technische universität dortmund

fakultät für mathematik

BACHELORARBEIT

zum Thema:

Die Laplace-Transformation und Anwendungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen

Matthias Schulte

Sommersemester 2017

Betreuung: PROF. DR. RAINER BRÜCK
Lehrstuhl IX
(Analysis, Mathematische Physik und Dynamische Systeme)

Eingereicht am: 10. Juli 2017

Inhaltsverzeichnis

Abstract

In der nachfolgenden Arbeit wird das Verfahren der Lösung einer Differentialgleichung mittels der Laplace-Transformierten hergeleitet. Dazu betrachten wir in Kapitel 1 zunächst die Grundlagen der Fouriertransformierten und diskutieren in Kapitel 2 anhand der Heaviside-Funktion die Notwendigkeit zur Einführung und Diskussion der Laplace-Transformation. In Kapitel 3 werden wir dann die Laplace-Transformation definieren und in Kapitel 4 wichtige Sätze bezüglich ihrer Konvergenz beweisen, die dann in Kapitel 5 zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen benutzt werden. Die dabei benötigten Begrifflichkeiten zur Analysis und zur Funktionentheorie sind in den Anhängen A und B aufgeführt.

In this bachelor thesis we establish the method of solving an ordinary differential equation using the Laplace transform. To do so we take a good look at Fourier series and its integral transformation in chapter 1. After that we discuss the necessity to expand the Fourier transform into the Laplace transform using the Heaviside function in chapter 2 and define the Laplace transform in chapter 3. We will also discuss important theorems concerning the convergence of the Laplace transform in chapter 4. In chapter 5 we will finally take all the previous results together and present a method to solve ordinary differential equations using the Laplace transform. The most important results from analysis and complex analysis used in this thesis are presented to the reader in the appendices A and B.

Einleitung

Der Analyse und Behandlung harmonischer Schwingungen der Form

$f(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$

kommt in den Naturwissenschaften – besonders in der Physik – eine herausragende Rolle zu. Dabei wird eine wichtige Eigenschaft dieser Schwingungen benutzt: Die Überlagerung mehrerer Schwingungen der gleichen Frequenz ergibt wieder eine Schwingung ebendieser Frequenz.

Überlagern wir nun Schwingungen unterschiedlicher Frequenzen, so können wir die entstehende Frequenz als Summe harmonischer Schwingungen darstellen. Jean Baptiste Fourier zeigte in diesem Zusammenhang, dass dies für „jede beliebige“ periodische Funktion möglich ist. Die genauen Bedingungen hierfür lieferte Peter Gustav Dirichlet.[1]

Diese sogenannten *Fourierreihen* werden in Kapitel 1 im Komplexen betrachtet und dann durch Grenzübergang zu einer Integraltransformation fortgesetzt, die einer komplexwertigen Funktion eine Bildfunktion zuordnet. Diese Transformation nennt sich *Fouriertransformation*. Beschränken wir uns bei dieser Transformation auf Zeitwerte $t > 0$ und eine gewisse Funktionenklasse, so können wir durch Hinzufügen von gewissen „konvergenzverbessernden Faktoren“ die *Laplacetransformation* definieren. Der Sinn hinter dieser Beschränkung wird in Kapitel 2 erläutert.

Nach dem Studium der Eigenschaften und Sätze zu dieser Art der Integraltransformation in Kapitel 3 und Kapitel 4 erkennen wir, dass die Transformation von Differentialgleichungen im *Originalraum* zu algebraischen Gleichungen im *Bildraum* führen, die sich dann mit üblichen Mitteln behandeln lassen. Dieser Synergie zwischen Original- und Bildbereich wird in Kapitel 5 Rechnung getragen.

Da bei der Erarbeitung obiger Themen verschiedene Hilfsmittel aus der Analysis und der Funktionentheorie benötigt werden, werden diese in den Anhängen A und B zur Verfügung gestellt und mit Verweisen versehen.

In dieser Bachelorarbeit ist stets $\mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$ und „$\subset$“ steht für die Teilmengenbeziehung, wobei auch Gleichheit erlaubt ist.

[1] vgl. hierzu [Weber and Ulrich, 2012].

1 Grundlagen der Fourier-Transformation

In diesem Kapitel wird im Wesentlichen das Verfahren der Fourier-Transformation und seine Anwendung vorgestellt. Auf die Beweise der folgenden Sätze wird hier aufgrund des Umfangs dieser Arbeit verzichtet. Nachzulesen sind diese in [Endl and Luh, 1989].

Es sei im Folgenden stets $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.

Definition 1.1.
Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt ***T*-periodisch**, falls für alle $t \in I$ gilt:

$$f(t + T) = f(t). \tag{1.1}$$

. . . .

Definition 1.2.
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion.
Wir sagen, ***f* genügt den Dirichlet-Bedingungen**, falls gilt:

(D1) f ist beschränkt auf I.

(D2) f besitzt im Intervall $[0, T]$ – falls definiert – höchstens endlich viele Unstetigkeitsstellen.

(D3) f' ist auf dem Intervall $[0, T]$ höchstens in endlich vielen Stellen unstetig.

. . . .

Die Periode einer T-periodischen Funktion kann also in endlich viele Teilintervalle derart zerlegt werden, so dass die zugehörige Funktion f auf diesen Teilintervallen monoton und stetig verläuft. An den Sprungstellen treten dabei nur Sprünge „endlicher Höhe“ auf.
Die Funktionen, die in der Anwendung benötigt werden bzw. in der Anwendung auftreten, erfüllen im Allgemeinen diese Bedingungen.

Satz 1.3.
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine T-periodische Funktion, welche die Dirichlet-Bedingungen in Definition 1.2 erfüllt.
Dann lässt sich f als **Fourier-Reihe**

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 \cdot t) + b_k \sin(k\omega_0 \cdot t)] \tag{1.2}$$

darstellen, wobei $\omega_0 := \frac{2\pi}{T}$ die Grundfrequenz ist.
Zu einer gegebenen Funktion f bezeichnen wir die Fourier-Reihe mit $(\mathfrak{F}f)(t)$.

Satz 1.4.
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die als Fourier-Reihe $(\mathfrak{F} f)(t)$ wie in (1.2) darstellbar ist.
Dann konvergiert die Fourier-Reihe an jeder Stetigkeitsstelle $s \in I$ gegen den Funktionswert $f(s)$. An jeder Unstetigkeitsstelle u konvergiert die Reihe gegen das arithmetische Mittel aus rechts- und linksseitigem Limes:

$$(\mathfrak{F} f)(t) \to \frac{1}{2}\left[\lim_{\varepsilon\to 0} f(u+\varepsilon) + \lim_{\varepsilon\to 0} f(u-\varepsilon)\right] \text{ für } t \to u \tag{1.3}$$

Wir werden nun Formeln für die Berechnung der Koeffizienten a_k und b_k in (1.2) vorstellen. Dazu ist es zweckmäßig, die Substitution $x = \omega_0 \cdot t$ durchzuführen, durch die eine T-periodische Funktion in t zu einer 2π-periodischen Funktion in x übergeht. Dies ist daher von Vorteil, da wir nun annehmen können, dass alle betrachteten Funktionen 2π-periodisch sind. Gleichung (1.2) geht durch diese Substitution in folgende Form über:

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k \cdot \cos(kx) + b_k \cdot \sin(kx)\right] \tag{1.4}$$

Für die Berechnung der Koeffizienten der Fourier-Reihe ist häufig folgendes Lemma nützlich:

Lemma 1.5.
Für alle $k, m \in \mathbb{Z}$ mit $k, m \neq 0$ gelten folgende Gleichheiten:

a) $\int_0^{2\pi} \sin(kx)\,\mathrm{d}x = 0$ und $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0$.

b) $\int_0^{2\pi} \sin(kx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq m \\ \pi & : \quad k = m \end{cases}$

c) $\int_0^{2\pi} \cos(kx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & : \quad k \neq m \\ \pi & : \quad k = m \end{cases}$

d) $\int_0^{2\pi} \sin(kx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$

Satz 1.6.
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit einer Fourier-Reihe wie in Gleichung (1.4). Dann gelten die folgenden Beziehungen:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{(konstantes Glied der Fourier-Reihe);} \tag{1.5}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \qquad \text{für } k \geq 1; \tag{1.6}$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \qquad \text{für } k \geq 1. \tag{1.7}$$

Bemerkung 1.7.

a) Da alle bei der Berechnung der Fourier-Koeffizienten beteiligten Funktionen 2π-periodisch sind, können wir als Integrationsintervall ein beliebiges Intervall der Länge 2π verwenden, da gilt:

$$\int_0^{2\pi} \mathcal{I}(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^{a+2\pi} \mathcal{I}(x) \, \mathrm{d}x,$$

wobei $\mathcal{I}(x)$ der Integrand des jeweiligen „Koeffizientenintegrals“ und $a \in \mathbb{R}$ ist. Insbesondere kann es manchmal sinnvoll sein, das Intervall $[-\pi, \pi]$ zu nutzen.

b) Bei der Berechnung der Koeffizienten kann man häufig vorhandene Symmetrien des Funktionsgraphen ausnutzen.

1) Ist die Funktion f *gerade*, gilt also $f(-x) = f(x)$ für alle x im Definitionsbereich, so ist auch die Funktion $f(x) \cdot \cos(kx)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gerade. Die Funktion $f(x) \cdot \sin(kx)$ ist hingegen für alle $k \in \mathbb{N}$ ungerade.
Wählt man nun $[-\pi, \pi]$ als Integrationsintervall, so ergibt sich

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, \mathrm{d}x, \;\; a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(kx) \, \mathrm{d}x \text{ und } b_k = 0.$$

f ist dann also in eine reine Kosinusreihe entwickelbar.

2) Ist die Funktion f *ungerade*, gilt also $f(-x) = -f(x)$ für alle x im Definitionsbereich, so kann man mittels analogen Überlegungen Folgendes herleiten:

$$a_k = 0 \text{ und } b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(kx) \, \mathrm{d}x \text{ für } k \in \mathbb{N}.$$

In diesem Fall lässt sich f also in eine reine Sinusreihe entwickeln.

Wir betrachten nun ein erstes Beispiel zur Berechnung der Fourier-Reihe einer einfachen 2π-periodischen Funktion.

Beispiel 1.8.
Es sei $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t) = \begin{cases} t & : \quad t \in [0, \pi] \\ 0 & : \quad t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$

Gesucht ist die Fourier-Reihe der 2π-periodischen Fortsetzung von f.
Lösung:
Da f weder gerade noch ungerade ist, müssen die Koeffizienten „hart“ ausgerechnet werden. Für a_0 ergibt sich durch Integration der Wert $\frac{\pi}{4}$.
Partielle Integration ergibt in den anderen Fällen

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \cdot \cos(kt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\left[\frac{t}{k} \sin(kt) \right]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi \sin(kt) \, \mathrm{d}t \right] = \left[\frac{1}{k^2\pi} \cos(kt) \right]_0^\pi = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi}$$

sowie

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi t \cdot \sin(kt) \, \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi} \cdot \left[\left[-\frac{t}{k} \cos(kt) \right]_0^\pi + \frac{1}{k} \int_0^\pi \cos(kt) \, \mathrm{d}t \right] = \frac{1}{\pi} \cdot -\frac{\pi}{k}(-1)^k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Wir können in diesem Fall von 0 bis π integrieren, da die Integration von π bis 2π über die Nullfunktion keinen Anteil an den Fourier-Koeffizienten hat. Es ergibt sich also

$$f(t) = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi} \cdot \cos(kt) + \frac{(-1)^{k+1}}{k} \cdot \sin(kt) \right].$$

. . . .

Wir werden nun untersuchen, welche Auswirkungen auftreten, wenn wir auch komplexe Zahlen zulassen. Insbesondere werden wir eine kompakte Formel für die Berechnung der komplexen Fourier-Koeffizienten angeben. Zunächst sei hierzu nochmal an die Definition des komplexen Sinus und Kosinus erinnert.

Bemerkung 1.9.
Für $z \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ gelten die folgenden Beziehungen

$$\sin(nz) = \frac{1}{2\mathrm{i}} \left(e^{\mathrm{i} \cdot nz} - e^{-\mathrm{i} \cdot nz} \right) \text{ und} \tag{1.8}$$

$$\cos(nz) = \frac{1}{2} \left(e^{\mathrm{i} \cdot nz} + e^{-\mathrm{i} \cdot nz} \right). \tag{1.9}$$

. . . .

