißt **mehrfach zusammenhängend**, wenn $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ mindestens zwei Komponenten hat.

---

**Bemerkung 1.5.5.**

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist also einfach zusammenhängend, wenn $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ zusammenhängend ist.

---

**Beispiel 1.5.6.**

a) Die Gebiete $\mathbb{C}$ und $\widehat{\mathbb{C}}$ sind einfach zusammenhängend. Ferner sind Kreisscheiben und Halbebenen einfach zusammenhängend.

b) $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist zweifach zusammenhängend, ebenso wie Kreisringe.

c) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $B_1(0) \setminus \left\{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\right\}$ sind unendlichfach zusammenhängende Gebiete.

Wir zeigen nun den Integralsatz von Cauchy für einfach zusammenhängende Gebiete.

**Satz 1.5.7.**

Es $f \in H(D)$ und $D$ einfach zusammenhängend. Dann gilt $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ für alle $\gamma \in \mathrm{Zyk}(D)$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 5.* ■

Wir wollen nun äquivalente Kriterien finden, wann ein Gebiet einfach zusammenhängend ist. Damit der Beweis übersichtlich bleibt, gliedern wir zunächst wichtige Aussagen aus. Wir beginnen mit einer einfachen Folgerung aus den bisherigen Ergebnissen.

**Satz 1.5.8.**

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in H(D)$. Dann besitzt $f$ eine Stammfunktion in $D$.

Beweis. Folgt aus Satz 1.3.5 und Satz 1.5.7. ■

Für die Beweise der folgenden Aussagen benötigen wir ein wenig neue Terminologie:

**Definition 1.5.9.**

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Menge $\Gamma$ von Zyklen heißt **Homologiebasis von *D***, wenn gilt:

$$\forall\ \gamma \in \mathrm{Zyk}(D)\ \exists!\ \gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \Gamma\ \exists\ c_1, \ldots, c_m \in \mathbb{Z}\ \forall\ a \in \mathbb{C} \setminus D \colon n(\gamma, a) = \sum_{j=1}^m c_j n(\gamma_j, a). \tag{1.20}$$

Wir schreiben in diesem Falle $\gamma \sim \underset{j=1}{\overset{m}{+}} \gamma_j$.

**Beispiel 1.5.10.**

a) Einfach zusammenhängende Gebiet brauchen keine Homologiebasis.

b) Es sei $K_{r_1,r_2} := \{z \in \mathbb{C} \colon r_1 < |z| < r_2\}$ der Kreisring um 0 mit innerem Radius $r_1$ und äußerem Radius $r_2$, $0 < r_1 < r_2 \leq \infty$. Dann ist die Menge $\Gamma := \{\gamma_r\}_{r \in (r_1,r_2)}$ mit $\gamma_r : [0, 2\pi] \to K_{r_1,r_2},\ \gamma_r(t) = re^{\mathrm{i}t}$ eine (*überabzählbare*) Homologiebasis von $K_{r_1,r_2}$.

**Satz 1.5.11.**

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein $m$-fach zusammenhängendes Gebiet mit $m \geq 2$. Dann besitzt $D$ eine Homologiebasis aus $m-1$ Elementen.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 6.* ■

Zusammenfassend liegt die Bedeutung von Homologiebasen nun in folgender Tatsache: Ist $f \in H(D)$, so gilt $\int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \sum\limits_{j=1}^{m-1} \int\limits_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z$.

**Kommentar:** Wer nun nur das Skript liest, wird die Notwendigkeit von Satz 1.5.11 nicht direkt einsehen können. Der springende Punkt hierbei ist die Konstruktion der angegebenen Homologiebasis im Beweis. Diese Konstruktion taucht auch in den nachfolgenden Sätzen (bzw. in deren Beweisen) erneut auf.

**Satz 1.5.12.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass gilt: $\gamma \in \mathrm{Zyk}(D) \Rightarrow \gamma \sim 0 \mod D$. Dann ist $D$ einfach zusammenhängend.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 6.* ■

**Satz 1.5.13.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, so dass für jedes $f \in H(D)$ und jedes $\gamma \in \mathrm{Zyk}(D)$ gilt: $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$. Dann ist $D$ einfach zusammenhängend.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 6.* ■

Damit sind wir nun in der Lage, äquivalente Kriterien für den einfachen Zusammenhang eines Gebietes zu beweisen.

**Satz 1.5.14.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $D$ ist einfach zusammenhängend.

b) Jede in $D$ holomorphe Funktion besitzt eine Stammfunktion.

c) $\forall\, \gamma \in \mathrm{Zyk}(D), f \in H(D)\colon \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$.

d) $\gamma \in \mathrm{Zyk}(D) \Rightarrow \gamma \sim 0 \mod D$.

Beweis. Siehe Aufgabe 1.18. ■

Wir beenden dieses Kapitel nun mit einem Satz zur Existenz von Zweigen der $m$-ten Wurzel und holomorphen Logarithmuszweigen.

**Satz 1.5.15.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in H(D)$, sodass $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$ gelte. Dann gelten:

a) $f$ besitzt einen holomorphen Zweig des Logarithmus, d.h. es existiert ein $h \in H(D)$ mit $e^{h(z)} = f(z)$.

b) $f$ besitzt für $m \in \mathbb{N}$ einen holomorphen Zweig der $m$-ten Wurzel für $m \geq 2$, d.h. es existiert ein $g \in H(D)$ mit $(g(z))^m = f(z)$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 6.* ■

**Bemerkung 1.5.16.**

a) $g$ ist bist auf einen Faktor $e^{2k\pi \mathrm{i}/m}$ eindeutig bestimmt und man schreibt auch $g = \sqrt[m]{f} = f^{1/m}$.

b) $h$ ist modulo $2\pi\mathrm{i}$ eindeutig bestimmt und man schreibt auch $h = \log f$.

c) Für $\alpha \in \mathbb{C}$ definiert man hiermit $f^\alpha := e^{\alpha \log f} = e^{\alpha h}$.

# Übungen zu Kapitel 1

Die Übungen mit ($*$) sind diejenigen, die in der Vorlesung dazugekommen sind. Diejenigen mit ($\diamond$) sind (in der präsentierten Form) besonders anspruchsvoll.

## Zu komplexen Zahlen

**Aufgabe 1.1 ($*$).**
Beweise die Aussage aus Bemerkung 1.1.3 a).

**Aufgabe 1.2 ($*$).**
Beweise Satz 1.1.7.

**Aufgabe 1.3 ($*$).**
Beweise Satz 1.1.8.

## Zur Holomorphie

**Aufgabe 1.4.**
Zeige *mit den CRDen*, dass $f(z) = \exp(z)$ ganz ist.

**Aufgabe 1.5.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$. Ferner definieren wir $D^* := \{z \in \mathbb{C} \colon \overline{z} \in D\}$ und $f^* : D^* \to \mathbb{C}$ durch $f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}$ für $z \in D^*$. Zeige, dass $f^* \in H(D^*)$ mit $(f^*)' = \overline{f'(\overline{z})}$ für $z \in D^*$ gilt.

**Aufgabe 1.6.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir definieren auf dem Raum der reell differenzierbaren Funktionen $f : D \to \mathbb{C}$ die beiden Differentialoperatoren $\partial, \overline{\partial}$ durch

$$\partial := \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right) \text{ und } \overline{\partial} := \frac{\partial}{\partial \overline{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

a) Zeige, dass $\partial$ und $\overline{\partial}$ beide $\mathbb{C}$-linear sind.

**Hinweis:** Ein Operator $A$ heißt $\mathbb{C}$-linear, falls $A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$ für alle gültigen $x, y$ und alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt.

b) Zeige, dass jede Funktion $f \in H(D)$ die Gleichung $\overline{\partial} f = 0$ in $D$ erfüllt.

*Anmerkung:* $\overline{\partial}$ ist die sogenannte Wirtinger-Ableitung von $f$.

c) Leite mit Hilfe von $\partial$ und $\overline{\partial}$ Darstellungen für $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ her.

**Aufgabe 1.7.**

a) Es sei $f$ eine ganze Funktion mit $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeige, dass $f$ konstant ist.

b) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f \in H(D)$ so, dass $|f|$ konstant ist. Zeige, dass $f$ konstant ist.

**Aufgabe 1.8.**
Beweise die Darstellungsformeln aus Satz 1.2.6.

## Zum komplexen Kurvenintegral

**Aufgabe 1.9.**
Zwei Parameterdarstellungen $z_1, z_2$ einer Kurve $\gamma$ heißen äquivalent, falls es eine bijektive, stetig differenzierbare Funktion $h : [a, b] \to [c, d]$ mit $z_2(t) = z_1(h(t))$ gibt. Zeige, dass äquivalente Parameterdarstellungen das gleiche Kurvenintegral liefern.

**Aufgabe 1.10.**
Es sei $\gamma$ der Rand des Quadrats in $\mathbb{C}$ mit den Eckpunkten $1+\mathrm{i}$, $-1+\mathrm{i}$, $-1-\mathrm{i}$ und $1-\mathrm{i}$, welches positiv durchlaufen wird. Berechne $\int_\gamma z^m \mathrm{d}z$ für $m \in \mathbb{Z}$.

**Aufgabe 1.11 (◇).**
Berechne den Wert der *Fresnel-Integrale* $\int\limits_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$ und $\int\limits_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x$.

**Hinweis:** Es gilt die Identität $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. (Warum?)

### Zum Integralsatz von Cauchy und zur Cauchyintegralformel

**Aufgabe 1.12 (∗).**
Zeige $H'(t) = 0$ für alle $t \in [0,1]$ für die Funktion $H$ aus dem Beweis von Satz 1.4.2 d).

**Aufgabe 1.13.**
Beweise die Mittelpunktsformel:
Es sei $f \in H(D)$ und $z_0 \in D$. Dann gilt $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\mathrm{i}t})\mathrm{d}t$.

**Aufgabe 1.14.**
Die Funktion $f$ sei stetig außerhalb der Kreislinie $K := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| = r_0\}$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $r_0 > 0$. Mit $M(r)$ bezeichnen wir das Maximum der Funktion $|f|$ auf der Kreislinie $K_r := \{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - z_0| = r\}$ mit $r > r_0$.
Zeige: Gilt $\lim\limits_{r\to\infty} rM(r) = 0$, so gilt auch $\lim\limits_{r\to\infty} \int\limits_{K_r} f(z)\mathrm{d}z = 0$.

**Aufgabe 1.15.**
Eine Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ heißt *doppelt periodisch*, falls es zwei $\mathbb{R}$-linear unabhängige Vektoren $w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $f(z) = f(z + w_1) = f(z + w_2)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.
Finde alle holomorphen doppelt periodischen Funktionen von $\mathbb{C}$ auf $\mathbb{C}$.

**Hinweis:** Satz von Liouville.

**Aufgabe 1.16 (◇).**
Es sei $f \in H(\mathbb{D})$ mit $C := \sup\limits_{z,w\in\mathbb{D}} |f(z) - f(w)|$. Zeige: $2\,|f'(0)| \le C$.

**Hinweis:** Leite zunächst eine Cauchysche Integralformel für $f'(0)$ mit Integrandem $\frac{f(-\zeta)}{\zeta^2}$ her.

**Aufgabe 1.17 (◇).**
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $f \in H(\mathbb{C})$. Wir setzen $\mathbb{P}_{\le n} := \{P : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid P \text{ ist ein Polynom mit } \deg(P) \le n\}$.
Zeige: $f \in \mathbb{P}_{\le n} \Leftrightarrow \exists\, a, b \in \mathbb{R}^{>0}\colon\ |f(z)| \le a + b\,|z|^n$.

### Zur Homologie

**Aufgabe 1.18.**
Beweise Satz 1.5.14.

Hinweis: Die nachfolgenden Aufgaben zur Homologie benötigen zur Lösung das Maximumprinzip, siehe Satz 2.3.1 und 2.3.2.

**Aufgabe 1.19.**
Es sei $A(\overline{\mathbb{D}}) := \left\{f : \overline{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}\colon f \in C(\overline{\mathbb{D}}),\ f \in H(\mathbb{D})\right\}$. Ferner sei $f : \partial\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ stetig und es gebe eine Folge $(f_n) \subset A(\overline{\mathbb{D}})$, die auf $\partial\mathbb{D}$ gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.
Zeige, dass $f$ zu einer Funktion $F \in A(\overline{\mathbb{D}})$ fortgesetzt werden kann, d.h. es gilt $F(\zeta) = f(\zeta)$ für alle $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.

**Aufgabe 1.20.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein $m$-fach zusammenhängendes Gebiet mit $m \ge 2$, $A_1, \ldots, A_{m-1}$ die beschränkten Zusammenhangskomponenten von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$, $G := D \cup \bigcup\limits_{j=1}^{m} A_j$, $f \in H(D)$ und es gebe eine Folge $(f_n) \subset H(G)$, die in $D$ lokal gleichmäßig gegen $f$ konvergiert.
Zeige, dass $f$ zu einer Funktion $F \in H(G)$ fortgesetzt werden kann, d.h. es gilt $F(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.

# 2 Potenzreihenentwicklung und Folgerungen

## Inhaltsangabe

## 2.1 Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir sinngemäß eine Umkehrung von Satz 1.2.10, und zwar wollen wir zeigen, dass eine holomorphe Funktion (in einem gewissen Gebiet) in eine Potenzreihe entwickelbar ist. Wir beginnen dazu mit der Einführung des richtigen Konvergenzbegriffs für Folgen holomorpher Funktionen.

**Definition 2.1.1.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $(f_n) := (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$.
Die Folge $(f_n)$ ist auf $D$ **lokal gleichmäßig konvergent** gegen eine **Grenzfunktion** $f$, falls gilt:

$$\forall\ z_0 \in D\ \exists\ r > 0, B_r(z_0) \subset D\colon (f_n) \text{ ist gleichmäßig konvergent auf } B_r(z_0). \tag{2.1}$$

Notation: Mit $(f_n) \subset H(D)$ bezeichnen wir eine Folge holomorpher Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, wobei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet ist, sofern nichts anderes gesagt wird.

**Bemerkung 2.1.2.**
Äquivalent zur lokal gleichmäßigen Konvergenz ist die **kompakte Konvergenz**, d.h. $(f_n)$ konvergiert auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$. Dieses Ergebnis erhält man leicht aus dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz[3], es gilt aber nicht in allgemeinen topologischen Räumen, z.B. gilt dies in $C(D)$ nicht (gegeben eine geeignete Metrik)[4].

Mit diesem Begriff ausgestattet können wir nun zeigen, dass lokal gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge $(f_n)$ die Holomorphie der Folgenglieder auf die Grenzfunktion überträgt.

**Satz 2.1.3 (*Satz von Weierstraß*).**
Es sei $(f_n) \subset H(D)$ lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{C}$. Dann gelten:

a) Für jeden Integrationsweg $\gamma$ in $D$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\gamma f_n(z)\mathrm{d}z = \int\limits_\gamma f(z)\mathrm{d}z$.

b) $f \in H(D)$.

c) Für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $f_n^{(k)} \xrightarrow{n\to\infty} f^{(k)}$ lokal gleichmäßig in $D$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesungen 6 und 7.* ■

**Bemerkung 2.1.4.**
Da ein entsprechender Satz auch für lokal gleichmäßig konvergente Reihen gilt, folgt hieraus noch einmal, dass Potenzreihen mit positivem Konvergenzradius holomorph in ihrem Konvergenzkreis sind.

Wir zeigen nun die Umkehrung von Bemerkung 2.1.4. Beachte, dass diese Umkehrung im Reellen für $C^\infty$-Funktionen im Allgemeinen falsch, wie das Gegenbeispiel $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & : \quad x \neq 0 \\ 0 & : \quad x = 0 \end{cases}$ zeigt.

**Satz 2.1.5 (*Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen*).**
Es sei $f \in H(D)$, $z_0 \in D$ und $R := \sup\{r > 0\colon\ U_r(z_0) \subset D\}$. Dann ist $f$ um $z_0$ in eine eindeutig bestimmte Potenzreihe entwickelbar mit Konvergenzradius $\rho \geq R$, es gilt also

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, z \in U_R(z_0), \tag{2.2}$$

mit der Koeffizientenformel

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{K_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta,\ 0 < r < R. \tag{2.3}$$

[3] Siehe Aufgabe 2.2.
[4] Die Konstruktion ist etwas technisch und erfordert einiges an Vorarbeit über die Theorie von Fréchesträumen. Vgl. dazu [14], Beispiel 1.44.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesungen 7.* ■

**Beispiel 2.1.6.**
Es sei $f(z) = \tan z$. Dann gilt $f \in H(U_{\pi/2}(0))$, aber in keinem größeren Kreis um 0. Nach Satz 2.1.5 lässt sich $f(z)$ für $z \in U_{\pi/2}(0)$ als Potenzreihe der Form (2.2) darstellen. Ohne Kenntnis der $a_k$ gilt daher $\rho = \frac{\pi}{2}$.

Eine direkte Folgerung aus Satz 2.1.5 ist

**Folgerung 2.1.7 (*Cauchysche Koeffizientenabschätzung*).**
Es sei $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$. Dann gilt für alle $r \in (0, \rho)$ und $k \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$|a_k| \leq \frac{1}{r^k} \cdot \max_{\zeta \in K_r(z_0)} |f(\zeta)| . \tag{2.4}$$

Beweis. Folgt sofort aus 2.1.5 und (2.2). ■

## 2.2 Identitätssatz und Anwendungen

Wir wollen nun Aussagen über die Nullstellenmenge holomorpher Funktionen treffen. Dazu benötigen wir vorbereitend einige Begrifflichkeiten, die größtenteils schon aus der linearen Algebra oder Analysis bekannt sein dürften.

**Bemerkung 2.2.1.**
Ist $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ ein Polynom vom Grad $n$ (also $a_n \neq 0$ und $a_k = 0$ für $k > n$), so existiert ein $j \in \mathbb{N}$ mit $P(z) = (z - z_0)^j Q(z_0)$, $Q(z_0) \neq 0$, mit einem Polynom $Q$ vom Grad $n - j$.
$j$ heißt die **Vielfachheit** der Nullstelle $z_0$ von $P$.
Mit dem Fundamentalsatz der Algebra folgt, dass $P$ genau $n$ Nullstellen hat (inkl. Vielfachheiten) und daher in Linearfaktoren zerfällt, d.h.

$$P(z) = a_n (z - z_1)^{j_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_m)^{j_m} \tag{2.5}$$

mit $j_1, \ldots, j_m \in \mathbb{N}$ und $\sum_{k=1}^{m} j_k = n$.
Die Vielfachheit einer Nullstelle $z_0$ von $P$ ist auch durch die Ableitungen charakterisiert:

$$P(z_0) = P'(z_0) = \ldots = P^{(j-1)}(z_0),\ P^{(j)}(z_0) \neq 0. \tag{2.6}$$

---

Es stellt sich nun die naheliegende Frage, wie sich die Nullstellenmenge holomorpher Funktionen verhält. Wir beantworten diese Frage nun zunächst für Potenzreihen und treffen vorher noch folgende
Bezeichung: Für $r > 0$ sei $\dot{U}_r(z_0) := U_r(z_0) \setminus \{z_0\}$.

**Satz 2.2.2 (*Identitätssatz für Potenzreihen*).**
Es sei $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$ und es gebe eine Folge $(z_n)$ in $\dot{U}_\rho(z_0)$ mit $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$ und $f(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $a_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$, also $f(z) = 0$ für alle $z \in U_\rho(z_0)$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 7.* ∎

---

Nun verallgemeinern wir dieses Ergebnis für holomorphe Funktionen auf Gebieten, die eine Menge mit Häufungspunkt beinhalten.

**Satz 2.2.3 (*Identitätssatz*).**
Es sei $f \in H(D)$, $M \subset D$ eine Menge mit Häufungspunkt in $D$ und $f(m) = 0$ für alle $m \in M$. Dann ist $f(z) = 0$ für alle $z \in D$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesungen 7.* ∎

---

Als erste Anwendung zeigen wir nun

**Folgerung 2.2.4.**
Es sei $f \in H(D)$ und $z_0 \in D$ mit $f^{(k)}(z_0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $f \equiv 0$ auf $D$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 7.* ∎

---

Der Identitätssatz liefert also eine Beschränkung an die Gestalt der Nullstellenmenge. Wir sammeln nun einige Bemerkungen zur Nullstellenmenge.

**Bemerkung 2.2.5.**

a) Es sei $f \in H(D)$ und $f \not\equiv 0$. Wir definieren die Nullstellenmenge von $f$ als

$$Z(f) := \{z \in \mathbb{C} \colon f(z) = 0\}. \tag{2.7}$$

b) $Z(f)$ liegt diskret in $\mathbb{C}$, d.h.

$$\forall\, z_0 \in Z(f)\; \exists\, \delta > 0\colon \dot{U}_\delta(z_0) \cap Z(f) = \emptyset.$$

Man kann nun zeigen, dass eine diskrete Menge höchstens abzählbar ist.

c) $Z(f)$ kann allerdings durchaus eine unendliche Menge sein:

- $f(z) = \sin z$
- $f(z) = \sin \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C}^*$.

d) Ist $z_0 \in Z(f)$, so existiert nach Folgerung 2.2.4 eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ mit $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
Das kleinste solche $k$ nennen wir die **Vielfachheit** von $z_0$.
Es sind äquivalent:

- $k$ ist Vielfachheit der Nullstelle $z_0 \in Z(f)$.
- $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ und $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.
- Es existiert ein $g \in H(D)$ mit $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ und $g(z_0) \neq 0$.

Zum Abschluss dieses Abschnitts beweisen wir

**Folgerung 2.2.6.**
Es seien $f, g \in H(D)$, $M \subset D$ eine Menge mit Häufungspunkt in $D$ und $f(m) = g(m)$ für alle $m \in M$. Dann ist $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D$.

Beweis. Wende den Identitätssatz 2.2.3 auf die Funktion $h := f - g$ an.. ■

## 2.3 Das Maximumprinzip

Wir wollen nun einige weitere wichtige Sätze kennenlernen, die charakterisieren, wann eine holomorphe Funktion konstant ist. Zuerst betrachten wir das sogenannte Maximumprinzip, welches wir in zwei Versionen kennenlernen werden.

**Satz 2.3.1 (*Maximumprinzip, 1. Version*).**
Es sei $f \in H(D)$ und $|f|$ habe in $z_0 \in D$ ein lokales Maximum. Dann ist $f$ konstant.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 8.* ■

**Satz 2.3.2 (*Maximumprinzip, 2. Version*).**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein *beschränktes Gebiet* und $f \in C(\overline{D}) \cap H(D)$. Dann gilt

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in \partial D} |f(z)| . \tag{2.8}$$

Beweis. Da $\overline{D}$ kompakt und $|f|$ stetig ist, existiert $\max\limits_{z \in \overline{D}} |f(z)|$. Die Behauptung folgt dann aus Version 1. ■

Als nächstes dualisieren wir das Maximumprinzip.

**Satz 2.3.3 (*Minimumprinzip*).**
Es sei $f \in H(D)$ und $|f|$ habe in $z_0 \in D$ ein lokales Minimum. Dann ist $f$ konstant oder $f(z_0) = 0$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 8.* ■

**Bemerkung 2.3.4.**
Der Fall $f(z_0) = 0$ kann vorkommen: $f(z) = z^2$, $D = \mathbb{C}$, $z_0 = 0$.

Nun wollen wir zwei wichtige Sätze beweisen, die beide in gewisser Hinsicht das Abbildungsverhalten holomorpher Funktionen beleuchten. Wir beginnen mit dem *Satz von der Gebietstreue*, dem komplexwertigen Analogon zum *Satz von der offenen Abbildung*.