Bemerkung 1.10.
Unter Verwendung der Gleichungen (1.8) und (1.9) erhält die Fourier-Reihe in Gleichung (1.4) die folgende Gestalt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{a_k - \mathrm{i}b_k}{2} e^{\mathrm{i}kx} + \frac{a_k + \mathrm{i}b_k}{2} e^{-\mathrm{i}kx} \right] =: \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\mathrm{i}kx} \tag{1.10}$$

mit gewissen komplexen Koeffizienten c_k.

. . . .

Wir werden nun eine Formel für diese c_k angeben.

Satz 1.11.
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Fourier-Reihe $(\mathfrak{F}f)(t)$ wie in Gleichung (1.10). Dann gilt für die Koeffizienten c_k

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = a_0 \quad \text{und} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } k \geq 1. \tag{1.11}$$

. . . .

Beispiel 1.12.
Es sei f definiert wie in Beispiel 1.8. Unter Benutzung von (1.11) für die komplexen Fourier-Koeffizienten ergibt sich

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \left[\frac{\mathrm{i}}{4\pi} e^{2k\mathrm{i}x} + \left(\frac{1}{4\pi k^2} + \frac{\mathrm{i}}{4k} \right) e^{(2k-1)\mathrm{i}x} \right].$$

. . . .

Nach diesem Abriss über komplexe Fourier-Reihen werden wir nun die *Fourier-Transformation* definieren. Dies ist dann eine Integraltransformation, die einer geeigneten Funktion eine Transformierte zuordnet. Dazu definieren wir nun zuerst schrittweise das Fourier-Integral.

Definition 1.13.
Für eine T-periodische Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit *Kreisfrequenz* $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ heißt

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{1.12}$$

Spektralfunktion von f.

. . . .

Bemerkung 1.14.
Ist $F(\omega)$ eine komplexwertige Funktion, so schreiben wir

$$F(\omega) = \text{Re } F(\omega) + \text{i} \cdot \text{Im } F(\omega), \tag{1.13}$$

wobei Re $F(\omega)$ und Im $F(\omega)$ reellwertige Funktionen sind.

. . . .

Satz 1.15.
Ist die Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ *absolut integrierbar*, gilt also

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, \mathrm{d}t < \infty, \tag{1.14}$$

so existiert die zugehörige Spektralfunktion $F(\omega)$ wie in Gleichung (1.12).

. . . .

Satz 1.16.
Für eine absolut integrierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ existiert die folgende Darstellung als *Fourier-Integral*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t \tag{1.15}$$

. . . .

Mittels dieser Resultate können wir nun – abschließend für dieses Kapitel – die *Fourier-Transformation* definieren.

Definition 1.17.

a) Die Transformation

$$\Phi f(\omega) := F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \, \mathrm{d}t \tag{1.16}$$

heißt **Fourier-Transformation** von f.

b) Die Menge der Funktionen $f(t)$, für welche die zugehörige Spektralfunktion existiert, heißt **Originalraum**. Die Funktionen im Originalraum heißen **Originalfunktionen**.

c) Die Menge der Bildfunktionen $F(\omega)$ heißt **Bildraum der Fourier-Transformation**.

. . . .

Bemerkung 1.18.
Die Fourier-Transformation ist eine lineare Transformation, d.h. es gilt

$$\Phi(\alpha f)(\omega) = \alpha \cdot \Phi f(\omega) \quad \text{und} \quad \Phi(f+g)(\omega) = \Phi f(\omega) + \Phi g(\omega) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1.17}$$

. . . .

Bevor wir nun diskutieren, warum die Fourier-Transformation alleine nicht ausreicht, betrachten wir noch ein kurzes Beispiel zur Berechnung der Fourier-Transformation.

Beispiel 1.19.
Wir betrachten folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(t) = \begin{cases} 1+t & : \quad -1 < t \leq 0 \\ -1+t & : \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} .$$

Gesucht ist die Fourier-Transformierte Φf von f.
Als Ansatz benutzen wir Gleichung (1.16) und erhalten somit

$$\begin{aligned}
(\mathfrak{F} f)(t) &= \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{0} (1+t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} (-1+t) e^{-\mathrm{i}\omega t} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[e^{-\mathrm{i}\omega t} \left(\frac{1 + \mathrm{i}\omega(1+t)}{\omega^2} \right) \right]_{-1}^{0} + \left[e^{-\mathrm{i}\omega t} \left(\frac{1 + \mathrm{i}\omega(t-1)}{\omega^2} \right) \right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1+\mathrm{i}\omega}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} e^{\mathrm{i}\omega} + \frac{1}{\omega^2} e^{-\mathrm{i}\omega} - \frac{1-\mathrm{i}\omega}{\omega^2} \\
&= -\frac{1}{\omega^2} \left(e^{\mathrm{i}\omega} - e^{-\mathrm{i}\omega} \right) + \frac{2\mathrm{i}\omega}{\omega^2} \\
&\overset{(1.8)}{=} -\frac{2\mathrm{i}}{\omega^2} \sin\omega + \frac{2\mathrm{i}\omega}{\omega^2} \\
&= 2\mathrm{i} \left(\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega^2} \sin\omega \right).
\end{aligned}$$

. . . .

2 Notwendigkeit der Laplace-Transformation

Um die Notwendigkeit der Laplace-Transformierten zu motivieren, betrachten wir nun an einem Beispiel, dass die Fourier-Transformation im Allgemeinen nicht ausreicht, um alle in der Praxis vorkommenden Funktionen zu transformieren.
Hierzu untersuchen wir die *Heaviside-Funktion*, die das Anschalten einer Spannungsquelle der Spannung 1V zum Zeitpunkt $t = 0$ modelliert.

Beispiel 2.1.
Wir definieren die Heaviside-Funktion wie folgt:

$$H(t) = \chi_{[0,\infty)}(t) = \begin{cases} 1 & : \quad t \geq 0 \\ 0 & : \quad t < 0 \end{cases}, \tag{2.1}$$

wobei $\chi_{[0,\infty)}$ die charakteristische Funktion auf $[0, \infty)$ bezeichnet.
Mit Gleichung (1.16) ergibt sich als Ansatz für die Fourier-Transformierte von H:

$$\Phi H(\omega) = \int_0^\infty e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\mathrm{i}\omega t}}{-\mathrm{i}\omega}\right]_0^\infty = \lim_{l\to\infty}\left[-\frac{1}{\mathrm{i}\omega}e^{-\mathrm{i}\omega l}\right] + \frac{1}{\mathrm{i}\omega}. \tag{2.2}$$

Da $e^{-\mathrm{i}\omega t} = \cos\omega t + \mathrm{i}\cdot\sin\omega t$ für $t \to \infty$ keinen Grenzwert besitzt, führt dieser Ansatz nicht zum Ziel.

Fassen wir H hingegen für $a > 0$ als punktweisen Limes der Funktion

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & : \quad t \geq 0 \\ 0 & : \quad t < 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

für $a \to 0$ auf, so ergibt sich – wieder mit Gleichung (1.16) – folgender Ansatz für die Fourier-Trans-formierte:

$$\Phi f(\omega) = \int_0^\infty e^{-(a+\mathrm{i}\omega)t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-(a+\mathrm{i}\omega)t}}{-(a+\mathrm{i}\omega)}\right]_0^\infty = \lim_{l\to\infty}\frac{e^{-(a+\mathrm{i}\omega)l}}{-(a+\mathrm{i}\omega)} + \frac{1}{a+\mathrm{i}\omega} \overset{(\star)}{=} \frac{1}{a+\mathrm{i}\omega}, \tag{2.4}$$

wobei wir an der Stelle $(\star)$ ausgenutzt haben, dass $\left|e^{\mathrm{i}\omega t}\right| = 1$ und $a > 0$ vorausgesetzt ist.

Zerlegt man Φf nun wie in Bemerkung 1.14 in Real- und Imaginärteil, so ergibt sich

$$\Phi f(\omega) = \underbrace{\frac{a}{a^2+\omega^2}}_{=:\mathrm{Re}\,\Phi f} + \mathrm{i} \cdot \underbrace{\frac{\omega}{a^2+\omega^2}}_{=:\mathrm{Im}\,\Phi f}. \tag{2.5}$$

Wir betrachten nun den Grenzübergang $a \to 0$ für Real- und Imaginärteil:

1) Realteil: Es ist

$$\lim_{a\to 0} [\mathrm{Re}\,\Phi f] = \lim_{a\to 0} \frac{a}{a^2+\omega^2} \overset{(\star\star)}{=} \pi\delta(\omega) \quad \text{für } \omega = 0. \tag{2.6}$$

An der Stelle $(\star\star)$ wird hier die *Diracsche Deltafunktion* benutzt, die durch die Funktionalgleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t)\,\mathrm{d}t = f(0) \tag{2.7}$$

gegeben ist, wobei f eine beliebige, in $t = 0$ stetige Funktion ist. Dieses δ kann nicht mehr als klassische Funktion angegeben werden, wohl aber als Distribution im Sinne verallgemeinerter Funktionen. Somit sei an dieser Stelle angemerkt, dass die Gleichheit in (2.6) im Distributionssinne zu lesen ist. Wir sagen, der Grenzwert in Gleichung (2.6) ist eine Realisierung der Deltafunktion mit dem Normierungsfaktor π, der nur aus ästhetischen Zwecken angeführt ist.

2) Imaginärteil: Hier folgt im Vergleich zu obiger Rechnung unkompliziert

$$\lim_{a\to 0} [-\mathrm{i} \cdot \mathrm{Im}\,\Phi f] = -\mathrm{i} \cdot \lim_{a\to 0} \frac{\omega}{a^2+\omega^2} = -\frac{\mathrm{i}}{\omega} = \frac{1}{\mathrm{i}\omega} \text{ für } \omega \neq 0. \tag{2.8}$$

Somit folgt insgesamt für die Fourier-Transformierte von H:

$$\Phi H(\omega) = \begin{cases} \pi\delta(\omega) & : \quad \omega = 0 \\ \dfrac{1}{\mathrm{i}\omega} & : \quad \omega \neq 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Dies bedeutet, dass die Fourier-Transformierte der Heaviside-Funktion zwar existiert, aber keine klassische Funktion mehr darstellt, sondern eine Distribution.[2]
Dieses Beispiel zeigt insbesondere, dass Satz 1.15 nur eine hinreichende Bedingung für die Existenz der Fourier-Transformierten bzw. der Spektralfunktion ist:
In diesem Beispiel existiert diese (wenn auch nicht im klassischen Funktionensinn), die Heaviside-Funktion ist aber nicht absolut integrierbar.

. . . .

[2] Auf diese Tatsache wird jedoch im Folgenden nicht genauer eingegangen, da dies nicht Gegenstand dieser Arbeit ist. Für eine Einführung in die Distributionstheorie sei auf [Kaballo, 2014] verwiesen.

Folgerung 2.2.
Beispiel 2.1 zeigt, dass die Fourier-Transformation noch nicht alle praxisrelevanten Fälle abdeckt. Daher benötigen wir eine andere Integraltransformation, sodass auch solche Fälle abgedeckt sind.

. . . .

Es ist natürlich noch nicht automatisch gesagt, dass die Laplace-Transformation die geeignete Transformation ist. Wir werden allerdings bereits hier schon einmal vorgreifen und die Laplace-Transformierte der Heaviside-Funktion gemäß Gleichung (3.2) berechnen. Daran werden wir erkennen: Die Laplace-Transformation ist keinesfalls ungeeignet.

Bemerkung 2.3.
Für $s = \sigma + \omega\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ gilt gemäß Gleichung (3.2) folgende Gleichheit:

$$\mathcal{L}H(s) = \int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^k = \underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(\frac{e^{-sk}}{-s} + \frac{1}{s}\right)}_{=:\alpha} = \frac{1}{s} \tag{2.10}$$

für $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$:
Im Fall $\sigma = 0$ würde sich α schreiben lassen als

$$\mathcal{L}H(s) = \int\limits_0^\infty H(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \Phi H(\omega). \tag{2.11}$$

Hier kann also gemäß der Rechnung in (2.2) keine Konvergenz vorliegen.
Für $\operatorname{Re} s = \sigma < 0$ existiert der Grenzwert von $\dfrac{e^{-sk}}{-s}$ für $k \to \infty$ nicht mehr, wodurch als *Konvergenzhalbebene* nur

$$\mathcal{K}_H := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\} \tag{2.12}$$

übrig bleibt.
Wir sehen also, dass die Laplace-Transformierte auf ihrer Konvergenzhalbebene existiert und zwar als *Funktion* in s. Somit kann die Laplace-Transformation im Gegensatz zur Fourier-Transformation bei der Heaviside-Funktion problemlos durchgeführt werden.