**Satz 2.3.5 (*Satz von der Gebietstreue*).**
Es sei $f \in H(D)$ nichtkonstant. Dann ist $f(D)$ ein Gebiet.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 8.* ■

Als Abschluss dieses Abschnitts beweisen wir nun das *Lemma von Schwarz*, welches holomorphe Funktionen auf dem Einheitskreis $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ genauer beleuchtet.

**Satz 2.3.6 (*Lemma von Schwarz*).**
Es sei $f \in H(\mathbb{D})$, $f(0) = 0$ und $|f(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

a) Es gilt $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in \mathbb{D}$.

b) Gilt $|f'(0)| = 1$ oder $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \in \mathbb{D}$, so existert ein $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und $f(z) = \lambda z$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 8.* ■

Als Anwendung zeigen wir folgendes

**Lemma 2.3.7.**
Es gibt keine Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ mit $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ und $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 8.* ■

## Übungen zu Kapitel 2

Die Übungen mit ($*$) sind diejenigen, die in der Vorlesung dazugekommen sind. Diejenigen mit ($\diamond$) sind (in der präsentierten Form) besonders anspruchsvoll.

### Zur Potenzreihenentwicklung

**Aufgabe 2.1.**
Fülle die Details im Beweis von Folgerung 2.1.7.

**Aufgabe 2.2.**
Zeige, dass lokal gleichmäßige Konvergenz und kompakte Konvergenz in $\mathbb{C}$ äquivalent sind.

### Zum Identitätssatz

**Aufgabe 2.3.**
Bestimme alle ganzen Funktionen $f$ mit $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Aufgabe 2.4 ($\diamond$).**
Bestimme alle ganzen Funktionen $f$ mit $\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Versuche, das Ergebnis zu verallgemeinern.

### Zum Maximumprinzip

**Aufgabe 2.5.**
Zeige oder widerlege folgende Aussagen:

a) Es gibt eine ganze Funktion $f$ mit $f(z) = 1$ auf $\partial\mathbb{D}$ und $f(2) = 2$.

b) Es gibt eine ganze Funktion $f$ mit $f(\mathbb{C}) = \mathbb{R}$.

c) Es gibt eine ganze Funktion $f$ mit $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.

d) Es sei $f$ eine ganze Funktion, sodass $f(\mathbb{R})$ beschränkt ist. Dann ist $f$ konstant.

# 3 Von Singularitäten zum Residuensatz

## Inhaltsangabe

## 3.1 Isolierte Singularitäten

In diesem Abschnitt wollen wir Stellen charakterisieren, an denen Funktionen „standardmäßig“ nicht definiert sind, z.B. $\frac{1}{z}$ in $z = 0$. Wir werden dann sehen, dass holomorphe Funktionen nahe dieser Stellen ein interessantes Verhalten aufweisen und dieses genauer charakterisieren. Zudem führen wir *meromorphe* Funktionen ein, die im weiteren Verlauf eine gewichtige Rolle spielen werden.

**Definition 3.1.1.**

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in D$ und $f \in H(D \setminus \{z_0\})$. Dann heißt $z_0$ eine **isolierte Singularität** von $f$.
Wir unterscheiden die folgenden drei Typen isolierter Singularitäten:

a) $z_0$ heißt eine **hebbare Singularität**, wenn es ein $g \in H(D)$ gibt mit $f(z) = g(z)$ für $z \in D \setminus \{z_0\}$.

b) $z_0$ heißt ein **Pol** von $f$, wenn $|f(z)| \to \infty$ für $z \to z_0$, d.h.

$$\forall\ M > 0\ \exists\ r > 0\colon U_r(z_0) \subset D \text{ und } |f(z)| \geq M \text{ für alle } z \in \dot{U}_r(z_0).$$

c) $z_0$ ist eine **wesentliche Singularität** von $f$, wenn $z_0$ keine hebbare Singularität und kein Pol von $f$ ist.

Bevor wir nun äquivalente Charakterisierungen für die einzelnen Typen isolierter Singularitäten herleiten, geben wir für alle Typen elementare Beispiele an.

**Beispiel 3.1.2.**

a) $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ hat in $z = 0$ und wegen $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}$ ist dies eine hebbare Singularität.

b) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ hat in $z = \pm\mathrm{i}$ isolierte Singularitäten und dies sind Pole.

c) $f(z) = e^{1/z}$ hat in $z = 0$ eine isolierte Singularität.
Wegen $\lim\limits_{z \to 0+} f(z) = \infty$ und $\lim\limits_{z \to 0-} f(z) = 0$ ist dies keine hebbare Singularität und kein Pol, also eine wesentliche Singularität.

d) Man kann auch leicht aus den bisherigen Beispielen Funktionen konstruieren, die jeden Typ isolierter Singularitäten in verschiedenen Punkten annehmen. So hat beispielsweise die Funktion

$$f(z) = \frac{\sin z}{z(z-1)} \cdot e^{-1/(z+1)}$$

eine hebbare Singularität in $z = 0$, einen Pol in $z = 1$ und eine wesentliche Singularität in $z = -1$.

Wir beginnen nun mit äquivalenten Charakterisierungen hebbarer Singularitäten.

**Satz 3.1.3.**

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in D$ und $f \in H(D \setminus \{z_0\})$. Dann gilt:
$f$ hat in $z_0$ eine hebbare Singularität genau dann, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$ gilt.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 9.* ∎

**Satz 3.1.4 (*Riemannscher Hebbarkeitssatz*).**

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in D$ und $f \in H(D \setminus \{z_0\})$. Dann gilt:
$f$ hat in $z_0$ eine hebbare Singularität genau dann, wenn $f$ in einer Umgebung von $z_0$ beschränkt ist.

Beweis. Folgt sofort aus Satz 3.1.3. ∎

Nun leiten wir eine äquivalente Charakterisierung für Pole her, bauen einen Zusammenhang zwischen Pol- und Nullstellen und zeigen, dass jede rationale Funktion eine (komplexe) Partialbruchzerlegung besitzt.

**Satz 3.1.5.**

Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in D$ und $f \in H(D \setminus \{z_0\})$. Dann gilt:
$f$ hat in $z_0$ einen Pol genau dann, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $g \in H(D)$ gibt mit $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$ für $z \in D \setminus \{z_0\}$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 9.* ■

**Definition 3.1.6.**
Die eindeutig bestimmte Zahl $m$ aus dem vorigen Satz heißt **Ordnung des Pols $z_0$ von $f$**.

**Folgerung 3.1.7.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $z_0 \in D$ und $f \in H(D \setminus \{z_0\})$. Dann gilt:
$f$ hat in $z_0$ einen Pol der Ordnung $m$ genau dann, wenn $\frac{1}{f}$ eine $m$-fache Nullstelle in $z_0$ hat.

**Bemerkung 3.1.8.**
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, $f \in H(\dot{U}_R(z_0))$ und $f$ habe in $z_0$ einen $m$-fachen Pol. Dann existiert eine in $U_R(z_0)$ holomorphe Funktion $g$ mit $g(z_0) \neq 0$ und $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m}$. Somit ist $g$ in $U_R(z_0)$ in eine Potenzreihe entwickelbar. Wir schreiben diese Entwicklung wie folgt:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{m} A_k (z-z_0)^{m-k} + (z-z_0)^m \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k, \tag{3.1}$$

wobei $A_j = a_{m-j}$ für $j = 1, \ldots, m$, und $b_j = a_{j+m}$, $j \in \mathbb{N}_0$.

$$f(z) = \underbrace{\sum_{k=1}^{m} \frac{A_k}{(z-z_0)^k}}_{\textbf{Hauptteil von } f} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_0)^k}_{=:h(z),\ h \in H(U_R(z_0))} \tag{3.2}$$

**Beispiel 3.1.9 (*Partialbruchzerlegung*).**
In der Vorlesung leiten wir an dieser Stelle die allgemeine Form der Partialbruchzerlegung rationaler Funktionen $R = \frac{P}{Q}$ mit teilerfremden Polynomen $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k z^k$, $Q(z) = \sum\limits_{l=0}^{n} b_l z^l$ mit $a_m \neq 0$, $b_n = 1$, $m < n$, her.

**Definition 3.1.10.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Funktion $f$ heißt **meromorph** in $D$, falls $f \in H(D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\})$ gilt, wobei $z_1, \ldots, z_k$ Pole von $f$ sind. Die Menge aller meromorphen Funktionen auf $D$ bezeichnen wir mit $M(D)$.

Später werden wir noch eine deutliche Verschärfung der Partialbruchzerlegung zeigen, den *Mittag-Lefflerschen Teilbruchsatz*. Dieser wird uns erlauben, zu vorgegebenen Polen und vorgegebenen Hauptteilen genau eine meromorphe Funktion zu konstruieren, die diese Parameter annimmt.

Nun wenden wir uns dem Verhalten holomorpher Funktionen in der Nähe wesentlicher Singularitäten zu und zeigen – salopp ausgedrückt – dass eine holomorphe Funktion in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jedem Wert in $\mathbb{C}$ beliebig nahe kommt.

**Satz 3.1.11 (*Casorati-Weierstraß*).**
Es sei $R > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$, $f \in H(\dot{U}_R(z_0))$ und $f$ habe in $z_0$ eine wesentliche Singularität. Dann ist für alle $0 < r < R$ die Bildmenge $f(\dot{U}_r(z_0))$ dicht in $\mathbb{C}$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 9.* ■

Wesentlich später werden wir noch eine deutlich stärkere Aussage zeigen, den sogenannten *Großen Satz von Picard*. Dieser sagt (mit den Bezeichnungen aus Satz 3.1.11) aus, dass $f$ in jeder Umgebung von $z_0$ jeden Wert $w \in \mathbb{C}$ unendlich oft annimmt mit höchstens einer Ausnahme.

**Bemerkung 3.1.12.**

a) Die Pole einer meromorphen Funktion haben keinen Häufungspunkt in $D$, liegen also diskret.

b) $M(D)$ ist ein Körper, $H(D)$ ein Integritätsring. Später werden wir zeigen, dass $M(D)$ der Quotientenkörper von $H(D)$ ist.

## 3.2 Laurentreihen

Wir wollen nun das Konzept der Potenzreihenentwicklung auf meromorphe Funktionen übertragen.

**Definition 3.2.1.**

a) Ein Ausdruck der Form $\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k$ mit $z_k \in \mathbb{C}$ heißt **Doppelreihe**.

b) Eine Doppelreihe heißt **konvergent**, wenn die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} z_{-k}$ konvergieren.

c) Der **Reihenwert** einer konvergenten Doppelreihe ist gegeben durch

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} z_k = \sum_{k=0}^{\infty} z_k + \sum_{k=1}^{\infty} z_{-k}. \tag{3.3}$$

d) Analog zu den aus der Analysis bekannten Begriffen definiert man punktweise und lokal gleichmäßige Konvergenz von Doppelreihen von Funktionen, d.h. $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(z)$.

**Definition 3.2.2.**

a) Eine Doppelreihe der Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \;\; a_k, z, z_0 \in \mathbb{C}, \tag{3.4}$$

heißt **Laurentreihe**.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ heißt **Potenzreihenanteil**.

c) $\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k(z-z_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}$ heißt **Hauptteil**.

Für das Konvergenzverhalten von Laurentreihen benötigen wir noch eine einheitliche Notation für Kreisringe.

**Definition 3.2.3.**

Es seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r_1, r_2$ reelle Zahlen mit $0 < r_1 < r_2 \leq \infty$. Wir definieren damit den **Kreisring**

$$K_{r_1,r_2}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \colon r_1 < |z| < r_2\}. \tag{3.5}$$

**Satz 3.2.4 (*Konvergenzsatz für Laurentreihen*).**

Eine Laurentreihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ konvergiert

- entweder nirgends,
- auf Teilen einer Kreislinie um $z_0$, oder
- lokal gleichmäßig auf einem Kreisring $K_{r_1,r_2}(z_0)$ und eventuell in gewissen Randpunkten.