. . . .

Bemerkung 2.3 illustriert, dass die Laplace-Transformation in einem gewissen Sinne mehr leistet als die Fourier-Transformation. Wir werden allerdings in Kapitel 3 bei der genauen Definition der Laplace-Transformation sehen, dass dieses „Mehr“ an Leistung zu einem Preis erkauft wird, der die Anzahl der Laplace-transformierbaren Funktionen einschränkt. Dies müssen wir allerdings in Kauf nehmen, da es gerade die praxisrelevanten Funktionen nicht trifft: Hier ist in der Regel jede vorkommende Funktion auch Laplace-transformierbar.

3 Die Laplace-Transformation

Nachdem wir in Kapitel 2 die Notwendigkeit einer weiteren Integraltransformation eingesehen haben, wird diese nun für eine entsprechende Klasse von Funktionen, die *kausalen Zeitfunktionen*, definiert. Wir werden sehen, dass die dabei entstehende *Laplace-Transformation* zum einen in gewissem Sinne eindeutig ist bei gegebener Funktion f und zum anderen für geeignet eingeschränkte Werte sicher konvergiert.

Im Folgenden sei wieder $I \subset \mathbb{R}$ stets ein Intervall.

Definition 3.1.
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt **lokal integrierbar** auf I, falls für jedes kompakte Intervall $[a, b] \subset I$ gilt:

$$\int_{[a,b]} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty. \tag{3.1}$$

Wir schreiben dann $f \in L_1^{loc}(I)$.[3]

. . . .

Definition 3.2.
Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
f ist eine **kausale Zeitfunktion**, wenn $f \in L_1^{loc}(I)$ und $f(t) = 0$ für alle $t \in I$ mit $t < 0$ gilt.

. . . .

Definition 3.3.
Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine kausale Zeitfunktion.
Die **Laplace-Transformierte** $\mathcal{L}f(s)$ wird dann durch folgende Funktionaltransformation definiert:

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} \, \mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Hierbei ist $s = \sigma + \omega \mathrm{i} \in \mathbb{C}$.

[3] Diese Definition lässt sich auch leicht auf offene Teilmengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ übertragen. Dort lautet sie kompakt (mit dem Lebesgue-Integral) aufgeschrieben:
$f \in L_1^{loc}(\Omega) :\Leftrightarrow \forall K \subset \Omega$, K kompakt in $\Omega : \int_K |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$.

Wir bezeichnen f und $\mathcal{L}f$ als **zueinander korrespondiert** und schreiben hierfür

$$f \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f. \tag{3.3}$$

Genau wie in der Definition der Fourier-Transformierten bildet die Menge aller Laplace-transformierbaren Funktionen den **Originalraum** und die Menge aller Laplace-Transformierten den **Bildraum**.

. . . .

Bemerkung 3.4.
Der Hauptunterschied zur Fourier-Transformation ist also der komplexe Exponent s. Durch die geeignete Wahl von $\operatorname{Re} s = \sigma$ können wir auf diese Weise die Konvergenz des Integrals erzwingen, denn es gilt für $\sigma > \beta$

$$\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0,$$

wobei β der kleinste Wert ist, sodass $e^{-\sigma t}$ gerade nicht mehr konvergent ist. Wir nennen β die *Konvergenzabszisse* von f. In der dadurch gekennzeichneten *Konvergenzhalbebene* $\mathcal{K}_f = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > \beta\}$ ist die Laplace-Transformierte eindeutig.

. . . .

Wir haben bereits in Gleichung (2.10) die Laplace-Transformierte der Heaviside-Funktion berechnet. Es folgen nun weitere Beispiele zur Berechnung der Laplace-Transformierten.

Beispiel 3.5.

a) Es sei $f(t) = e^{at}$ für $a \in \mathbb{R}$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{L}f(s) &= \int_0^\infty e^{at}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t\\ &= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{s-a}e^{-(s-a)t}\right]_0^k\\ &= \frac{1}{s-a}\end{aligned}$$

für $\operatorname{Re} s > a$. Wir erhalten also

$$e^{at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s-a}. \tag{3.4}$$

b) Es sei nun $f(t) = t^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Mittels partieller Integration erhalten wir für die Laplace-Transformierte folgende Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(s) &= \int\limits_0^\infty \underbrace{t^n}_{=:u} \underbrace{e^{-st}}_{=:v'} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{t^n}{s}e^{-st}\right]_0^\infty - \int\limits_0^\infty nt^{n-1}\frac{1}{-s}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{k\to\infty}\left[-\frac{k^n}{s}e^{-sk}\right] + \frac{n}{s}\int\limits_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{s}\int\limits_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir induktiv mittels fortgesetzter partieller Integration

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(s) &= \int\limits_0^\infty t^n e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{s}\int\limits_0^\infty t^{n-1}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\int\limits_0^\infty t^{n-2}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{[\ldots]}{=} \frac{n}{s}\frac{n-1}{s}\cdot\ldots\cdot\frac{n-(n-1)}{s}\int\limits_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{n!}{s^n}\lim_{k\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^k \\
&= \frac{n!}{s^{n+1}}
\end{aligned}$$

für Re $s > 0$. Somit gilt folgende Korrespondenz:

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}},\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

c) Als vorerst letztes Beispiel betrachten wir noch folgende Verallgemeinerung von b):
Sei $f(t) = t^r$ mit $r \in \mathbb{R}$ und $r > -1$. Die Substitution $(\star)$ $u = st$ liefert zusammen mit der Definition der Laplace-Transformierten

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(s) &= \int\limits_0^\infty t^r e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&\overset{(\star)}{=} \int\limits_0^\infty \frac{u^r}{s^r}e^{-u}\frac{1}{s}\,\mathrm{d}u \\
&= s^{-(r+1)}\int\limits_0^\infty u^r e^{-u}\,\mathrm{d}u
\end{aligned}$$

$$= s^{-(r+1)}\Gamma(r+1),$$

wobei $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$, $t \in \mathbb{R}$, die *Gamma-Funktion* in einer Variablen bezeichnet. Es ergibt sich somit die Korrespondenz

$$t^r \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}, \;\; r \in \mathbb{R}, \;\; r > -1, \mathrm{Re}\, s > 0, \tag{3.6}$$

welche für $x \in \mathbb{N}$ wegen $\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}$, wieder Formel (3.5) ergibt.

. . . .

Wir werden uns nun damit beschäftigen, wie die Laplace-Transformation umgekehrt werden kann und unter welchen Umständen diese Umkehrung eindeutig ist. Eine erste recht unhandliche Formel erhalten wir mit

Satz 3.6.
Einer Bildfunktion $\mathcal{L}f(s)$ mit Konvergenzabszisse β wird durch die *inverse Laplace-Transformation* ihre Originalfunktion $f(t)$ zugeordnet. Dabei gilt

$$f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot \lim_{\varepsilon\to\infty} \int\limits_{\sigma_0-\mathrm{i}\varepsilon}^{\sigma_0+\mathrm{i}\varepsilon} \mathcal{L}f(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \;\text{ für } \sigma_0 > \beta. \tag{3.7}$$

Beweis.
Für $\mathcal{L}f(s)$ gilt nach Definition 3.3

$$\mathcal{L}f(s) = \int\limits_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int\limits_0^\infty f(t)r^{-\sigma t}e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t.$$

Vergleichen wir dies mit der Definition der Spektralfunktion 1.13, so sehen wir, dass $\mathcal{L}f(s)$ die Fourier-Transformierte von $g(t) := f(t)e^{-\sigma t}$ ist.
Verwenden wir die Darstellung (1.15) des Fourier-Integrals, so erhalten wir

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}f(s)e^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to\infty}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{L}f(s)e^{\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}\omega.$$

Bei dieser Integration ist nun nur ω variabel, $\sigma = \sigma_0 > \beta$ hingegen konstant (wobei β die Konvergenzabszisse bezeichne). Somit nimmt σ_0 einen in der Konvergenzhalbebene liegenden, festen Wert an.
Mit

$$\mathrm{d}s = \mathrm{i}\cdot\mathrm{d}\omega \Leftrightarrow \mathrm{d}\omega = \frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{d}s$$

folgt nun

$$f(t)e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{L}f(s)e^{\mathrm{i}\omega t}\frac{1}{\mathrm{i}}\mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{L}f(s)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}s.$$

Umstellen nach f ergibt dann

$$f(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathcal{L}f(s)e^{\sigma t}e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}s \overset{(\star)}{=} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{\sigma_0-\mathrm{i}\varepsilon}^{\sigma_0+\mathrm{i}\varepsilon} \mathcal{L}f(s)e^{(\sigma+\mathrm{i}\omega)t}\mathrm{d}s,$$

wobei es bei $(\star)$ ausreicht, von σ_0 an zu beginnen, da die anderen Werte gemäß Definition keinen Beitrag zum Wert des Integrals leisten. Der Übergang zu komplexen Grenzen funktioniert, da σ_0 in der Konvergenzhalbebene liegt und daher die Laplace-Transformierte dort existiert. Mit $s = \sigma + \mathrm{i}\omega$ ergibt sich dann Formel (3.7) und somit die Behauptung. ■

. . . .

Wir interessieren uns nun dafür, wann bzw. ob Gleichung (3.7) eindeutig ist, d.h. wann zwischen zwei Funktionen mit gleicher Laplace-Transformierten auch wirklich Gleichheit herrscht.

Wir betrachten zur Beantwortung dieser Frage die folgenden zwei kausalen Zeitfunktionen

$$f_1(t) = \begin{cases} t & : \quad t \geq 0 \\ 0 & : \quad t < 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_2(t) = \begin{cases} t & : \quad t \geq 0 \wedge t \neq 2 \\ 3 & : \quad t = 2 \\ 0 & : \quad t < 0 \end{cases}.$$

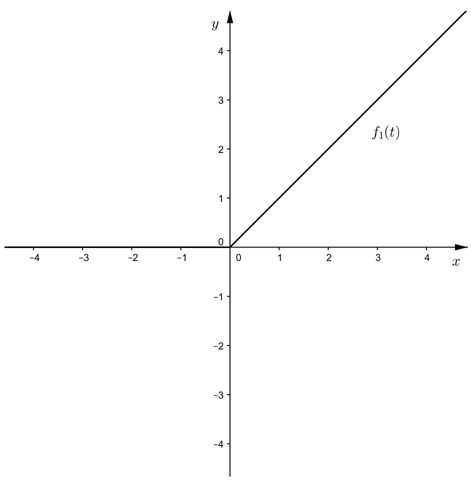

Abbildung 3.1: Die Funktion f_1

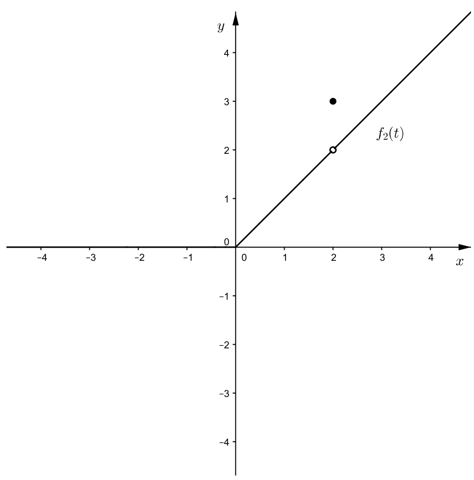

Abbildung 3.2: Die Funktion f_2

Es gilt $\mathcal{L}f_1(s) = \int\limits_0^\infty f_1(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{s^2} = \int\limits_0^\infty f_2(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}f_2(t)$. Wir bemerken:
f_1 und f_2 unterscheiden sich nur um eine *Nullfunktion*, d.h. eine Funktion $N(t)$ mit

$$\int\limits_0^t N(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0 \quad \forall t > 0. \tag{3.8}$$

In diesem Fall ist dies $N(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t \neq 2 \\ 1 & : \quad t = 2 \end{cases}$ und es gilt $f_2(t) = f_1(t) + N(t)$.
Für Funktionen, die sich nur um eine Nullfunktion unterscheiden, gilt folgender

Satz 3.7.
Es seien f_1 und f_2 zwei kausale Zeitfunktionen, zu denen die Laplace-Transformierten $\mathcal{L}f_1$ und $\mathcal{L}f_2$ in einer Halbebene $\operatorname{Re} s > \beta$ existieren und übereinstimmen.
Dann gilt $f_1(t) = f_2(t) + N(t)$ mit einer Nullfunktion N auf der zugehörigen Konvergenzhalbebene.

Beweis.
Mit Satz 3.6 gilt

$$f_j(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{\varepsilon\to\infty} \int\limits_{\sigma_0-\mathrm{i}\varepsilon}^{\sigma_0+\mathrm{i}\varepsilon} \mathcal{L}f_j(s)e^{st}\,\mathrm{d}s$$

für $j = 1, 2$. Es genügt nun zu zeigen, dass $f_1 - f_2$ eine Nullfunktion gemäß Gleichung (3.8) ist.
Wir betrachten also für $t > 0$

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t (f_1 - f_2)(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \lim_{\varepsilon\to\infty} \int\limits_{\sigma_0-\mathrm{i}\varepsilon}^{\sigma_0+\mathrm{i}\varepsilon} (\mathcal{L}f_1 - \mathcal{L}f_2)(s)e^{s\xi}\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}\xi \\ &\overset{(\star)}{=} \int\limits_0^t \left(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \cdot 0 \right) \mathrm{d}\xi \\ &= \int\limits_0^t 0\,\mathrm{d}\xi = 0,\end{aligned}$$

wobei wir bei $(\star)$ die Voraussetzung $\mathcal{L}f_1(s) = \mathcal{L}f_2(s)$ auf einer gemeinsamen Konvergenzhalbebene benutzt haben. Somit ist $f_1 - f_2$ eine Nullfunktion und es folgt die Behauptung. ■

. . . .

Setzen wir f_1 und f_2 zudem als stetig voraus, so erhalten wir folgenden *Eindeutigkeitssatz*.

Satz 3.8.
Es seien f_1 und f_2 zwei stetige, kausale Zeitfunktionen, zu denen die Laplace-Transformierten

$\mathcal{L}f_1$ und $\mathcal{L}f_2$ in einer Halbebene Re $s > \beta$ existieren und übereinstimmen.
Dann gilt $f_1(t) = f_2(t)$ auf der zugehörigen Konvergenzhalbebene.

Beweis.
Gemäß Satz 3.7 ist $f_1 = f_2 + N$ mit einer Nullfunktion N. Es genügt also zu zeigen, dass die Stetigkeit von f_1 und f_2 gerade $N \equiv 0$ impliziert.
Wir können $f_1, f_2 \in C(I)$ für ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ annehmen. Aufgrund der Stetigkeit sind die beiden Funktionen also auch integrierbar und besitzen nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung Stammfunktionen

$$F_1(t) = \int\limits_0^t f_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \text{und} \quad F_2(t) = \int\limits_0^t f_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Also ergibt sich

$$\int\limits_0^t \left(f_1(\xi) - f_2(\xi)\right)\,\mathrm{d}\xi = F_1(t) - F_2(t).$$

Andererseits ergibt eine analoge Rechnung wie im Beweis von Satz 3.7

$$\int\limits_0^t \left(f_1(\xi) - f_2(\xi)\right)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Gleichsetzen liefert $F_1(t) - F_2(t) = 0 \Leftrightarrow F_1(t) = F_2(t)$. Daraus folgt nun

$$f_1(t) = F_1'(t) = F_2'(t) = f_2(t)$$

und somit folgt $N \equiv 0$, also die Behauptung. ■

. . . .

Zur Berechnung der inversen Laplace-Transformierten ist obige Formel (3.7) häufig zu sperrig zu berechnen. Wir werden daher nun eine kompaktere Formel beweisen, wobei wir den Residuensatz nach Satz A.9 benutzen werden.

Satz 3.9.
Es sei f eine kausale Zeitfunktion mit Laplace-Transformierter $\mathcal{L}f$. Die Transformierte habe zudem die endlich vielen isolierten Pole $s_1, \ldots, s_n$ und es gelte $\lim\limits_{|s|\to\infty} |\mathcal{L}f(s)| = 0$. Dann gilt

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\mathcal{L}f(s)e^{st}; s_k\right), \tag{3.9}$$

das heißt, die Originalfunktion wird durch die Pole von $\mathcal{L}f$ charakterisiert.

Beweis.
Wir wählen den positiv orientierten Integrationsweg $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ wie in der nebenstehenden Abbildung, wobei $\sigma_0 > \beta$ gelte. Dieser enthalte ohne Einschränkung bereits alle Polstellen von $\mathcal{L}f$, ansonsten wählen wir R so groß, dass dies erfüllt ist.
Somit umfasst γ aber auch alle Pole von $\mathcal{L}f(s)e^{st}$, da e^{st} keine endlichen Pole besitzt. Durch Anwendung des Residuensatzes erhalten wir

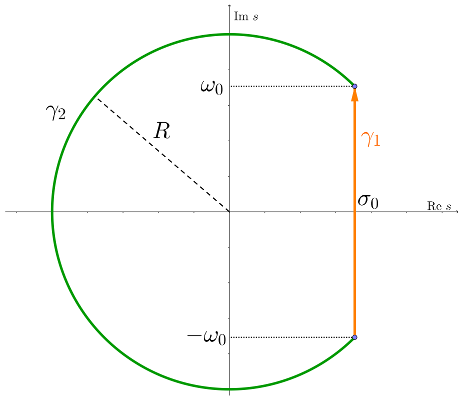

Abbildung 3.3: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \mathcal{L}f(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_1} \mathcal{L}f(s)e^{st}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \mathcal{L}f(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sigma_0-\mathrm{i}\omega_0}^{\sigma_0+\mathrm{i}\omega_0} \mathcal{L}f(s)e^{st}\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma_2} \mathcal{L}f(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \\
&= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\mathcal{L}f(s)e^{st}; s_k\right).
\end{aligned}$$

Für $\omega_0 \to \infty$ gilt auch $R \to \infty$ und es ist

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_2} \mathcal{L}f(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = 0.$$

Zudem gilt $\lim\limits_{|s|\to\infty} |\mathcal{L}f(s)| = 0$, denn wegen $\sigma \leq \sigma_0$ (vgl. Gleichung (3.7)) bleibt $\left|e^{st}\right| = \left|e^{\sigma t}\right|$ auf γ_2 beschränkt.
Somit erhalten wir insgesamt

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}\left(\mathcal{L}f(s)e^{st}; s_k\right) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\gamma} \mathcal{L}f(s)e^{st}\,\mathrm{d}s \overset{\omega_0,R\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_{\sigma_0-\mathrm{i}\varepsilon}^{\sigma_0+\mathrm{i}\varepsilon} \mathcal{L}f(s)e^{st}\,\mathrm{d}s = f(t). \tag{3.10}$$

Da γ zudem alle Pole von $\mathcal{L}f(s)e^{st}$ umläuft, gilt in Gleichung (3.10) sogar Gleichheit und es folgt somit die Behauptung. ■

. . . .

Bevor wir nun den Sprung zu den Transformationssätzen der Laplace-Transformation vollziehen, beschäftigen wir uns noch mit drei Beispielen zur inversen Laplace-Transformation, die das Vorgehen mittels Formel (3.9) verdeutlichen.

Beispiel 3.10.

a) Es sei die Bildfunktion $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s-a}$ vorgegeben. Diese hat einen einfachen Pol bei $s = a$. Somit gilt für die Originalfunktion

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res}\left(\mathcal{L}f(s)e^{st}; a\right) \\ &= \lim_{s\to a}(e^{st}) = e^{at}, \end{aligned}$$

was gemäß Beispiel 3.5, a) bereits klar war.

b) Nun sei $\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s^2+1}$ als Bildfunktion vorgegeben. Wir suchen wieder die Originalfunktion $f(t)$. Es ist diesmal $s^2 + 1 = (s + \mathrm{i})(s - \mathrm{i})$, wodurch $\mathcal{L}f(s)$ zwei einfache Pole besitzt. Wir berechnen also wieder mit Formel (3.9) die inverse Laplace-Transformierte:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res}\left(\mathcal{L}f(s)e^{st}; -\mathrm{i}\right) + \operatorname{Res}\left(\mathcal{L}f(s)e^{st}; \mathrm{i}\right) \\ &= \lim_{s\to -\mathrm{i}}\left(\frac{e^{st}}{s-\mathrm{i}}\right) + \lim_{s\to \mathrm{i}}\left(\frac{e^{st}}{s+\mathrm{i}}\right) \\ &= -\frac{1}{2\mathrm{i}}e^{-\mathrm{i}t} + \frac{1}{2\mathrm{i}}e^{\mathrm{i}t} \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}\right) = \sin t. \end{aligned}$$

Wir erhalten somit also die Korrespondenz

$$\sin t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1} \tag{3.11}$$

c) Als letztes Beispiel betrachten wir die Bildfunktion $\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+1}$ und bestimmen die Bildfunktion. Da $\mathcal{L}f$ die gleichen Pole wie die Bildfunktion in b) hat, können wir die Rechnung analog ansetzen:

$$\begin{aligned} f(t) &= \operatorname{Res}\left(\mathcal{L}f(s)e^{st}; -\mathrm{i}\right) + \operatorname{Res}\left(\mathcal{L}f(s)e^{st}; \mathrm{i}\right) \\ &= \lim_{s\to -\mathrm{i}}\left(\frac{se^{st}}{s-\mathrm{i}}\right) + \lim_{s\to \mathrm{i}}\left(\frac{se^{st}}{s+\mathrm{i}}\right) \\ &= \frac{-\mathrm{i}}{-2\mathrm{i}}e^{-\mathrm{i}t} + \frac{\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}e^{\mathrm{i}t} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\mathrm{i}t} + e^{-\mathrm{i}t}\right) = \cos t \end{aligned}$$

Zusammenfassend erhalten wir auf diese Weise also die Korrespondenz

$$\cos t \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+1} \tag{3.12}$$

. . . .

4 Transformationssätze

Um die Laplace-Transformierte einer kausalen Zeitfunktion nicht immer händisch berechnen zu müssen (was überdies auch nicht immer direkt möglich ist), werden wir in diesem Teil der Arbeit *Transformationssätze* beweisen, die es ermöglichen, die Laplace-Transformierte auf anderen Wegen zu berechnen, die sich als schneller oder zumindest komfortabler erweisen werden. Wir beginnen hierzu mit

Satz 4.1 (Additionssatz).
Es seien f_j kausale Zeitfunktionen für $j = 1, \dots, n$ und es gelten die Korrespondenzen

$$f_j(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f_j(s) = \int\limits_0^\infty f_j(t)e^{-st}\,\mathrm{d}s,$$

so gilt

$$\sum_{l=1}^{n} a_l f_l(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \sum_{l=1}^{n} a_l \mathcal{L}f_l(s). \tag{4.1}$$

Beweis.
Es gilt nach Definition der Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n} a_l f_l(t) \circ\!\!-\!\!\bullet & \int\limits_0^\infty \left[\sum_{l=1}^{n} a_l f_l(t)e^{-st}\right] \mathrm{d}t \\ & \overset{(\star)}{=} \sum_{l=1}^{n} a_l \left[\int\limits_0^\infty f_l(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t\right] \\ & = \sum_{l=1}^{n} a_l \mathcal{L}f_l(s).\end{aligned}$$

Dabei wurde an der Stelle $(\star)$ ausgenutzt, dass Integral und endliche Summe vertauscht werden dürfen. Somit gilt die Behauptung. ∎

. . . .

Bemerkung 4.2.
Die Laplace-Transformation ist also (wie auch die Fourier-Transformation) eine *lineare Transformation*. Insbesondere gilt also

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f(s) \Leftrightarrow a \cdot f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet a\mathcal{L} \cdot f(s) \text{ für } a \in \mathbb{C}. \tag{4.2}$$

Auf diese Weise können wir aus bekannten Korrespondenzen neue herleiten. Es gilt zum Beispiel

$$t^n \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{n!}{s^{n+1}} \Leftrightarrow \frac{t^n}{n!} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^{n+1}}.$$

. . . .