Im letzten Falle ist die Funktion $f$ definiert durch $f(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ für $z \in K_{r_1,r_2}(z_0)$ holomorph auf $K_{r_1,r_2}(z_0)$ und es gilt

$$a_k = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{|\zeta-z_0|=r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}} \mathrm{d}\zeta \tag{3.6}$$

für alle $r_1 < r < r_2$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 10.* ■

Nun drehen wir die Richtung von Satz 3.2.4 um.

**Satz 3.2.5 (*Satz von Laurent*).**
Es sei $K := K_{r_1,r_2}(z_0)$ und $f \in H(K)$. Dann ist $f$ in $K$ in eine eindeutig bestimmte Laurentreihe entwickelbar, d.h. für $z \in K$ gilt

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

mit den $a_k$ wie in (3.6) für $k \in \mathbb{Z}$. Die Reihe konvergiert lokal gleichmäßig in $K$.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 10.* ■

Mit den Laurentreihen können wir nun noch eine weitere Charakterisierung isolierter Singularitäten herleiten.
**Satz 3.2.6.**
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f \in H(\dot{U}_r(z_0))$ mit $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ in $\dot{U}_r(z_0)$. Dann gilt:

a) $z_0$ ist hebbar. $\Leftrightarrow$ $a_k = 0$ für alle $k < 0$.

b) $z_0$ ist ein Pol $m$-ter Ordnung. $\Leftrightarrow$ $a_k = 0$ für alle $k < -m$.

c) $z_0$ ist eine wesentliche Singularität. $\Leftrightarrow$ $a_k \neq 0$ für unendlich viele $k < 0$.

Beweis. Siehe Aufgabe 3.1. ■

**Beispiel 3.2.7.**
In der Vorlesung wird nun die Funktion

$$f : \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\} \to \mathbb{C},\ f(z) = \frac{1}{1 + z^2},$$

in jeweils eine Laurentreihe auf $U_1(0)$, $K_{1,\infty}(0)$ und $K_{0,2}(\mathrm{i})$ entwickelt. Dem Leser des Skripts sei dies als eine gute *Übung* empfohlen.

## 3.3 Das Residuenkalkül

**Definition 3.3.1.**
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$ und $f \in H(\dot{U}_r(z_0))$ mit $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$. Dann heißt $a_{-1}$ das **Residuum von $f$ in $z_0$**. Wir schreiben $a_{-1} =: \operatorname{Res}(f; z_0)$.

Mit den Residuen einer Funktion können wir nun komplexe Kurvenintegrale berechnen. Dies ist die Aussage von

**Satz 3.3.2 (*Residuensatz*).**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $M \subset D$ diskret, $f \in H(D \setminus M)$ und $\gamma \sim 0 \pmod D$ mit $|\gamma| \cap M = \emptyset$. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{a\in M} n(\gamma, a) \cdot \operatorname{Res}(f; a), \tag{3.7}$$

wobei die Summe auf der rechten Seite nur endlich viele Summanden ungleich Null enthält.

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 10.* ■

Bevor wir nun Beispiele vorstellen, beweisen wir zunächst eine Formel für die Berechnung von Residuen, die etwas handlicher ist als die Formel aus (3.6).

**Satz 3.3.3.**
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f \in H(\dot{U}_r(z_0))$ und $f$ habe in $z_0$ einen Pol der Ordnung $m \in \mathbb{N}$. Dazu definieren wir $g(z) := (z-z_0)^m f(z)$ für $z \in \dot{U}_r(z_0)$. Dann hat $g$ eine hebbare Singularität in $z_0$ mit $g(z_0) \neq 0$. Ferner gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}. \tag{3.8}$$

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 10.* ■

**Folgerung 3.3.4.**
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f, g \in H(U_r(z_0))$ mit $f(z_0) \neq 0$ und $g$ habe in $z_0$ eine einfache Nullstelle, d.h. $g(z_0) = 0$ und $g'(z_0) \neq 0$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}; z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}. \tag{3.9}$$

Beweis. Folgt direkt aus Satz 3.3.3 angewandt auf $\frac{f}{g}$. ■

Eine ähnliche Formel können wir nun für das Produkt zweier Funktionen beweisen.

**Satz 3.3.5.**
Es sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $f \in H(\dot{U}_r(z_0))$ mit einem Pol der Ordnung 1 in $z_0$ und $g \in H(U_r(z_0))$. Dann gilt

$$\operatorname{Res}(fg, z_0) = g(z_0) \cdot \operatorname{Res}(f; z_0). \tag{3.10}$$

Beweis. *Funktionentheorie I, Vorlesung 10.* ■

**Beispiel 3.3.6.**
In der Vorlesung berechnen wir nun die Residuen der folgenden drei Funktionen in ihren isolierten Singularitäten:

$$f(z) = \tfrac{1-\cos z}{z^2},\ g(z) = \tfrac{1}{1-\exp(2\pi\mathrm{i}z)},\ h(z) = z^n \sin\tfrac{1}{z}.$$

Für den Leser des Skriptes (und auch für alle anderen) ist dies wiederum eine gute *Übung*.

Nun wollen wir den Residuensatz auf rationale Funktionen und uneigentliche Integrale anwenden. Wir formulieren (und beweisen) dies in den folgenden zwei Sätzen.

**Satz 3.3.7 (*Integration rationaler Funktionen*).**
Es sei $R := R(x, y)$ eine rationale Funktion von $x$ und $y$, so dass die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\vartheta) = R(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ stetig ist. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} f(\vartheta)\mathrm{d}\vartheta = -\mathrm{i} \int_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right) \frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{3.11}$$

Der Integrand ist nun also eine rationale Funktion und zur Berechnung des rechten Integrals muss man nur die Summe der Residuen des Integranden im Einheitskreis berechnen.

Beweis. Folgt sofort aus der Substitution $z = e^{\mathrm{i}\vartheta}$ und der Definition vom komplexen (Ko-)Sinus. . ■

**Satz 3.3.8 (*Der Residuensatz für uneigentliche Riemann-Integrale*).**
Es sei $R = \frac{P}{Q}$ eine rationale Funktion mit teilerfremden Polynomen mit $\deg P = m$, $\deg Q = n$ und $n \geq m + 2$ sowie $Q(x) \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{R}} R(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{j=0}^{N} \mathrm{Res}(R; z_j), \tag{3.12}$$

wobei $z_0, \dots, z_N$ die verschiedenen Pole von $R$ in der oberen bzw. unteren Halbebene sind.

Beweis. XXX. ■

**Beispiel 3.3.9.**

a) Zur Illustration von Satz 3.3.7 berechnen wir in der Vorlesung für $a > 1$ das Integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \cos t} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}.$$

b) Zur Illustration von Satz 3.3.8 berechnen wir in der Vorlesung das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Es ist in beiden Fällen eine gute *Übung*, dies vorher selbst einmal zu probieren.

Nun betrachten wir ein etwas komplizierteres Beispiel.

**Beispiel 3.3.10.**
Wir zeigen in der Vorlesung an dieser Stelle, dass das Integral

$$I_n := \int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^n}, \; n \in \mathbb{N},$$

für alle $n \geq 2$ existiert und den Wert $I_n = \frac{\pi}{n \sin\frac{\pi}{n}}$ besitzt. Auch hier ist die eigenständige Rechnung vorher eine gute *Übung*, allerdings muss man den Integrationsweg geeignet wählen. Als Hinweis sei nur gesagt, dass ein idealisiertes Kuchenstück hilfreich sein kann.

Wir schließen dieses Kapitel mit einem Satz, der einen Zusammenhang zwischen den Residuen einer Funktion und der Existenz einer Stammfunktion herstellt.

**Satz 3.3.11.**

Es sei $S \subset \mathbb{C}$ eine diskrete Menge und $f : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt:
$f$ besitzt auf $\mathbb{C} \setminus S$ genau dann eine Stammfunktion, wenn $\mathrm{Res}(f; z) = 0$ für alle $z \in S$ gilt.

Beweis. **XXX**. ■

## 3.4 Lokales Abbildungsverhalten

### 3.4.1 Motivation: Abbildungsverhalten von exp, Log und der allgemeinen Potenz

Abbildungseigenschaften von exp:
Offenbar ist exp $2\pi\mathrm{i}$-periodisch und bildet die reelle Achse bijektiv auf $(0, \infty)$ ab. Weiter folgt, dass jede horizontale Gerade $H_y := \{x + \mathrm{i}y \colon x \in \mathbb{R}\}$ auf den offenen Strahl von 0 nach $\infty$ und jede vertikale Gerade $V_x := \{x + \mathrm{i}y \colon y \in \mathbb{R}\}$ auf die Kreislinie mit Radius $e^x$ abgebildet wird.

Abbildungseigenschaften von Log:
Die reelle Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und hat daher eine Umkehrfunktion. Im Komplexen gilt dies nicht mehr, da die Exponentialfunktion $2\pi\mathrm{i}$-periodisch ist.
Für $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezeichnen wir jede Lösung der Gleichung $e^z = w$ mit $z = \log w$. Es gelten hiermit folgende zwei Aussagen:

- $\log w \mod 2\pi\mathrm{i}$ ist eindeutig bestimmt.
- $\log(w_1 w_2) = (\log w_1 + \log w_2) \mod 2\pi\mathrm{i}$.

Der Parallelstreifen $S := \{z \in \mathbb{C} \colon -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ wird durch exp bijektiv auf die *geschlitzte Ebene* $\mathbb{C}_-$ abgebildet.

Abbildungseigenschaften von $z \mapsto z^\alpha$:
In $\mathbb{C}_-$ erklären wir die **allgemeine Potenz** durch

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}, \; z \in \mathbb{C}_-, \; \alpha \in \mathbb{C}. \tag{3.13}$$

Für $\alpha > 0$ ist $(re^{\mathrm{i}\varphi})^\alpha = r^\alpha e^{\mathrm{i}\alpha\varphi}$, d.h. der Strahl $S_\varphi := \left\{re^{\mathrm{i}\varphi} \colon r > 0\right\}$ wird bijektiv auf den Strahl $S_{\alpha\varphi}$ abgebildet.
Für $\varphi_1, \varphi_2, \alpha > 0$ wird der Kreisbogen $K_{\varphi,r} := \left\{re^{\mathrm{i}\varphi} \colon \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\right\}$ bijektiv auf den Kreisbogen $K_{\alpha\varphi, r^\alpha}$ abgebildet. Hierbei muss die Einschränkung $\alpha(\varphi_2 - \varphi_1) \leq 2\pi$ erfüllt sein, da sonst die Bijektivität nicht mehr gegeben ist.
Für $\varphi_1, \varphi_2, r_1, r_2, \alpha > 0$ wird das Kreisbogenviereck $K^\lozenge_{\varphi, r_1, r_2} := \left\{re^{\mathrm{i}\varphi} \colon \varphi \in [\varphi_1, \varphi_2], r \in [r_1, r_2]\right\}$ bijektiv auf das Kreisbogenviereck $K^\lozenge_{\alpha\varphi, r_1^\alpha, r_2^\alpha}$ abgebildet. Hierbei muss die Einschränkung $\alpha(\varphi_2 - \varphi_1) \leq 2\pi$ ebenfalls erfüllt sein, um die Bijektivität zu gewährleisten.

### 3.4.2 Das Argumentprinzip und Folgerungen

Nach diesen konkreten geometrischen Beispielen wollen wir nun das lokale Abbildungsverhalten meromorpher Funktionen analytisch untersuchen. Dazu beginnen wir mit

**Satz 3.4.1.**

Es sei $f \in M(D)$ mit Nullstellen $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und Polen $b_1, b_2, b_3, \ldots$, die entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeführt werden. Weiter sei $g \in H(D)$ und $\gamma \sim 0 \pmod{D}$ mit $a_j, b_k \notin |\gamma|$ für alle $j, k$. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = \sum_j n(\gamma, a_j) \cdot g(a_j) - \sum_k n(\gamma, b_k) \cdot g(b_k). \tag{3.14}$$

Beachte: Auf der rechten Seite stehen nur reelle Summanden ungleich 0 und derer nur endlich viele.

Beweis. XXX . ■

**Definition 3.4.2.**

Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ heißt **von einem Zyklus $\gamma$ berandet**, wenn $\partial D = |\gamma|$, $n(\gamma, a) = 1$ für alle $a \in D$ und $n(\gamma, a) = 0$ für alle $a \in D^C$ ist. Ist $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $\overline{D} \subset G$, so heißt $\gamma$ **nullhomolog modulo $G$**.

**Satz 3.4.3 (*Argumentprinzip*).**

Es sei $f \in M(G)$. Weiter sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das von einem Zyklus $\gamma$ berandet ist und $\overline{D} \subset G$ sowie $f(z) \notin \{0, \infty\}$ für $z \in |\gamma|$ erfüllt. Dann gilt:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} \, \mathrm{d}z = N - P, \tag{3.15}$$

wobei $N$ die Anzahl der Nullstellen von $f$ in $D$ und $P$ die Anzahl der Polstellen von $f$ in $D$ ist (mit Vielfachheiten).

Beweis. Folgt sofort aus Satz 3.4.1 mit $g \equiv 1$. ■

Das Argumentprinzip versetzt uns nun in die Lage, unter bestimmten Voraussetzungen die Nullstellenmengen holomorpher Funktionen miteinander zu vergleichen. Konkreter zeigt dies

**Satz 3.4.4 (*Satz von Rouché*).**

Es seien $f, g \in H(G)$, $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, das von einem Zyklus $\gamma$ berandet ist, $\overline{D} \subset G$ und es gelte

$$|g(z) - f(z)| \leq |f(z)|$$

für $z \in \partial D$. Dann haben $f$ und $g$ die gleiche Anzahl von Nullstellen in $D$ (mit Vielfachheiten).

Beweis. XXX . ■

Nun schauen wir uns das Verhalten von Nullstellen von Folgen holomorphen Funktionen beim Grenzübergang an.

**Satz 3.4.5 (*Satz von Hurwitz*).**

Es sei $(f_n) \subset H(D)$ lokal gleichmäßig konvergent in $D$ gegen eine Grenzfunktion $f$. Dann gelten:

a) Besitzt $f_n$ höchstens $k$ Nullstellen in $D$, so besitzt auch $f$ höchstens $k$ Nullstellen in $D$ oder es gilt $f \equiv 0$.

b) Ist jedes $f_n$ injektiv in $D$, so ist auch $f$ injektiv in $D$ oder konstant.

Beweis. XXX. ■

**Bemerkung 3.4.6.**

a) Wir haben in a) mehr gezeigt, als behauptet. Insbesondere folgt aus dem Beweis, dass die Menge der Nullstellen aller Funktionen $f_n$ genau die Nullstellen von $f$ als Häufungspunkte hat.

b) In Teil b) kann $f \equiv 0$ vorkommen: Wähle $D = \mathbb{C}$ und $f_n(z) = \frac{z}{n}$. Dann gilt $f(z) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = 0$ für alle $z \in D$.

c) In der Vorlesung geben wir an dieser Stelle einen alternativen Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra mit Hilfe des Satzes von Rouché.

Nun können wir die lokale Umkehrbarkeit holomorpher Funktionen untersuchen.

**Satz 3.4.7 (*Satz von der Umkehrfunktion*).**
Es sei $f \in H(D)$, $z_0 \in D$, $w_0 = f(z_0)$ und $f'(z_0) \neq 0$.
Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass $f$ in $W = U_\varepsilon(w_0)$ eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion $f^{-1} \in H(W)$ hat mit $f^{-1}(w_0) = z_0$. Es gilt die Formel:

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{|z-z_0|=\delta} \frac{zf'(z)}{f(z)-w}\, \mathrm{d}z, \;\; w \in W, \tag{3.16}$$

wobei $\delta$ geeignet zu wählen ist.

Beweis. XXX. ■

**Beispiel 3.4.8.**
In der Vorlesung verwenden wir nun Satz 3.4.7, um die Funktion $f(z) = ze^{-z}$ lokal um $z_0 = 0$ zu invertieren. Wir werden dabei erhalten:

$$f^{-1}(w) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{n-2}}{(n-1)!} w^n$$

für $w \in U_{1/e}(0)$. Das Nachweisen der Voraussetzungen aus dem Satz sowie das Durchführen der Invertierung mittels (3.16) ist im Vorfeld eine gute *Übung*.

Wir schließen dieses Kapitel mit der Beobachtung, dass sich holomorphe Funktionen lokal recht einfach verhalten. Präzise sagt dies der folgende

**Satz 3.4.9.**
Es sei $f \in H(D)$, $f(z_0) = w_0$, $f^{(j)}(z_0) = 0$ für $j = 1, \dots, m-1$ und $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.
Dann existieren Kreisscheiben $W = U_\varepsilon(w_0)$, $V = U_{e^{1/m}}(0)$, ein Gebiet $U \subset D$ mit $z_0 \in U$ und eine konforme Abbildung $h : U \to V$ mit $h(z_0) = 0$ und $f(z) = w_0 + (h(z))^m$ für $z \in U$. Jedes $w \in W$ hat dann genau $m$ verschiedene Urbilder unter $f$.

Beweis. XXX. ■

# Übungen zu Kapitel 3

Die Übungen mit ($*$) sind diejenigen, die in der Vorlesung dazugekommen sind. Diejenigen mit ($\diamond$) sind (in der präsentierten Form) besonders anspruchsvoll.

## Zu isolierten Singularitäten

## Zu Laurentreihen

**Aufgabe 3.1.**
Beweise Satz 3.2.6.

## Zum Residuenkalkül

## Zum lokalen Abbildungsverhalten

# 4 Möbiustransformationen

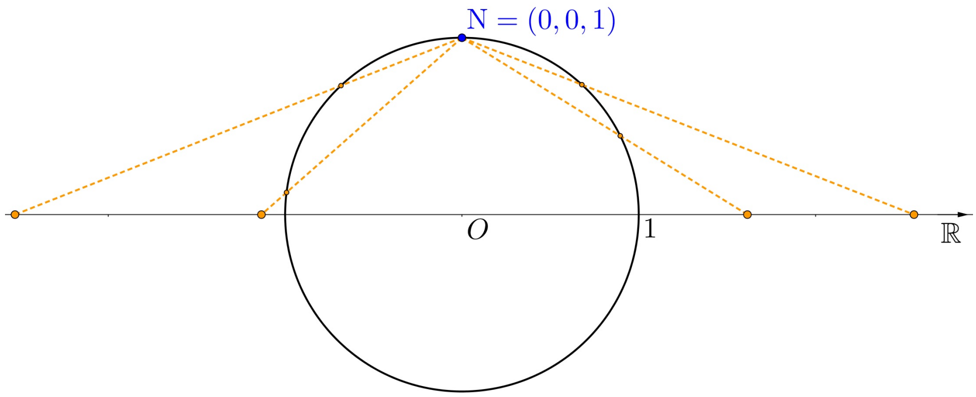
## Inhaltsangabe

## 4.1 Die Riemannsche Zahlenkugel

In diesem Kapitel knüpfen wir an Satz 1.1.11 an und betrachten den Raum $\widehat{\mathbb{C}}$ genauer. Dabei werden wir als erstes die Riemannsche Zahlenkugel kennenlernen, die ein geeignetes geometrisches Modell dieses Raumes ist.

**Definition 4.1.1.**

Wir bezeichnen mit $\mathbb{S}^2 := \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 \colon \; ||\xi||_2^2 = 1\right\}$ die Oberfläche der Einheitskugel in $\mathbb{R}^3$. Sie heißt **2-Sphäre** und $N = (0,0,1)$ der **Nordpol**.




**Definition 4.1.2.**

Die Abbildung $\sigma : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ mit

$$\sigma(\xi) = \sigma((\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T) := \frac{\xi_1 + \mathrm{i} \cdot \xi_2}{1 - \xi_3} \in \mathbb{C} \tag{4.1}$$

heißt **stereografische Projektion**.

Wir werden sehen, dass sie eine einfache geometrische Bedeutung hat.

**Satz 4.1.3.**

Die stereografische Projektion $\sigma$ wie in (4.1) ist eine Bijektion und die Umkehrabbildung ist gegeben durch

$$\sigma^{-1}(z) = \left(\frac{2 \cdot \mathrm{Re} z}{|z|^2 + 1}, \quad \frac{2 \cdot \mathrm{Im} z}{|z|^2 + 1}, \quad \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right)^T. \tag{4.2}$$

Beweis. Siehe Aufgabe 4.1. ■

Wir fassen nun $\mathbb{C}$ bzw. den $\mathbb{R}^2$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ auf und identifizieren die $x$- mit der $\xi_1$-Achse und die $y$- mit der $\xi_2$-Achse. Dann ist $\sigma$ stetig, wenn man auf $\mathbb{S}^2$ die euklidische Norm des $\mathbb{R}^3$ und auf $\mathbb{C}$ den Betrag nimmt.
Die Gerade durch den Nordpol $N$ und den Punkt $\xi$ auf $\mathbb{S}^2$ schneidet die komplexe Ebene im Punkt $z = x + \mathrm{i}y$. Es gilt dann $\xi_1 = \rho \cdot x$ und $\xi_2 = \rho \cdot y$. Mit dem Strahlensatz ergibt sich dann $|z| : 1 = (|z| - \rho\,|z|) \colon \xi_3$. Hieraus ergibt sich $\rho = 1 - \xi_3$ und es folgt

$$x = \frac{\xi_1}{1 - \xi_3}, \; y = \frac{\xi_2}{1 - \xi_3}, \; z = \frac{\xi_1 + \mathrm{i} \cdot \xi_2}{1 + \xi_3} = \sigma(\xi).$$

Die Menge der komplexen Zahlen wird nun um eine Element $\infty$ erweitert, d.h. $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Beachte hier, dass $\widehat{\mathbb{C}}$ nach Satz 1.1.11 ein kompakter metrischer Raum ist. Dadurch wird die stereografische Projektion zu einer Bijektion von $\mathbb{S}^2$ auf $\widehat{\mathbb{C}}$, wenn man $\sigma(N) := \infty$ definiert.

**Definition 4.1.4.**

$\widehat{\mathbb{C}}$ heißt **Riemannsche Zahlenkugel**.

Beachte, dass die euklidische Metrik, die die $\mathbb{S}^2$ vom Raum $\mathbb{R}^3$ erbt, mittels der stereografischen Projektion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ übertragen wird.
Auf $\widehat{\mathbb{C}}$ führen wir nun noch eine zweite Metrik ein, die sich später als nützlich erweisen wird.

**Definition 4.1.5.**
Ist $z = \sigma(\xi)$ und $w = \sigma(\eta)$, so heißt

$$\chi(z,w) := \begin{cases} \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} & : \quad z, w \in \mathbb{C} \\ \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} & : z \in \mathbb{C},\ w = \infty \end{cases} \tag{4.3}$$

die **chordale Metrik**.

.................................................................................................................................

Wir vereinbaren abschließend für $a \neq 0$ noch die Rechenregeln

- $a \cdot \infty = \infty$,
- $\frac{a}{0} = \infty$,
- $b \pm \infty = \pm\infty$ und
- $\frac{b}{\infty} = 0$.