Beispiel 4.3.
Gesucht ist die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) = 4t^3 - 6t^2 + 12$ mittels Satz 4.1.
Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(s) &= 4 \cdot \mathcal{L}(t^3)(s) - 6 \cdot \mathcal{L}(t^2)(s) + 12 \cdot \mathcal{L}(H(t))(s) \\ &= 4 \cdot \frac{3!}{s^4} - 6 \cdot \frac{2!}{s^3} + 12 \cdot \frac{1}{s} \\ &= \frac{24 - 12s + 12s^3}{s^4}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

. . . .

Bisher haben wir nur kausale Zeitfunktionen betrachtet. Wir werden nun eine Methode herleiten, mit der wir die Laplace-Transformierte einer *verschobenen* kausalen Zeitfunktion bestimmen können, was eine wichtige Verallgemeinerung darstellt. Diesen *Verschiebungssatz* werden wir nun formulieren und beweisen.

Satz 4.4 (Verschiebungssatz).
Es sei f eine kausale Zeitfunktion und $t_0 \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen die um t_0 verschobene Zeitfunktion mit

$$\check{f}(t) = \begin{cases} f(t - t_0) & : \quad t \geq t_0 \\ 0 & : \quad t < t_0 \end{cases}.$$

Dann gilt:

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f(s) \Rightarrow \check{f}(t)H(t - t_0) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f(s)e^{-st_0}, \tag{4.4}$$

wobei H die Heaviside-Funktion bezeichnet.

Beweis.
Mittels der Definition der Laplace-Transformierten erhalten wir

$$\mathcal{L}\check{f}(s) = \int\limits_{t_0}^{\infty} f(t - t_0)e^{-st}\, \mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{\infty} f(t-t_0)e^{-((t-t_0)+t_0)s}\,\mathrm{d}t$$

$$\overset{(\star)}{=} e^{-st_0}\int_0^{\infty} f(\tau)e^{-\tau s}\,\mathrm{d}\tau$$

$$= e^{-st_0}\mathcal{L}f(s),$$

wobei bei $(\star)$ die Variablensubstitution

$$\tau = t - t_0,\ \mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t,\ \tau(t_0) = 0,\ \tau(\infty) = \infty$$

durchgeführt wurde. Somit folgt die Behauptung. ■

. . . .

Als Anwendung dieses Satzes erhalten wir folgenden Satz zur Laplace-Transformation einer periodischen Zeitfunktion:

Satz 4.5.
Es sei f eine kausale Zeitfunktion, die durch T-periodische Fortsetzung der Funktion

$$f_0(t) = \begin{cases} g(t) & : \quad 0 \le t \le T \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben ist, wobei g eine beliebige Funktion mit existierender Laplace-Transformation ist. Dann gilt:

$$f_0(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f_0(t) \Rightarrow f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f(s) = \frac{\mathcal{L}f_0(s)}{1-e^{sT}}. \tag{4.5}$$

Beweis.
Wir erhalten zunächst unter Benutzung der Heaviside-Funktion die folgende Darstellung der Funktion f:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0(t-kT)H(t-kT).$$

Nach Voraussetzung wissen wir, dass $f_0(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f_0(s)$ gilt. Darauf wenden wir nun den Verschiebungssatz 4.4 an und erhalten somit

$$\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}f_0(s)\left[\sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT}\right] = \mathcal{L}f_0(s)\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

mit $q = e^{-sT}$.
Wegen $|q| = \left|e^{-sT}\right| = e^{-\sigma T}\underbrace{\left|e^{-\mathrm{i}\omega t}\right|}_{=1} < 1$ für $\sigma > 0$ konvergiert obige Reihe, da $\sigma > 0$ in der

Konvergenzhalbebene der Heavisidefunktion (vgl. Formel (2.12)) erfüllt ist. Somit ergibt sich wegen

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \text{ für } |q| < 1$$

die Gleichheit

$$\mathcal{L}f(s) = \mathcal{L}f_0(s) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ksT} = \mathcal{L}f_0(s) \frac{1}{1-e^{-sT}}$$

und somit die Behauptung. ■

Wir betrachten nun eine weitere Art und Weise Korrespondenzen herzuleiten. Dazu folgt nun

Satz 4.6 (Dämpfungssatz).
Es sei f eine kausale Zeitfunktion mit Laplace-Transformierter $\mathcal{L}f$. Dann gilt

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f(s) \Rightarrow f(t)e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f(s+a) \text{ für alle } a \in \mathbb{C}. \tag{4.6}$$

Beweis.
Nach Definition der Laplace-Transformation gilt

$$\begin{aligned} f(t)e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet\ &\int_0^{\infty} f(t)e^{-at}e^{-st}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-(s+a)t}\,\mathrm{d}t \\ &\overset{(\star)}{=} \int_0^{\infty} f(t)e^{-\tau t}\,\mathrm{d}t \\ &= \mathcal{L}f(\tau) = \mathcal{L}f(s+a) \end{aligned}$$

mit der Substitution $(\star)$ $s + a = \tau$. Somit folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 4.7.

a) Ein Faktor e^{-at} bedingt also eine Verschiebung der Laplace-Transformierten im Bildbereich. Daher wird der Dämpfungssatz auch als *zweiter Verschiebungssatz* bezeichnet.

b) Die Bezeichnung *Dämpfungs*satz ist physikalisch nur dann gerechtfertigt, wenn e^{-at} auch wirklich abklingt, wenn also $\operatorname{Re} a > 0$ gilt. Aus mathematischer Sicht gilt der

Satz natürlich auch für Re $a < 0$, also für zeitlich ansteigende Faktoren e^{-at}. In diesem Fall handelt es sich phyikalisch um eine Verstärkung.

. . . .

Beispiel 4.8.

a) Es sei $f(t) = e^{-3t}\sin(2t)$. Gesucht ist $\mathcal{L}f(s)$. Ähnlich wie in Beispiel 3.10 erhalten wir die Korrespondenz

$$\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{s^2+4}.$$

Dann folgt mit dem Dämpfungssatz 4.6 für $a = 3$:

$$e^{-3t}\sin(2t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{2}{(s+3)^2+4} = \frac{2}{s^2+6s+13}.$$

b) Gegeben sei die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s+5}{s^2+2s+10}$$

einer kausalen Zeitfunktion f, welche im Folgenden gesucht ist.
Umformen der Transformierten liefert

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s+5}{(s+1)^2+3^2} = \frac{s+1}{(s+1)^2+3^2} + \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{(s+1)^2+3^2}.$$

Mit den Korrespondenzen

$$\sin(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{\omega}{s^2+\omega^2} \quad \text{und} \quad \cos(\omega t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{s}{s^2+\omega^2} \tag{4.7}$$

ergibt sich nun mit $a = -1$ aus dem Dämpfungssatz

$$f(t) = \left(\cos(3t) + \frac{4}{3}\sin(3t)\right)e^{-t}.$$

. . . .

Nun wenden wir uns einer Möglichkeit zu, die inverse Laplace-Transformierte einer gegebenen Bildfunktion $\mathcal{L}f$ auszurechnen, wenn diese sich als Produkt zweier Laplace-Transformierten darstellen lässt, von denen wir die Zeitfunktionen bereits kennen. Hierzu benötigen wir jedoch folgende vorbereitende Definition.

Definition 4.9.
Es seien f_1 und f_2 kausale Zeitfunktionen. Die **Faltung** von f_1 und f_2 ist definiert durch

$$f_1(t) * f_2(t) := \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau. \tag{4.8}$$

. . . .

Mittels der Faltung können wir nun den *Faltungssatz* formulieren:

Satz 4.10 (Faltungssatz).
Es seien $\mathcal{L}f_1(s)$ und $\mathcal{L}f_2(s)$ zwei Laplace-Transformierte mit

$$f_1(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f_1(s) \text{ und } f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f_2(s).$$

Dann gilt

$$f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f_1(s)\mathcal{L}f_2(s). \tag{4.9}$$

Beweis.
Da die Laplace-Transformierten von f_1 und f_2 existieren, können wir die absolute Konvergenz der zugehörigen Integrale aufgrund der lokalen Integrierbarkeit voraussetzen. Somit erhalten wir durch Einsetzen in die Definition der Laplace-Transformierten

$$\begin{aligned} f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet & \int_0^\infty \left[\int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau \right] e^{-st} \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(\tau) f_2(t-\tau) H(t-\tau) e^{-st}\, \mathrm{d}\tau\, \mathrm{d}t, \end{aligned}$$

da $f_1(\tau) f_2(t-\tau) H(t-\tau) = 0$ für $\tau > t$ gemäß der Definition der Heaviside-Funktion gilt und somit die Grenzen wie oben abgeändert werden können.
Da wir die absolute Konvergenz der Integrale voraussetzen können, dürfen wir die Integrationsreihenfolge vertauschen und erhalten somit

$$f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty f_1(\tau) \left[\int_0^\infty f_2(t-\tau) H(t-\tau) e^{-st}\, \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}\tau. \tag{$\star$}$$

Da nun die Funktion $f_2(t-\tau)H(t-\tau)$ gegenüber $f_2(t)$ um τ verschoben ist, folgt mittels des Verschiebungssatzes 4.4

$$\int_0^\infty f_2(t-\tau) H(t-\tau) e^{-st}\, \mathrm{d}t = \mathcal{L}f_2(s) e^{-s\tau}.$$

Somit folgt zusammen mit (⋆)

$$f_1(t) * f_2(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \int_0^\infty f_1(\tau)\mathcal{L}f_2(s)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathcal{L}f_2(s)\int_0^\infty f_1(\tau)e^{-s\tau}\,\mathrm{d}\tau = \mathcal{L}f_1(s)\mathcal{L}f_2(s)$$

und damit die Behauptung. ■

. . . .

Beispiel 4.11.
Für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Laplace-Transformierte

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{as}{(s^2+a^2)^2}$$

und suchen die zugehörige Zeitfunktion $f(t)$.
Hierzu zerlegen wir zunächst $\mathcal{L}f$ in das Produkt zweier Funktionen, von denen die Originalfunktionen bekannt sind:

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2} =: \mathcal{L}f_1(s)\mathcal{L}f_2(s).$$

Mit den aus Formel (4.7) bekannten Korrespondenzen

$$f_1(t) = \cos(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f_1(s) \text{ und } f_2(t) = \sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f_2(s)$$

erhalten wir durch Anwendung des Faltungssatzes

$$f(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t \cos(a\tau)\sin(at-a\tau)\,\mathrm{d}t. \qquad (\star)$$

Wenden wir die trigonometrische Formel

$$\sin(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

auf das Integral in (⋆) an, so ergibt sich mit $\alpha = at - a\tau$ und $\beta = a\tau$:

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_0^t \frac{1}{2}\left(\sin(at-a\tau+a\tau)+\sin(at-a\tau-a\tau)\right)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \sin(at)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(at-2a\tau)\,\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}t\sin(at) + \frac{1}{4a}\left[\cos(at-2a\tau)\right]_0^t \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} t \sin(at).$$

Wir erhalten somit die Korrespondenz

$$\frac{1}{2} t \sin(at) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{as}{(s^2 + a^2)^2}. \tag{4.10}$$

. . . .

Wir haben nun bereits ein ansehnliches Repertoire an Möglichkeiten zusammengestellt, um die Laplace-Transformierte zu berechnen. Nun werden wir noch einige Sätze beweisen, die die Grundlagen der Anwendung der Laplace-Transformation auf gewöhnliche Differentialgleichungen darstellen. Wir beginnen dazu mit einem Satz, der den Zusammenhang zwischen der Laplace-Transformierten einer Zeitfunktion und der Laplace-Transformierten des Integrals der Zeitfunktion fasst.

Satz 4.12 (Integrationssatz für die Originalfunktion).
Es gilt

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f(s) \Rightarrow \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s}\mathcal{L}f(s). \tag{4.11}$$

Beweis.
Wir wählen

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f(s) =: \mathcal{L}f_1(s) \text{ und } 1 \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s} =: \mathcal{L}f_2(s).$$

Mit dem Faltungssatz 4.10 ergibt sich

$$\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau = f(t) * 1 \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f_1(s) \cdot \frac{1}{s}.$$

Somit folgt die Behauptung. ■

. . . .