## 4.2 Die Möbiusgruppe

**Definition 4.2.1.**
Eine Abbildung $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ der Form

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \; ad - bc \neq 0, \; a, b, c, d \in \mathbb{C}, \tag{4.4}$$

heißt **Möbiustransformation**. Wir setzen noch $T(\infty) := \infty$, falls $c = 0$ und $T\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty, \; T(\infty) := \frac{a}{c}$ falls $c \neq 0$.
Wir unterscheiden im Folgenden die nachstehenden Spezialfälle:

a) Translationen: $T(z) = z + a$, $a \in \mathbb{C}$.

b) Dilatationen: $T(z) = az$, $a \in \mathbb{C}^\star$.

c) Rotationen: $T(z) = e^{\mathrm{i}t}z$, $t \in \mathbb{R}$.

d) Inversion: $T(z) = \frac{1}{z}$.

Als Erstes wollen wir nun die algebraische Struktur der Möbiustransformationen aufschlüsseln.
**Satz 4.2.2.**
Die Menge aller Möbiustransformationen bildet mit der Komposition als Verknüpfung eine Gruppe, die sogenannte **Möbiusgruppe** $\mathfrak{M}$. Diese wird erzeugt von Translationen, Dilatationen und Inversionen.

Beweis. XXX. ■

Als nächstes wollen wir das Abbildungsverhalten von Möbiustransformationen betrachten. Dazu weichen wir zunächst die Begriffe *Kreis* und *Gerade* auf, was durch nachfolgendes Lemma präzisiert wird.
**Lemma 4.2.3.**
Kreise und Geraden haben in $\mathbb{C}$ eine einheitliche Darstellung, nämlich

$$\varepsilon z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} + \alpha = 0, \; \varepsilon, a, \alpha \in \mathbb{C}, \text{ genauer } \varepsilon \in \{0, 1\}, \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{C}. \tag{4.5}$$

Beweis. XXX. ■

Wir treffen daher folgende
**Definition 4.2.4.**
Ein **verallgemeinerter Kreis** in $\widehat{\mathbb{C}}$ ist entweder ein Kreis oder eine Gerade in $\mathbb{C}$.

**Bemerkung 4.2.5.**
Das Bild eines Kreises $K$ auf der Riemannschen Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ unter der stereografischen Projektion ist entweder ein Kreis (wenn $\infty \notin K$) oder eine Gerade (wenn $\infty \in K$). Die Bilder von Breitenkreisen sind Kreise mit Mittelpunkt 0 und die Bilder von Längenkreisen sind Geraden durch 0. Die Südhalbkugel ohne Äquator wird auf $\mathbb{D}$ abgebildet.

Um das Abbildungsverhalten von Möbiustransformationen genauer zu fassen, benötigen wir noch folgende Begriffe.
**Definition 4.2.6.**
Es seien $D, G \subset \mathbb{C}$ Gebiete.

a) Eine bijektive Funktion $f : D \to G$ mit $f \in H(D)$ heißt **konform auf G**.

b) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt **kreistreu**, wenn das Bild eines verallgemeinerten Kreises unter $f$ wieder ein verallgemeinerter Kreis ist.

**Bemerkung 4.2.7.**
Wir werden später im Kapitel zu konformen Abbildungen zeigen, dass aus der Konformität von $f$ folgt, dass $f'(z) \neq 0$ gilt. Ferner sind konforme Abbildungen immer winkeltreu, in einem noch zu definierenden Sinne.

Mit den bisherigen Ergebnissen können wir nun folgenden Satz beweisen.

**Satz 4.2.8.**
Es sei $T \in \mathfrak{M}$. Dann gilt $T \in H(\widehat{\mathbb{C}})$. Ferner ist $T$ konform und kreistreu.

Beweis. XXX. ∎

Für die Beweise im folgenden Abschnitt ist die Kenntnis der Fixpunkte von Möbiustransformationen von Vorteil, insbesondere deren maximale Anzahl. Dies fasst

**Satz 4.2.9.**
Es sei $T \in \mathfrak{M}$ mit $T \neq \mathrm{id}$. Dann besitzt $M$ genau zwei Fixpunkte in $\widehat{\mathbb{C}}$.

Beweis. XXX. ∎

## 4.3 Das Doppelverhältnis

Wir wollen nun zeigen, dass es zu drei jeweils paarweise verschiedenen Punkten $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ genau eine Möbiustransformation gibt mit $T(z_j) = w_j,\ j = 1, 2, 3$. Dazu benötigen wir das sogenannte *Doppelverhältnis*, welches wir zunächst definieren wollen.

**Definition 4.3.1.**
Für paarweise verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ heißt

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \Big/ \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4} = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4} \tag{4.6}$$

das **Doppelverhältnis** von $z_1, z_2, z_3$ und $z_4$.
Wir setzen noch

$$(\infty, z_2, z_3, z_4) = \lim_{z_1 \to \infty} (z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}. \tag{4.7}$$

Entsprechend definieren wir jeweils das Doppelverhältnis mit $z_j = \infty$ für $j = 2, 3, 4$.
In allen bisherigen Fällen gilt $(z_1, z_2, z_3, z_4) \notin \{0, 1, \infty\}$.
Sind zwei der Punkte gleich, so definieren wir

$$(z_1, z_1, z_3, z_4) = \lim_{z_2 \to z_1} (z_1, z_2, z_3, z_4) = 1,\ (z_1, z_2, z_1, z_4) = 0 \text{ und } (z_1, z_2, z_3, z_1) = \infty. \tag{4.8}$$

In diesem Fall[5] gilt immer $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \{0, 1, \infty\}$.

Wir beweisen zunächst eine Vorstufe obigen Ziels.

**Satz 4.3.2.**
Es seien $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ paarweise verschiedene Punkte. Dann existiert genau eine Möbiustransformation $T$ mit $T(z_1) = 1$, $T(z_2) = 0$ und $T(z_3) = \infty$.

Beweis. XXX. ■

**Satz 4.3.3 (*Invarianz des Doppelverhältnis*).**
Es seien $z_1, z_2, z_3, z_4$ paarweise verschiedene Punkte und $T$ eine Möbiustransformation. Dann gilt

$$(T(z_1), T(z_1), T(z_3), T(z_4)) = (z_1, z_1, z_3, z_4). \tag{4.9}$$

Beweis. XXX. ■

Mit diesen Resultaten können wir nun unser Ziel beweisen.

**Satz 4.3.4.**
Es seien $z_1, z_2, z_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ und $w_1, w_2, w_3 \in \widehat{\mathbb{C}}$ jeweils drei verschiedene Punkte. Dann existiert genau eine Möbiustransformation $T$ mit $T(z_j) = w_j$ für $j = 1, 2, 3$.

Beweis. XXX. ■

Zum Abschluss dieses Abschnitts ziehen wir noch zwei einfache Folgerungen aus Satz 4.3.4.

**Folgerung 4.3.5.**
Es seien $K$ und $K'$ Kreise auf $\widehat{\mathbb{C}}$. Dann existiert eine Möbiustransformation $T$ mit $T(K) = K'$.

Beweis. Siehe Übungsaufgabe 4.3, a). ■

[5] Natürlich kann auch $z_j,\ j = 2, 3, 4$, doppelt vorkommen, allerdings definiert man für diese Fälle das Doppelverhältnis analog.

**Folgerung 4.3.6.**
Vier verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ liegen auf einem Kreis $K$ genau dann, wenn $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}$ gilt.

Beweis. Siehe Übungsaufgabe 4.3, b). ■

## 4.4 Das Symmetrieprinzip

Wir beginnen mit Spiegelungen an verallgemeinerten Kreisen in $\widehat{\mathbb{C}}$.

**Definition 4.4.1.**
Es sei $K$ ein Kreis in $\widehat{\mathbb{C}}$ und $z_1, z_2, z_3$ drei verschiedene Punkte auf $K$. Die Punkte $z, z^\star \in \widehat{\mathbb{C}}$ heißen **symmetrisch bzgl. *K***, wenn

$$(z^\star, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}. \tag{4.10}$$

Man nennt $z^\star$ auch **Spiegelpunkt von *z* an *K*** (oder umgekehrt).

.................................................................................................................

Diese Definition hängt nicht nur von $K$ ab, sondern auch von den gewählten Punkten $z_1, z_2, z_3$. Man zeigt leicht (vgl. Übung 4.4), dass letztere Abhängigkeit nicht vorhanden ist, wodurch obige Definition wohldefiniert ist.

**Satz 4.4.2.**
Die Definition der Symmetrie ist unabhängig von der Wahl der Punkte $z_1, z_2, z_3$, d.h. sind $w_1, w_2, w_3$ ebenfalls Punkte auf $K$, so gilt

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} \Leftrightarrow (z^*, w_1, w_2, w_3) = \overline{(z, w_1, w_2, w_3)}.$$

Beweis. Übung 4.4. ■

.................................................................................................................

**Bemerkung 4.4.3.**
In der Vorlesung vergleichen wir nun die analytische und die geometrische Definition von $z^*$ und erhalten als Fazit, dass beide Definitionen übereinstimmen.

.................................................................................................................

Nun können wir zeigen, dass Möbiustransformationen Spiegelpunkte auf Spiegelpunkte abbilden.

**Satz 4.4.4 (*Symmetrieprinzip*).**
Es seien $K, K'$ zwei Kreise auf $\widehat{\mathbb{C}}$, $T \in \mathfrak{M}$ mit $T(K) = K'$ und $z, z^\star$ symmetrisch bezüglich $K$. Dann sind $T(z)$ und $T(z^\star)$ symmetrisch bezüglich $K$.

Beweis. XXX. ■

.................................................................................................................

**Beispiel 4.4.5.**
Es sei $c \in \partial\mathbb{D}$ und $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ gegeben durch $T(z) = \frac{1+cz}{1-cz}$. In der Vorlesung nutzen wir nun das Symmetrieprinzip 4.4.4, um $T(\mathbb{D}) = \mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Re} z > 0\}$ zu zeigen. Dies ist im Vorfeld bereits eine gute *Übung*.

.................................................................................................................

## 4.5 Das Orientierungsprinzip

Als nächstes wollen wir nun klären, was das Innere und das Äußeres eines (verallgemeinerten) Kreises $K$ in $\widehat{\mathbb{C}}$ ist.

**Definition 4.5.1.**

Eine **Orientierung** von $K$ ist ein geordnetes Tripel von Punkten $(z_1, z_2, z_3)$ mit $z_1, z_2, z_3 \in K$. Anschaulich ergibt sich hieraus ein Durchlaufungssinn von $K$ von $z_1$ über $z_2$ nach $z_3$ zurück nach $z_1$.

**Beispiel 4.5.2.**

Es sei $K = \widehat{\mathbb{R}}$ und $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{R}$. Wir definieren $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3) =: \dfrac{az+b}{cz+d}$ und zeigen in der Vorlesung $T(\widehat{\mathbb{R}}) = \widehat{\mathbb{R}}$. Daraus folgern wir, dass wir im Falle $ad - bc > 0$ durch

$$\{z \in \mathbb{C} \colon \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}$$

die obere Halbebene – also entweder die linke oder die rechte Seite des „Bildkreises" – identifizieren können.

Dieses Beispiel lässt sich verallgemeinern.

**Bemerkung 4.5.3.**

Es sei $K$ ein beliebiger Kreis und $z_1, z_2, z_3 \in K$. Für jede Möbiustransformation gilt

$$\begin{aligned}\left\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \colon \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\right\} &= \left\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \colon \operatorname{Im}\left(T(z), T(z_1), T(z_2), T(z_3)\right) > 0\right\} \\ &= T^{-1}\left(\left\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \colon \operatorname{Im}(z, T(z_1), T(z_2), T(z_3)) > 0\right\}\right).\end{aligned}$$

Wähle nun $T$ so, dass $T^{-1}(K) = \widehat{\mathbb{R}}$. Dies ist wegen Folgerung 4.3.5 immer möglich. Dann folgt nach vorigem Beispiel, dass $\left\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \colon \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\right\}$ das Bild der oberen/unteren Halbebene unter $T^{-1}$ ist.
Ist also $(z_1, z_2, z_3)$ eine Orientierung von $K$, so definieren wir die rechte Seite von $K$ durch

$$\left\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \colon \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\right\}$$

und die linke Seite durch

$$\left\{z \in \widehat{\mathbb{C}} \colon \operatorname{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\right\}.$$

**Beispiel 4.5.4.**

Gilt in Beispiel 4.5.2 speziell $K = \mathbb{R}$ mit der Orientierung $(1, 0, \infty)$, so ist $(z, 1, 0, \infty) = z$ und daher ist die obere Halbebene die rechte Seite, was auch unserer Anschauung entspricht.

Nun können wir ein Analogon zum Symmetrieprinzip für Orientierungen beweisen.

**Satz 4.5.5 (*Orientierungsprinzip*).**

Es seien $K, K'$ zwei Kreise auf $\widehat{\mathbb{C}}$, $T \in \mathfrak{M}$ und $T(K) = K'$. Ist $(z_1, z_2, z_3)$ eine Orientierung von $K$, so bildet $T$ die rechte Seite von $K$ bezüglich dieser Orientierung auf die rechte Seite von $K'$ bezüglich der Orientierung $(T(z_1), T(z_2), T(z_3))$ ab.

Beweis. **XXX**. ■

**Beispiel 4.5.6.**

Wir betrachten die Möbiustransformation $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$, $T(z) := \frac{10}{z+1}$. In der Vorlesung bestimmen wir nun mittels des Orientierungsprinzips 4.5.5 das Bild von $\mathbb{D}$ unter $T$.

## 4.6 Einige Anwendungen

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir noch Symmetrie- und Orientierungsprinzip in Kombination anwenden, um einige spezielle Klassen von Möbiustransformationen zu bestimmen.

**Satz 4.6.1.**
Alle Möbiustransformationen von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{D}$ sind gegeben durch

$$T(z) = a\frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0}z}, \; a \in \mathbb{C}^*, \; z_0 \in \mathbb{D}. \tag{4.11}$$

Beweis. XXX. ■

Mit dem Lemma von Schwarz 2.3.6 können wir noch mehr zeigen.

**Satz 4.6.2.**
Es sei $f$ eine konforme Abbildung von $\mathbb{D}$ auf sich selbst. Dann existiert ein $a \in \mathbb{D}$ und ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $f(z) = c \cdot \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$.

Beweis. XXX. ■

**Satz 4.6.3.**
Alle Möbiustransformationen von $\mathbb{D}$ auf $\mathbb{H}$ sind gegeben durch

$$T(z) = \frac{z_0 + c\overline{z_0}z}{1 - cz}, \; c \in \partial\mathbb{D}. \tag{4.12}$$

Beweis. XXX. ■

# Übungen zu Kapitel 4

Die Übungen mit $(*)$ sind diejenigen, die in der Vorlesung dazugekommen sind. Diejenigen mit $(\diamond)$ sind (in der präsentierten Form) besonders anspruchsvoll.

## Zur Riemannschen Zahlenkugel

**Aufgabe 4.1.**
Beweise Satz 4.1.3.

**Aufgabe 4.2.**
Zeige, dass durch $\chi$ aus (4.3) tatsächlich eine Metrik auf $\widehat{\mathbb{C}}$ definiert wird.

## Zu Möbiustransformationen

## Zum Doppelverhältnis

**Aufgabe 4.3.**

a) Beweisen Sie Folgerung 4.3.5.
**Hinweis:** *Benutzen Sie Satz 4.3.4 und beachten Sie, dass drei Punkte eindeutig einen Kreis festlegen.*

b) Beweisen Sie Folgerung 4.3.6.
**Hinweis:** *Setzen Sie $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ und betrachten Sie $T^{-1}(\widehat{\mathbb{R}})$.*

## Zum Symmetrieprinzip

**Aufgabe 4.4.** Beweise Satz 4.4.2.

## Zum Orientierungsprinzip

# 5 Analytische Fortsetzung

## Inhaltsangabe

## 5.1 Singuläre Punkte

Zunächst einmal klären wir, was wir unter einer analytischen Fortsetzung verstehen.

**Definition 5.1.1.**

Es seien $D, G \subset \mathbb{C}$ Gebiete mit $D \subsetneq G$, $f \in H(D)$ und $F \in H(G)$ mit $F\mid_D = f$. Dann heißt $F$ *eine* **analytische Fortsetzung von $f$ auf $G$**.

**Satz 5.1.2.**

Wenn es eine analytische Fortsetzung gibt, so ist diese eindeutig bestimmt.

Beweis. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Identitätssatz.. ■

**Bemerkung 5.1.3.**

Es ist zunächst unklar, ob es eine analytische Fortsetzung gibt. Wir werden in Kapitel 8 zeigen, dass zu jedem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion existiert, die in kein größeres Gebiet analytische fortgesetzt werden kann.

Frage: Unter welchen Voraussetzungen existiert eine analytische Fortsetzung und wie erhält man diese?
Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir zunächst einmal die Potenzreihenentwicklung holomorpher Funktionen aus einem anderen Blickwinkel.

**Satz 5.1.4.**

Es sei $f \in H(D)$, $D \neq \mathbb{C}$. Wir wissen, dass $f$ dann in jedem Punkt $z_0 \in D$ in eine Potenzreihenentwicklung mit Konvergenzradius $r := r(z_0) \in (0, \infty)$ entwickelt werden kann. Die Funktion $r$ ist nun eine gleichmäßig stetige Funktion von $z_0$.

Beweis. Übung 5.1.. ■

Aufgrund dieser gleichmäßigen Stetigkeit existiert $\lim\limits_{z\in D, z\to\zeta} r(z) = r(\zeta)$ für alle $\zeta \in \partial D$.
Mittels der Funktion $r$ treffen wir nun folgende Definition.

**Definition 5.1.5.**

Ist $r(\zeta) = 0$, so heißt $\zeta$ ein **singulärer Randpunkt** und im Fall $r(\zeta) > 0$ heißt $\zeta$ ein **regulärer Randpunkt**.

**Beispiel 5.1.6.**

Wir betrachten $f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ für $z \in \mathbb{D}$. Dann ist $r(z) = |z-1|$, also ist $z = 1$ ein singulärer Randpunkt, alle anderen Randpunkte auf $\partial\mathbb{D}$ sind regulär.

Die nächsten beiden Sätze zeigen, dass singuläre Randpunkte keine Seltenheit sind.

**Satz 5.1.7.**

Hat die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Konvergenzradius $\rho \in (0, \infty)$, so ist mindestens ein Punkt auf $\partial U_\rho(0)$ singulär.

Beweis. XXX. ■

**Satz 5.1.8 (*Satz von Pringsheim*).**

Hat die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ den Konvergenzradius $\rho \in (0, \infty)$ und gilt $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist $\rho$ ein singulärer Punkt auf $\partial U_\rho(0)$.

Beweis. XXX. ■

Ob ein Randpunkt $\zeta \in \partial U_\rho(0)$ regulär ist, hat nichts mit der Konvergenz der Reihe im Punkt $\zeta$ zu tun. Wir betrachten dazu

**Beispiel 5.1.9.**

a) Die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} z^n$ konvergiert in keinem Randpunkt. Trotzdem sind alle Randpunkte bis auf 1 regulär.

b) Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ (*Lückenreihe*) hat nur singuläre Randpunkte. Begründung:
Es gilt $f(x) \to \infty$ für $x \to 1^-$ auf der reellen Achse. Für $m \in \mathbb{N}$ und $k = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$ gilt ferner

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m-1} z^{2^n} + f\left(z^{2^m}\right) \Rightarrow f\left(re^{2k\pi \mathrm{i}/2^m}\right) \to \infty \ (r \to 1^-).$$

Zudem liegen die Punkte $\left\{re^{2k\pi \mathrm{i}/2^m} : k \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\right\}$ dicht auf $\partial\mathbb{D}$.

c) $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{2^n}$ konvergiert absolut auf $\overline{\mathbb{D}}$, aber wegen $zg'(z) = f(z)$ ist trotzdem jeder Randpunkt singulär.

Wir wollen das zu Grunde liegende Prinzip ein wenig genauer beleuchten.

**Definition 5.1.10.**

Eine offene Menge $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt **Holomorphiegebiet**, falls es keine offenen Teilmengen $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ gibt mit

(1) $\emptyset \neq \Omega_1 \subset \Omega_2 \cap \Omega$.

(2) $\Omega_2$ ist zusammenhängend und nicht in $\Omega$ enthalten.

(3) Für $v \in H(\Omega)$ existiert ein (nicht notwendigerweise eindeutiges) $v \in H(\Omega_2)$ mit $u = v$ in $\Omega_2$.

**Beispiel 5.1.11.**

a) $\mathbb{C}$ ist ein Holomorphiegebiet.

b) Jede offene Kugel ist ein Holomorphiegebiet.

c) Jede konvexe Menge ist ein Holomorphiegebiet.

Die Definition des Holomorphiegebiets lässt sich auch problemlos auf den $\mathbb{C}^n$ erweitern.

Uns interessiert nun der folgende tiefliegende Satz, den wir hier nicht beweisen werden.

**Satz 5.1.12 (*Lückensatz von Fabry*).**

Es sei $P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{m_n}$ eine komplexwertige Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho$, die die Bedingung

$$\lim_{n\to\infty} \frac{m_n}{n} = \infty \tag{5.1}$$

erfüllt, so ist die zugehörige holomorphe Funktion $z \mapsto P(z)$ *nirgends* über $U_\rho(0)$ hinaus fortsetzbar und $K_\rho(0)$ bildet die „natürliche Grenze“.

Beweisreferenz. Die Formulierung entstammt [13], Satz 11.9. Dort findet sich auch weiterführende Literatur zum Beweis. ■

**Folgerung 5.1.13.**

Unter den Voraussetzungen von Satz 5.1.12 ist also $U_\rho(0)$ das Holomorphiegebiet von $z \mapsto P(z)$.

**Beispiel 5.1.14.**

In der Vorlesung weisen wir für die beiden Funktionen $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ und $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$ nach, dass sie jeweils $\mathbb{D}$ als Holomorphiegebiet haben.

**Bemerkung 5.1.15.**

Der Lückensatz von Fabry umfasst den *Lückensatz von Hadamard*, vgl. [13], Satz 11.7.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Bemerkung zu Holomorphiegebieten von mehreren Variablen.

**Bemerkung 5.1.16.**

Betreibt man Funktionentheorie in mehreren Variablen, so bekommt der Begriff des *Holomorphiegebiets* größere Bedeutung. Insbesondere lässt sich zeigen, dass $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ genau dann ein Holomorphiegebiet ist, wenn $\Omega$ pseudokonvex ist; vgl. für Details [7].

## 5.2 Homotopie

In diesem Abschnitt stellen wir nun die Theorie bereit, die für den *Monodromiesatz* im nächsten Abschnitt benötigt wird.

**Definition 5.2.1.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ Wege in $D$ mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$ und $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$.

a) $\gamma_0$ und $\gamma_1$ heißen **homotop modulo $D$** (in Zeichen $\gamma_0 \overset{D}{\sim} \gamma_1$), wenn es eine stetige Funktion $H : [0,1]^2 \to D$ gibt mit $H(0,t) = \gamma_0(t)$, $H(1,t) = \gamma_1(t)$, $H(s,0) = z_0$ und $H(s,1) = z_1$ für $s, t \in [0,1]$.

b) $H$ heißt eine **Homotopie**. Man sagt auch: $H$ deformiert $\gamma_0$ stetig in $\gamma_1$.

c) Ein geschlossener Weg heißt **nullhomotop** ($\gamma_1 \overset{D}{\sim} 0$), wenn $\gamma_1$ in $D$ homotop zum Punktweg $\gamma_0(t) = z_0$ ist.

**Beispiel 5.2.2.**
Es sei $D = \mathbb{D}$ oder $D = \mathbb{C}$ (allgemeiner $D \subset \mathbb{C}$ konvexes Gebiet). Dann sind je zwei Wege $\gamma_0, \gamma_1$ vermöge der Homotopie

$$H(s,t) := (1-s)\gamma_0(t) + s\gamma_1(t)$$

homotop.