Beispiel 4.13.
Wir suchen die Laplace-Transformierte für die Funktion

$$f(t) = \int_0^t \tau^5 e^{-5\tau}\,\mathrm{d}\tau =: \int_0^t f_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

Für die Funktion $f_1(t) = t^5 e^{-5t}$ erhalten wir mit dem Dämpfungssatz 4.6

$$\mathcal{L}f_1(s) = \frac{5!}{(s+5)^6} = \frac{120}{(s+5)^6}.$$

Also erhalten wir mit dem Integrationssatz für die Originalfunktion

$$f(t) = \int\limits_0^t \tau^5 e^{-5\tau}\,\mathrm{d}\tau \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}f_1(s) = \frac{120}{s(s+5)^6}.$$

. . . .

Nachdem wir in Beispiel 4.11 den *Integrations*satz für die Originalfunktion kennengelernt haben, werden wir nun in zwei Schritten den *Differentiations*satz für die Originalfunktion beweisen. Dieser ist der elementare Transformationssatz der Laplace-Transformation zur Anwendung auf gewöhnliche Differentialgleichungen.

Lemma 4.14.
Es sei f eine kausale Zeitfunktion mit

$$f(0^+) := \lim_{t\to 0^+} f(t),$$

deren Ableitung $f'(t)$ für alle $t \geq 0$ existiert und für die das Laplace-Integral

$$\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t$$

konvergiert. Dann gilt

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathcal{L}f(s) \Rightarrow f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ s\mathcal{L}f(s) - f(0^+). \tag{4.12}$$

Beweis.
Wir berechnen mit der Definition der Laplace-Transformation

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f'(s) &= \int\limits_0^\infty f'(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{t_0\to 0^+} \int\limits_{t_0}^\infty \underbrace{f'(t)}_{=:v'}\,\underbrace{e^{-st}}_{=:u}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{t_0\to 0^+} \left[\left[f(t)e^{-st}\right]_{t_0}^\infty + s\int\limits_{t_0}^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \right] \\
&= s\mathcal{L}f(s) - \lim_{t_0\to 0^+} f(t_0) \\
&= s\mathcal{L}f(s) - f(0^+).
\end{aligned}$$

Damit folgt sofort die Behauptung. ■

. . . .

Satz 4.15 (Differentiationssatz für die Originalfunktion).
Es sei f eine kausale Zeitfunktion, deren k-te Ableitungen $f^{(k)}(t)$ für $k = 1, 2, \dots, n$ für alle $t \geq 0$ existieren und deren Laplace-Integrale

$$\int_0^\infty f^{(k)}(t) e^{-st} \, \mathrm{d}t$$

konvergieren. Gilt $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f(s)$, so folgt

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+). \tag{4.13}$$

Beweis.
Wir beweisen die Aussage mit vollständiger Induktion nach der Ordnung der Ableitung.
Den Induktionsanfang liefert für $n = 1$ das Lemma 4.14. Es gelte also die Behauptung für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt für $n + 1$ wegen $f^{(n+1)}(t) = \left(f^{(n)}(t)\right)'$ mittels Lemma 4.14:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\left(f^{(n)}\right)'\right](s) &= s\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) - f^{(n)}(0^+) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} s \cdot \left(s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+)\right) - f^{(n)}(0^+) \\
&= s^{n+1}\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k+1} f^{(k-1)}(0^+) - \underbrace{s^{n-(n+1)+1}}_{=s^0=1} f^{((n+1)-1)}(0^+) \\
&= s^{n+1}\mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n+1} s^{(n+1)-k} f^{(k-1)}(0^+)
\end{aligned}$$

und somit folgt die Behauptung. ∎

. . . .

Bemerkung 4.16.
Für die Fälle $n = 1, 2, 3$ ergeben sich aus Formel (4.13) die folgenden Spezialfälle:

$$f'(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s\mathcal{L}f(s) - f(0^+) \quad \text{(vgl. Lemma 4.14)}, \tag{4.14}$$

$$f''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^2\mathcal{L}f(s) - sf(0^+) - f'(0^+), \tag{4.15}$$

$$f'''(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^3\mathcal{L}f(s) - s^2 f(0^+) - sf'(0^+) - f''(0^+). \tag{4.16}$$

. . . .

5 Lösen gewöhnlicher Differentialgleichungen mittels der Laplace-Transformierten

In diesem Kapitel betrachten wir nur *lineare gewöhnliche Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* und entwickeln für diese unter Benutzung der Ergebnisse aus Kapitel 4 einen Lösungsalgorithmus mittels der Laplace-Transformierten.

Zum Abschluss dieser Arbeit werden wir dann noch einen Ausblick geben, in welche Richtung sich die Inhalte dieser Arbeit weiterentwickeln lassen.

Eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist eine Differentialgleichung der Form

$$a_n f^{(n)}(t) + a_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 f'(t) + a_0 f(t) = s(t), \tag{5.1}$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ konstante Koeffizienten unabhängig von t sind und $s(t)$ eine beliebige *Störfunktion*.
Im physikalischen Kontext interessieren uns nur Funktionswerte für $t \geq 0$.
Da f wenigstens n-mal differenzierbar sein muss, ist f insbesondere stetig und somit integrierbar, also auch $f \in L_1^{loc}(I)$ mit geeignetem $I \subset \mathbb{R}$. Wir können f also als kausale Zeitfunktion auffassen, da wir I aufgrund des Verschiebungssatzes 4.4 stets so verschieben können, dass $f(t) = 0$ für $t < 0$ gilt. Somit können wir voraussetzen, dass f eine Laplace-Transformierte besitzt und die Korrespondenz

$$f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \mathcal{L}f(s) \tag{5.2}$$

gilt. Mittels des Differentiationssatzes 4.15 erhalten wir somit

$$f^{(n)}(t) \circ\!\!-\!\!\bullet s^n \mathcal{L}f(s) - \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} f^{(k-1)}(0^+). \tag{5.3}$$

Wenden wir nun diese Korrespondenz sukzessive auf alle Summanden der Differentialgleichung an, so können wir die (Differential-)Gleichung im Originalraum in eine algebraische Gleichung im Bildraum transformieren, wobei die Störfunktion ebenfalls mittransformiert wird.

Dazu müssen wir allerdings voraussetzen, dass die Anfangswerte

$$f(0^+), f'(0^+), \ldots, f^{(n-1)}(0^+) \tag{5.4}$$

bekannt sind. Ist dies nicht der Fall, was gerade in Praxisfällen häufig auftritt, so werden diese durch entsprechend viele beliebige Konstanten ersetzt. Auf diese Weise erhält man aufgrund der Linearität der Laplace-Transformation eine Gleichung in s, die nach $\mathcal{L}f(s)$ aufgelöst werden kann. Rücktransformieren unter Berücksichtigung der Ergebnisse aus Kapitel 3 sowie standardisierter Tabellen liefert dann eine Lösung der Differentialgleichung, die aufgrund der Eindeutigkeit der inversen Laplace-Transformation und Satz 3.8 ebenfalls eindeutig ist.[4]

Fasst man obige Herleitung eines Verfahrens zur Lösung linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten grafisch zusammen, so erhalten wir beispielsweise folgendes Ablaufdiagramm:

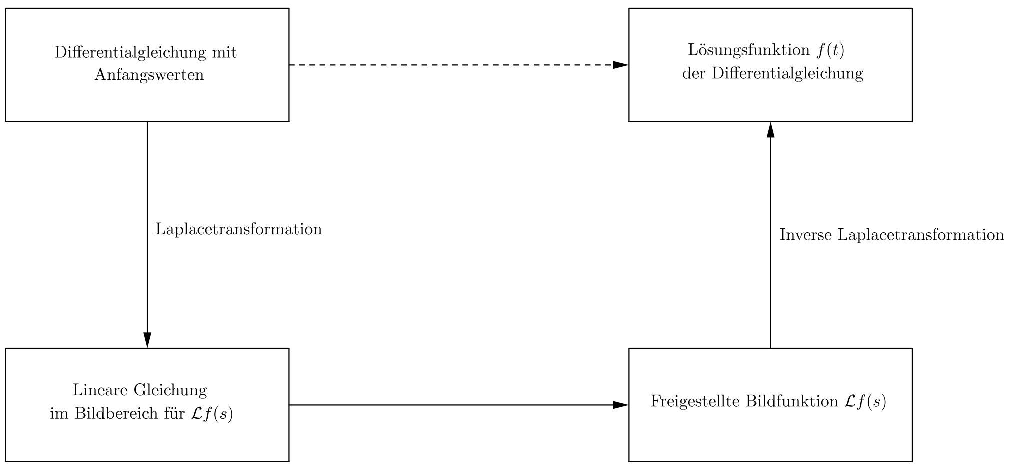

ABBILDUNG 5.1: Schema zur Lösung einer Differentialgleichung mit Laplace-Transformation

Dies ist im Wesentlichen alles, was wir benötigen, um mittels der Laplace-Transformation Differentialgleichungen vom Typ (5.1) zu lösen. Um das Vorgehen nun zu illustrieren, führen wir obiges Schema für drei typische Differentialgleichungen aus:

1) Eine homogene Differentialgleichung der Ordnung 2 mit Anfangswerten in Beispiel 5.1.

2) Eine inhomogene Differentialgleichung der Ordnung 3 mit Anfangswerten in Beispiel 5.2.

3) Eine inhomogene Differentialgleichung der Ordnung 2 ohne Anfangswerte in Beispiel 5.3.

[4] Sie erfüllt damit also den Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf.

Beispiel 5.1.
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 0 \tag{5.5}$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.
Diese transformieren wir nun mittels Bemerkung 4.16 in eine algebraische Gleichung im Bildraum, indem wir einsetzen und sortieren. Auf diese Weise erhalten wir

$$(s^2 + s - 2)\mathcal{L}y(s) - s - 1 = 0, \tag{$\star_1$}$$

da die Laplace-Transformierte der Nullfunktion in der Variablen x die Nullfunktion in der Variablen s ist. Wir stellen nun ($\star_1$) nach $\mathcal{L}y(s)$ um und erhalten

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{s+1}{s^2+s-2} = \frac{s+1}{(s-1)(s+2)} = \frac{2}{3(s-1)} + \frac{1}{3(s+2)},$$

wobei beim letzen Schritt eine Partialbruchzerlegung durchgeführt wurde. Wegen

$$e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a}$$

folgt somit

$$y(x) = \frac{2}{3}e^x + \frac{1}{3}e^{-2x}$$

mit den Ableitungen

$$y'(x) = \frac{2}{3}e^x - \frac{2}{3}e^{-2x} \text{ und } y''(x) = \frac{2}{3}e^x + \frac{4}{3}e^{-2x}.$$

Somit erfüllt die Funktion y die Differentialgleichung (5.5) als auch die Anfangswerte und ist daher eine Lösung des Anfangswertproblems.

. . . .

Beispiel 5.2.
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y'''(x) + y''(x) = 1 \tag{5.6}$$

mit den Anfangswerten $y(0) = 1$ und $y'(0) = y''(0) = 0$.
Wieder folgt durch Einsetzen und Sortieren gemäß Bemerkung 4.16

$$(s^3 + s^2)\mathcal{L}y(s) - s^2 - s = \frac{1}{s} = \mathcal{L}\,[1]\,(s). \tag{$\star_2$}$$

Wir stellen nun ($\star_2$) nach $\mathcal{L}y(s)$ um und führen eine Partialbruchzerlegung durch. Als Ergebnis ergibt sich hierbei

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{s^3 + s^2 + 1}{s^3(s+1)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} - \frac{1}{s+1}.$$

Benutzen wir die beiden Korrespondenzen

$$e^{-at} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s+a} \text{ und } \frac{x^n}{n!} \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^n},\ n \in \mathbb{N},$$

so folgt

$$y(x) = 2 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$$

mit den Ableitungen

$$y'(x) = -1 + x + e^{-x},\ y''(x) = 1 - e^{-x} \text{ und } y'''(x) = e^{-x}.$$

y erfüllt also die Differentialgleichung (5.6) und die Anfangswerte und ist somit eine Lösung des Anfangswertproblems.

. . . .