**Bemerkung 5.2.3.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$. Dann folgt mit Beispiel 5.2.2 und dem Riemannschen Abbildungssatz – den wir in Kapitel 7 kennenlernen werden – dass je zwei Wege in $D$ homotop sind.

**Satz 5.2.4.**
Die Homotopie von Wegen in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. XXX. ■

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei Beispielen.

**Beispiel 5.2.5.**
Wir betrachten $D := K_{r,R}(0)$. In der Vorlesung zeigen wir nun:

- Für $r < \rho < R$ sind die Halbkreise $\gamma_\pm(t) = \rho e^{\pm it}$, $t \in [0,\pi]$, nicht homotop in $D$.
- Ein geschlossener Weg $\gamma_0 : [0,1] \to D$ mit Umlaufzahl $n(\gamma_0, 0) = m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist homotop zu $\gamma(t) = \rho e^{2m\pi it}$, $t \in [0,1]$, für ein $\rho \in (r,R)$.

## 5.3 Der Monodromiesatz

**Definition 5.3.1.**
Es sei $D_0 \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_0 \in H(D_0)$.

a) $(f_0, D_0)$ heißt ein **Funktionselement**.

b) Ist $D_1 \subset \mathbb{C}$ ein weiteres Gebiet und $f_1 \in H(D_1)$ mit $f_1(z) = f_0(z)$ für $z \in D_0 \cap D_1 \neq \emptyset$, so heißt $(f_1, D_1)$ **direkte analytische Fortsetzung** von $(f_0, D_0)$.

c) Sind $(f_0, D_0), \ldots, (f_n, D_n)$ Funktionselemente mit $(f_v, D_v) \sim (f_{v+1}, D_{v+1})$ für $v = 0, \ldots, n-1$, so heißt $(f_0, D_0), \ldots, (f_n, D_n)$ eine **Kette**. Sind alle $D_v$ Kreisscheiben, so spricht man von einer **Kreiskette**.

**Bemerkung 5.3.2.**
Genauer heißt Teil b):
Die Funktion $F : D_0 \cup D_1 \to \mathbb{C}$ mit $F(z) = f_0(z)$ für $z \in D_0$ und $F(z) = f_1(z)$ für $z \in D_1$ ist eine analytische Fortsetzung von $f_0$ auf $D_0 \cup D_1$. Wir schreiben dann $(f_0, D_0) \sim (f_1, D_1)$.

Zunächst machen wir uns klar, dass die direkte analytische Fortsetzung **keine** Äquivalenzrelation ist.

**Beispiel 5.3.3.**
Es seien $(f_v, D_v)$ für $v = 0, \ldots, 4$ gegeben durch

$$D_v = \left\{ z \in \mathbb{C} \colon \left| z - e^{-\mathrm{i}v\pi/2} \right| < 1 \right\}$$

und $f_v(z) = \log(|z|) + \mathrm{i} \cdot \arg(z)$ mit $\left|\arg(z) - \frac{v\pi}{2}\right| < \pi$. Dann gilt $(f_v, D_v) \sim (f_{v+1}, D_{v+1})$ für $v = 0, \ldots, 3$, aber $(f_0, D_0) \not\sim (f_4, D_4)$. Das heißt, $\sim$ ist keine Äquivalenzrelation.

Nun betrachten wir analytische Fortsetzung bezüglich eines Weges.

**Definition 5.3.4.**
Es seien $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ ein Weg, $(f_v, D_v)_{v=0,\ldots,n}$ eine Kette und $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n < t_{n+1} = b$ eine Zerlegung von $[a, b]$ mit $\gamma([t_v, t_{v+1}]) \subset D_v$ für $v = 0, \ldots, n$. Dann heißt $(f_n, D_n)$ eine analytische Fortsetzung von $(f_0, D_0)$ eine **analytische Fortsetzung von $(f_0, D_0)$ längs $\gamma$.**

Als nächstes zeigen wir, dass die analytische Fortsetzung eines Funktionenelements längs eines Weges unabhängig von der speziellen Kette ist.

**Satz 5.3.5.**
Die analytische Fortsetzung eines Funktionenelements längs eines Weges $\gamma$ hängt nicht von der speziell gewählten Kette ab. Ist sie möglich, so auch immer mit einer Kreiskette.

Beweis. XXX. ■

Eine in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ holomorphe Funktion hat lokal immer eine Stammfunktion und diese kann man längs jeden Weges $\gamma$ in $D$ analytisch fortsetzen. An dem Beispiel $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f(z) = 1/z$ bzw. $D = \mathbb{C} \setminus \{\pm \mathrm{i}\}$, $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ sieht man, dass analytische Fortsetzungen längs zweier Wege mit gleichem Anfangs- und Endpunkten zu verschiedenen Ergebnissen führen kann.
Frage: Welche Voraussetzung benötigt man, damit dies nicht passiert?
Antwort: Homotopie!

**Satz 5.3.6 (*Monodromiesatz*).**
Ist das Funktionselement $(f_0, D_0)$ im Gebiet $D$ längs jeden Weges $\gamma$ in $D$ analytisch fortsetzbar, so führt die Fortsetzung längs homotoper Wege immer zum gleichen Ergebnis. Ist speziell $D$ einfach zusammenhängend und $(f_0, D_0)$ unbeschränkt in $D$ analytisch fortsetzbar, so existiert eine in $D$ holomorphe Funktion $F$ mit $F|_{D_0} = f_0$ und $F$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. XXX. ■

**Bemerkung 5.3.7.**
Die Aussage für einfach zusammenhängende Gebiete gilt für mehrfach zusammenhängende Gebiete im Allgemeinen nicht mehr. Als Gegenbeispiel diene $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $D_0 = U_1(1)$ und $f_0(z) = \log z$.

Mit diesem Resultat im Gepäck können wir nun einen Cauchy-Integralsatz für homotope Wege beweisen.

**Satz 5.3.8 (*Homotopieversion des Cauchyschen Integralsatzes*).**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f \in H(D)$ und $\gamma_0, \gamma_1$ zwei homotope Integrationswege mit gleichem Anfangs- und Endpunkt. Dann gilt

$$\int\limits_{\gamma_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z. \tag{5.2}$$

Beweis. XXX. ■

Wir schließen diesen Abschnitt mit zwei Folgerungen.

**Folgerung 5.3.9.**
Es sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $\gamma$ ein nullhomotoper Weg in $D$. Dann ist $\gamma$ auch nullhomolog in $D$, d.h. $n(\gamma, z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C} \setminus D$. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.

**Folgerung 5.3.10.**
Ein Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend genau dann, wenn jede geschlossene Kurve nullhomotop ist.

## 5.4 Die Fundmentalgruppe

**Satz 5.4.1.**
In der Menge der in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ verlaufenden Wege mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt $z \in D$ ist Homotopie eine Äquivalenzrelation.

Beweis. XXX. ■

**Satz 5.4.2.**
Parameterwechsel ändert die Homotopieklasse nicht.

Beweis. XXX. ■

**Bemerkung 5.4.3.**
Es seien $\alpha$ und $\beta$ zwei in einem Gebiet $D \subset \mathbb{C}$ verlaufende Wege mit gemeinsamem Anfangs- und Endpunkt $z \in D$.
Wird zuerst $\alpha$ durchlaufen und dann $\beta$, so definiert man $\alpha * \beta$ durch

$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & : \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1) & : \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}. \tag{5.3}$$

Gilt $\alpha \sim \alpha_1$ und $\beta \sim \beta_1$, so ist $\alpha * \beta \sim \alpha_1 * \beta_1$ mit Homotopie

$$H(s,t) = \begin{cases} H_\alpha(s, 2t) & : \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ H_\beta(s, 2t-1) & : \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}, \tag{5.4}$$

wobei $H_\alpha$ Homotopie zwischen $\alpha$ und $\alpha_1$ und $H_\beta$ Homotopie zwischen $\beta$ und $\beta_1$ ist. Ebenso folgt aus $\alpha \sim \alpha_1$ auch $\alpha^{-1} \sim \alpha_1^{-1}$ mit Homotopie $H(s, 1-t)$, wobei $\alpha^{-1}$ den umgekehrt durchlaufenen Weg bezeichnet: $\alpha^{-1}(t) = \alpha(1-t)$, $t \in [0,1]$.
Wir definieren nun $[\alpha] * [\beta] := [\alpha * \beta]$. Obige Überlegungen zeigen, dass dies wohldefiniert ist, d.h. unabhängig von der Wahl der Repräsentanten. Das Einselement $\mathbf{1}$ ist die Äquivalenzklasse des Punktweges $\mathbf{1}(t) = z_0$ für alle $t \in [0,1]$. Weiter gilt $[\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}]$. Damit wird die Menge der Äquivalenzklassen zu einer einer Gruppe, welche wir mit $\Pi_1(D, z_0)$ bezeichnen. Diese hängt (auf den ersten Blick) von $z_0$ an.

Wir zeigen jetzt, dass tatsächlich keine Abhängigkeit von $z_0$ besteht.
**Satz 5.4.4.**
$\Pi_1(D, z_0)$ hängt nicht von $z_0$ ab.

Beweis. XXX. ■

**Folgerung 5.4.5.**
$[\alpha] \mapsto [\gamma^{-1} * \alpha * \gamma]$ ist ein Isomorphismus zwischen den Gruppen $\Pi_1(D, z_0)$ und $\Pi_1(D, z_1)$.

**Definition 5.4.6.**
Eine der Gruppen $\Pi_1(D, z_0)$ bzw. $\Pi_1(D, z_1)$ bezeichnen wir dann mit $\Pi_1(D)$. Sie heißt **Fundamentalgruppe von *D***.

Die Fundamentalgruppe wird bei den Riemannschen Flächen als theoretisches Hilfsmittel benötigt.

## Übungen zu Kapitel 5

Die Übungen mit ($*$) sind diejenigen, die in der Vorlesung dazugekommen sind. Diejenigen mit ($\diamond$) sind (in der präsentierten Form) besonders anspruchsvoll.

### Zu singulären Punkten

**Aufgabe 5.1.** Beweise Satz 5.1.4

### Zur Fundamentalgruppe

**Aufgabe 5.2.** Beweise Satz 5.4.1.

**Aufgabe 5.3.** Beweise Satz 5.4.2.

**Aufgabe 5.4.** Beweise Satz 5.4.4.

# Literaturverzeichnis


[1] Lars Ahlfors. Complex Analysis. 3. Aufl. New York: McGraw-Hill, Inc., 1979.

[2] Folkmar Bornemann. Funktionentheorie. 2. Aufl. München: Birkhäuser, 2016.

[3] John B. Conway. Functions of One Complex Variable I. 1. Aufl. New York: Springer, 1978.

[4] Jürgen Elstrodt. Maß- und Integrationstheorie. 1. Aufl. Heidelberg: Springer, 2011.

[5] Otto Forster. Riemannsche Flächen. 3. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 1977.

[6] Eberhard Freitag und Rolf Busam. Funktionentheorie 1. 4. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006.

[7] Hans Grauert und Klaus Fritzsche. Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlicher. 1. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 1974.

[8] Klaus Jänich. Funktionentheorie. 6. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2004.

[9] Winfried Kaballo. Einführung in die Analysis I. 1. Aufl. Heidelberg: Spektrum, 2000.

[10] Max Koecher und Aloys Krieg. Elliptische Funktionen und Modulformen. 1. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2007.

[11] Ernst Peschl. Funktionentheorie I. 1. Aufl. Mannheim: Bibliographisches Institut AG, 1968.

[12] Boto von Querenburg. Mengentheoretische Topologie. 3. Aufl. Heidelberg: Springer, 2001.

[13] Reinhold Remmert und Georg Schumacher. Funktionentheorie 2. 3. Aufl. Berlin Heidelberg: Springer, 2007.

[14] Walter Rudin. Functional Analysis. 2. Aufl. New York: McGraw-Hill, 1991.