Beispiel 5.3. [5]
Es sei als letztes Beispiel die Differentialgleichung

$$y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = x^2 \tag{5.7}$$

gegeben, von der dieses Mal die allgemeine Lösung bestimmt werden soll.
Wir setzen erneut die Korrespondenzen aus Bemerkung 4.16 ein, lassen nur dieses Mal die unbestimmten Ausdrücke für die Funktionswerte stehen, da keine Anfangswerte vorgegeben sind. Auf diese Weise erhalten wir

$$(s^2 + 5s + 6)\mathcal{L}y(s) - y(0) \cdot (5 + s) - y'(0) = \frac{2}{s^3} = \mathcal{L}\left[x^2\right](s). \tag{$\star_3$}$$

Umstellen der Gleichung ($\star_3$) führt nun zu

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{2s^{-3} + y'(0) + (5+s)y(0)}{s^2 + 5s + 6} = \frac{2 + s^3y'(0) + (5s^3 + s^4)y(0)}{s^5 + 5s^4 + 6s^3} = \frac{2 + s^3y'(0) + (5s^3 + s^4)y(0)}{s^3(s+3)(s+2)}.$$

Diesen Bruch zerlegen wir nun in Partialbrüche, wobei wir auf eine geeignete Software zurück-

[5] Dieses Beispiel stammt aus [Loviscach, 2011].

greifen, in diesem Fall WolframAlpha[6]:

$$\mathcal{L}y(s) = \frac{19}{108s} - \frac{5}{18s^2} + \frac{1}{3s^3} + \frac{-y'(0) - 2y(0) + \frac{2}{27}}{s+3} + \frac{y'(0) + 3y(0) - \frac{1}{4}}{s+2}$$

Für unsere Funktion ergibt sich dann ähnlich wie in Beispiel 5.2 folgende Form:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{19}{108} + \left(-y'(0) - 2y(0) + \frac{2}{27}\right)e^{-3t} + \left(y'(0) + 3y(0) - \frac{1}{4}\right)e^{-2t} \\ &=: \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{19}{108} + C_1e^{-3t} + C_2e^{-2t}. \end{aligned}$$

. . . .

[6] Die Rechnung kann – mit der Substitution $y(0) = A$ und $y'(0) = B$ – hier gefunden werden: `https://goo.gl/LxtC5G`

Resümee und Ausblick

Nachdem wir in Kapitel 5 das Hauptresultat dieser Bachelorarbeit – den Lösungsalgorithmus für gewöhnliche Differentialgleichungen mittels der Laplace-Transformierten – diskutiert haben, fassen wir nun noch einmal kurz die Ergebnisse zusammen, die die Betrachtung der Laplace-Transformation aufgezeigt hat.

Zunächst haben wir in Kapitel 2 die Notwendigkeit der Laplace-Transformation diskutiert, da bereits elementare Funktionen, welche für die physikalischen Anwendungen unverzichtbar sind, keine Fourier-Transformierte besitzen. In unserem Fall haben wir dies am Beispiel der Heaviside-Funktion eingesehen – diese hatte eine Distribution als Fourier-Transformierte.
Im Anschluss daran haben wir in Kapitel 3 die Laplace-Transformation für lokal integrierbare Funktionen definiert und Formeln für die inverse Laplace-Transformation bewiesen. Insbesondere haben wir gesehen, dass die inverse Laplace-Transformation bei stetigen kausalen Zeitfunktionen eindeutig ist, was ein wichtiges Resultat in Bezug auf die Lösbarkeit der Differentialgleichungen in Kapitel 5 darstellte.
Um die Laplace-Transformation auch wirklich für möglichst viele Funktionen ausrechnen und anwenden zu können, haben wir in Kapitel 4 Transformationssätze betrachtet und mittels dieser Sätze wichtige Laplace-Transformatierten explizit ausgerechnet. Insbesondere lieferte uns der Differentiationssatz für die Originalfunktion das wichtigste Hilfsmittel zur Anwendung in Kapitel 5, da nur durch diesen die Transformation von Differentialgleichungen überhaupt erst gelingt.

An dieser Stelle wollen wir noch bemerken, dass diese Bachelorarbeit die mathematische Theorie zu periodischen Funktionen nur ansatzweise behandelt. Sowohl die Fourier-Transformation als auch die Laplace-Transformation lassen sich noch wesentlich ausführlicher untersuchen, wobei teils tiefliegende Resultate erzielt werden können[7]. Diese Arbeit versteht sich also als eine Einführung in diese umfangreiche mathematische Theorie und betont zunächt eher die „rechnerischen“ Aspekte, ohne dabei allerdings den Bezug zur Theorie verlieren zu wollen.

. . . .

Zum Abschluss dieser Arbeit wollen wir nun noch einen Ausblick darüber geben, in welche Richtung sich die vorgestellten Inhalte weiterentwickeln lassen:

$\underline{\star)}$ Die in Kapitel 5 entwickelte Methode zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen mittels der Laplace-Transformierten lässt sich auch auf *Systeme* gewöhnlicher

[7] Beispielsweise der Satz von Carleson zur L_2-Konvergenz von Fourierreihen quadratintegrierbarer Funktionen.

Differentialgleichungen (mit konstanten Koeffizienten) erweitern. Bei diesem Verfahren werden dann die einzelnen Gleichungen transformiert und es entsteht ein lineares Gleichungssystem, welches dann gelöst und rücktransformiert werden kann. Diese Methode wird vielfach in der Physik, sowie auch in der Elektrotechnik eingesetzt, um zum Beispiel Spannungen in gekoppelten Stromkreisen zu untersuchen und quantitativ zu erfassen. Auch findet sie in der Regelungstechnik Anwendung.

$\underline{\star)}$ Die Verwendung der Laplace-Transformation kann sogar weitestgehend umgangen werden: Betrachtet man nicht nur Funktionen, sondern *Distributionen*, so besitzen diese unter relativ schwachen Bedingungen stets eine Fourier-Transformierte, mittels der man dann auf ähnlichem Wege arbeiten kann. Zudem können auf diesem Wege auch noch wesentlich weitgehendere Resultate erzielt werden, insbesondere bei der Lösung von *partiellen* Differentialgleichungen, welche weitreichende Anwendung in den Naturwissenschaften finden.[8]

. . . .

[8] Für weitere Informationen zu diesem Themenkomplex siehe [Kaballo, 2014].

A Benötigte Resultate der Funktionentheorie

In diesem Teil des Anhangs werden die im Hauptteil der Arbeit benötigten Resultate und Definitionen aus der Funktionentheorie vorgestellt. Dabei wird an dieser Stelle nichts bewiesen. Für eine knappe Darstellung der Funktionentheorie mit Beweisskizzen sei an dieser Stelle auf [Kaballo, 1999] verwiesen. Eine umfangreiche Einführung findet sich in [Conway, 1978].

Definition A.1.
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge und $f : G \to \mathbb{C}$ eine Funktion.
f heißt **komplex differenzierbar** in einem $a \in G$, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{A.1}$$

existiert. Wenn f in jedem Punkt von G komplex differenzierbar ist, so nennen wir f **holomorph auf G**.[9] Stellen, an denen f nicht holomorph ist, nennen wir **singuläre Stellen**.
Die Menge aller auf G holomorphen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(G)$.

. . . .

Definition A.2.
Eine Menge $G \subset \mathbb{C}$ heißt **Gebiet**, falls G offen und zusammenhängend ist, es also zu je zwei Punkten $x, y \in G$ einen Polygonzug von x nach y gibt, der vollständig in G liegt.
Ein Gebiet, welches durch eine injektive, stetig differenzierbare Kurve $\gamma : [a, b) \to \mathbb{R}^2 \backslash \{\mathbf{0}\}$ abgeschlossen werden kann, heißt **einfach zusammenhängend**.[10]

. . . .

Satz A.3 (Integralsatz von Cauchy).
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gilt für jeden ganz in G verlaufenden, geschlossenen Weg γ

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0. \tag{A.2}$$

. . . .

Satz A.4 (Cauchysche Integralformeln).
Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und γ ein ganz in G verlaufender, ge-

[9] Holomorphie fordert mehr als komplexe Differenzierbarkeit: Ist f holomorph in einem Punkt a, so muss f in einer Umgebung von a komplex differenzierbar sein.
[10] Der Begriff „einfach“ verweist darauf, dass ein solches γ auch *einfache Kurve* heißt.

schlossener Weg und $z_0 \in G$. Ferner sei $f \in \mathcal{O}(G)$. Dann gelten

a) $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz \tag{A.3}$$

und

b) $$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \, dz. \tag{A.4}$$

Obiger Ausdruck ist für alle $n \in \mathbb{N}$ definiert, da eine in G holomorphe Funktion automatisch in $C^\infty(G)$ liegt.

. . . .

Bemerkung A.5.
Die nachfolgende Beschreibung für *Kreisringe* in $\mathbb{C}$ wird für die Formulierung von Satz A.6 benötigt.
Wir setzen für $z_0 \in \mathbb{C}$

$$U_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\} \quad \text{für } 0 \le r < R \le \infty. \tag{A.5}$$

. . . .

Satz A.6.
Eine Funktion $f \in \mathcal{O}\left(U_{r,R}(z_0)\right)$ besitzt die eindeutige **Laurent-Entwicklung**

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k =: \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^k \quad \text{für } r < |z - z_0| < R \tag{A.6}$$

und die Koeffizienten a_k sind gegeben durch

$$a_k := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \, d\zeta, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{A.7}$$

wobei γ eine Parameterdarstellung des Kreises $|\zeta - z_0| = \xi$ mit $r < \xi < R$ ist.
Die Laurent-Entwicklung (A.6) konvergiert absolut und lokal gleichmäßig auf $U_R(z_0)$.
Die Form (A.6) der Laurent-Entwicklung nennen wir auch **Laurent-Reihe**.

. . . .

Bemerkung A.7.

a) Es gilt auch die umgekehrte Lesart von Satz A.6:
Ist $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k (z - z_0)^k$ mit a_k wie in (A.7) gegeben, so konvergiert f höchstens in einem Kreisringgebiet und stellt auf diesem eine holomorphe Funktion dar.

b) Beginnt die Laurent-Reihe (A.6) mit einem Glied mit positivem Index, also

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

so hat f an der Stelle z_0 eine m-fache Nullstelle.

c) Beginnt die Laurent-Reihe hingegen mit einem Glied, das einen negativen Index hat, also

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N},$$

so hat f an der Stelle z_0 einen Pol n-ter Ordnung.

d) Besitzt die Laurent-Reihe kein erstes Glied, so hat f an der Stelle z_0 eine wesentliche Singularität, also eine Singularität, die weder hebbar noch Polstelle ist.
Als Beispiel hierfür kann die Funktion $f(z) = e^{1/z}$ angegeben werden. Mit der bekannten Taylor-Entwicklung der Exponentialfunktion erhalten wir

$$f(z) = e^{1/z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/z)^k}{k!} = \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{z^k}{(-k)!} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \cdots + \frac{1}{k!z^k} + \ldots$$

. . . .

Wir betrachten nun nur noch Funktionen f, die bis auf endlich viele isolierte Pole holomorph sind und werden so einen wichtigen Satz der Funktionentheorie formulieren können, der die Integration vieler Funktionen ermöglicht.

Definition A.8.
Für $f \in \mathcal{O}(U_{r,R}(z_0))$ heißt der (-1)-te Laurent-Koeffizient das **Residuum** von f in z_0. Wir schreiben hierfür

$$\operatorname{Res}(f; z_0) := a_{-1} \overset{(A.7)}{=} \int\limits_{|\zeta - z_0| = \xi} f(\zeta)\, \mathrm{d}\zeta, \; r < \xi < R. \tag{A.8}$$

. . . .

Satz A.9 (Residuensatz).
Es sei $f \in \mathcal{O}(U_{r,R}(z_0))$ und γ ein geschlossener Integrationsweg, der die isolierten Pole $z_1, \ldots, z_n$ im positiven Sinne durchlaufe. Dann gilt der folgende *Residuensatz*:

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int\limits_{\gamma} f(z)\, \mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f; z_k). \tag{A.9}$$

. . . .

Zum Abschluss von Teil A des Anhangs geben wir noch zwei geschlossene Formeln für die Berechnung der Residuen an, mit denen dann ein Integral wie in (A.9) berechnet werden kann. Die Berechnung der Residuen mittels dieser Formeln werden wir zudem noch an einem Beispiel illustrieren.

Satz A.10.
Es sei $f \in \mathcal{O}\left(U_{r,R}(z_0)\right)$ und $z_0 \in U_{r,R}(z_0)$.

a) Ist z_0 einfache Polstelle von f, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0) \cdot f(z)\right]. \tag{A.10}$$

b) Ist z_0 eine n-fache Polstelle von f, so gilt

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} \left((z - z_0)^n \cdot f(z)\right)\right] \tag{A.11}$$

Für $n = 1$ liefert Formel (A.11) sofort Formel (A.10).

. . . .

Beispiel A.11.
Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{1}{(1+z^2)(1-z)^2} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+\mathrm{i})(1-z)^2}$$

mit den Polstellen erster Ordnung $z_1 = \mathrm{i}$ und $z_2 = -\mathrm{i}$ und der Polstelle zweiter Ordnung $z_3 = 1$. Somit folgt für die Residuen

$$\operatorname{Res}(f; \mathrm{i}) \overset{(A.10)}{=} \lim_{z \to \mathrm{i}} \left[(z - i) f(z)\right] = \lim_{z \to \mathrm{i}} \left[\frac{1}{(z+\mathrm{i})(1-z)^2}\right] = \frac{1}{4},$$

$$\operatorname{Res}(f; -\mathrm{i}) \overset{(A.10)}{=} \lim_{z \to -\mathrm{i}} \left[(z + i) f(z)\right] = \lim_{z \to -\mathrm{i}} \left[\frac{1}{(z-\mathrm{i})(1-z)^2}\right] = \frac{1}{4} \quad \text{und}$$

$$\operatorname{Res}(f; 1) = \overset{(A.11)}{=} \lim_{z \to 1} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \left((z-1)^2 f(z)\right)\right] = \lim_{z \to 1} \left[\frac{-2z}{(1+z^2)^2}\right] = -\frac{1}{2}.$$

Es gilt also für jede geschlossene Kurve γ, die z_1, z_2 und z_3 im positiven Sinne umläuft, nach Satz A.9

$$\int_\gamma f(z)\, \mathrm{d}z \overset{(A.9)}{=} 2\pi\mathrm{i} \cdot \sum_{k=1}^{3} \operatorname{Res}(f; z_k) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

. . . .

B Gewöhnliche Differentialgleichungen - Ein Überblick

In diesem zweiten Teil des Anhangs stellen wir die wichtigsten Resultate zu gewöhnlichen Differentialgleichungen zusammen und folgen dabei im Wesentlichen der Vorlesung „Analysis III für Lehramt“, wie sie an der Technischen Universität Dortmund im Wintersemester 2016/17 von Prof. Dr. Rainer Brück gehalten wurde[11].

Definition B.1.
Eine Gleichung, die aus unabhängigen Variablen, einer unbekannten Funktion y und gewissen Ableitungen besteht, nennen wir **Differentialgleichung**:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \quad \text{(Explizite Differentialgleichung)} \tag{B.1}$$

In der Darstellung (B.1) ist die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ meist stetig und $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet.

. . . .

Definition B.2.
Eine Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ heißt **Lösung** der Differentialgleichung (B.1), wenn y auf einem beliebigen Intervall I n-mal differenzierbar ist und zudem gilt:

1) $\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\right) \in D$ für $x \in I$ und

2) $y^{(n)}(x) = f\left(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1}(x)\right)$ für $x \in D$.

. . . .

Definition B.3.
Es sei y eine Lösung von (B.1) und ferner $x_0 \in I$, $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$ fest vorgegeben mit

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{B.2}$$

Wir sagen, y löst das **Anfangswertproblem** der Differentialgleichung (B.1) unter den **Anfangswerten** (B.2).

. . . .

Wir können mit diesen Definitionen bisher noch keine Differentialgleichungen lösen, wohl aber Beispiele angeben, die die Definitionen illustrieren.

[11] `http://www.mathematik.uni-dortmund.de/sites/lehrstuhl-ix/analysis-iii-fuer-lehramt`

Beispiel B.4.

a) $y'(x) = -ky(x)$.
Diese Differentialgleichung beschreibt für $k > 0$ Zerfallsprozesse von zum Beispiel radioaktiven Stoffen.

b) $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$.
Bei dieser Differentialgleichung wird die Auslenkung eines idealen Federpendels in Abhängigkeit der Zeit modelliert.

c) $y'(x) = xy^2(x)$, $y(0) = 1$.
Hierbei handelt es sich um ein Anfangswertproblem zum Anfangswert $y(0) = 1$.

. . . .

Hat die Differentialgleichung (B.1) die Form

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y) \tag{B.3}$$

mit stetigen Funktionen $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : J \to \mathbb{R}$, so können wir unter gewissen Voraussetzungen die Lösung ausrechnen. Dieses Resultat für sogenannte *separierbare Differentialgleichungen* fasst

Satz B.5.
Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $f \in C(I)$, $g \in C(J)$ und $g(y) \neq 0$ für alle $y \in J$.
Dann existiert zu $x_0 \in I$ und $y_0 \in J$ ein Intervall $I_0 \subset I$ mit $x_0 \in I_0$. Ferner hat das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x)g(y), \ \ y(x_0) = y_0,$$

genau eine Lösung $y \in C^1(I)$. Mit $G(y) = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{\mathrm{d}s}{g(s)}$ und $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ ist diese Lösung gegeben durch

$$y(x) = G^{-1}(F(x)). \tag{B.4}$$

. . . .

Bemerkung B.6.
Auch wenn Formel (B.4) den Eindruck vermitteln könnte, dass mit ihr alle separierbaren Differentialgleichungen auch wirklich gelöst werden können, so ist dies nur in der Theorie so. Denn in Wirklichkeit muss man bei der Anwendung dieser Formel zwei Rechnungen durchführen, die häufig nicht exakt durchführbar sind:
Die Berechung der Inversen von G und das Integrieren von f und g.

. . . .

In obigem Satz haben wir angenommen, dass $g(y) \neq 0$ ist für alle $y \in J$. Ist dies doch der Fall und nennen wir die Nullstelle y_0, so ist $y(x) = y_0$ eine Lösung der Differentialgleichung (B.3), die wir eine *stationäre Lösung* nennen.

Wir werden nun einen allgemeinen Existenz- und Eindeutigkeitssatz angeben, der um 1890 vom französischen Mathematiker Emilé Picard und dem finnischen Mathematiker Ernst Leonhard Lindelöf als erstes vorgestellt wurde.

Satz B.7 (Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf).
Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\Omega = I \times D$, $Y_0 \in D$, $x_0 \in I$ und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig. Ferner erfülle F eine Lipschitz-Bedingung[12].
Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass das Anfangswertproblem $Y'(x) = F(x, y)$, $Y(x_0) = Y_0$ genau eine Lösung $Y : I \cap \overline{U_\delta(x_0)} =: I_0 \to \mathbb{R}^n$ hat.

. . . .

Abschließend werden wir nun noch den „klassischen" Weg zur Lösung von *linearen* Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten wie in (5.1) vorstellen.

Bemerkung B.8.
Gegeben sei eine Differentialgleichung der Form (5.1). Gilt für die Störfunktion $s(t) \not\equiv 0$, so ist die *allgemeine Lösung* der Differentialgleichung gegeben durch die Summe einer Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung und einer partikulären Lösung, die speziell auf $s(t)$ abgestimmt ist.[13].

. . . .

Bemerkung B.9.
Bei einer Differentialgleichung wie in (5.1) mit $s(t) = 0$, so führt der Ansatz $f(t) = e^{\lambda t}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ auf die Gleichung

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0. \tag{B.5}$$

Diese Gleichung nennen wir das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung. Anhand der Nullstellen von (B.5) können wir die Lösung der gegebenen homognenen Gleichung sofort aufschreiben:

- ★ Sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ einfache Nullstellen, so ist die Lösung gegeben durch $c_1e^{\lambda_1 t} + \ldots + c_ne^{\lambda_n t}$ mit Konstanten $c_1, ..., c_n \in \mathbb{R}$.
- ★ Ist λ eine m-fache Nullstelle, so liefert diese den Beitrag $c_1e^{\lambda t} + c_2te^{\lambda t} + \ldots + c_mt^me^{\lambda t}$ zur Gesamtlösung.

. . . .

[12] $\exists L > 0 : \|F(x, Y_1) - F(x, Y_2)\|_2 \leq L\,\|Y_1 - Y_2\|_2 \ \ \forall Y_1, Y_2 \in D$.
[13] Dies gilt natürlich auch für $s(t) = 0$, aber dieser Fall ist hier trivialerweise ausgeschlossen.

Beispiel B.10.
Gegeben sei die Differentialgleichung $y''(x) - y(x) = 0$. Mittels Bemerkung B.9 ergibt sich das charakteristische Polynom $\lambda^2 - 1 = 0$ mit den Lösungen $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 1$. Somit folgt für die Lösung der homogenen Gleichung $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

. . . .

Bemerkung B.11.
Eine Differentialgleichung wie in (5.1) mit Störfunktion $s(t) \not\equiv 0$ löst man wie folgt:
Zunächst bestimmt man eine Lösung der homogenen Gleichungen. Danach berechnet man eine partikuläre Lösung entweder mittels einer *Variation der Konstanten* oder mittels eines geeigneten *Ansatzes vom Typ der rechten Seite*. Auf die Durchführung dieser Methoden werden wir hier nicht weiter eingehen

. . . .

C Übersicht wichtiger Laplace-Transformierter

Es sei im Folgenden $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ gegeben.

Originalfunktion f	Laplace-Transformierte $\mathcal{L}f$
$\delta(t)$	1
$\delta(t-a)$	e^{-as}
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\frac{1}{a}\sin(at),\ a \neq 0$	$\frac{1}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

Epilog

Alle Darstellungen in dieser Ausarbeitungen basieren bezüglich der Reihenfolge auf den Kapiteln 1 bis 4 aus [Weber and Ulrich, 2012], wobei einiges inhaltlich gestrafft und überarbeitet wurde. Zudem wurden einige Resultate und mathematische Präzisierungen aus [Berg, 1974] mit aufgenommen, insbesondere die Forderung nach der lokalen Integrierbarkeit einer kausalen Zeitfunktion in 3.2.

Die Beweise, die Zusammenstellung und die Formulierung dieser Arbeit sind in diesen Kapiteln des Buches nicht in dieser Auführlichkeit enthalten. Sie wurden im Rahmen dieser Bachelorarbeit ausformuliert, wobei auf eine weitestgehend unabhängige Formulierung und eine eigene Notation Wert gelegt wurde. Sollten sich dennoch Dopplungen in der Formulierung eingeschlichen haben, so liegt dies an der Unaufmerksamkeit des Autors. Ich bitte, dies zu entschuldigen.

Alle Skizzen in dieser Ausarbeitung sind selbstständig mit der dynamischen Geometriesoftware **GeoGebra** erstellt worden. Zur Erstellung dieser Ausarbeitung wurde die Website `https://www.overleaf.com` benutzt.

Matthias Schulte, Juli 2017.

Literaturverzeichnis

[Berg, 1974] Berg, L. (1974). Operatorenrechnung II. Funktionentheoretische Methoden. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin.

[Conway, 1978] Conway, J. B. (1978). Functions of One Complex Variable I. Springer, New York.

[Endl and Luh, 1989] Endl, K. and Luh, W. (1989). Analysis II - Eine integrierte Darstellung. Aula Verlag, Wiebelsheim.

[Kaballo, 1999] Kaballo, W. (1999). Einführung in die Analysis III. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg.

[Kaballo, 2014] Kaballo, W. (2014). Aufbaukurs Funktionalanalysis und Operatortheorie. Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg.

[Loviscach, 2011] Loviscach, J. (2011). 19.1_2 Differentialgleichungen per Laplace-Transformation lösen. Youtube. Verfügbar unter `https://www.youtube.com/watch?v=w3vDQLpEMbk`; besucht am 17.06.2017.

[Weber and Ulrich, 2012] Weber, H. and Ulrich, H. (2012). Laplace-, Fourier- und z-Transformation. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden.

Eidesstattliche Versicherung

Name, Vorname | Matr.-Nr.

Ich versichere hiermit an Eides statt, dass ich die vorliegende Bachelorarbeit/Masterarbeit* mit dem Titel

selbstständig und ohne unzulässige fremde Hilfe erbracht habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt sowie wörtliche und sinngemäße Zitate kenntlich gemacht. Die Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Ort, Datum | Unterschrift

*Nichtzutreffendes bitte streichen

Belehrung:

Wer vorsätzlich gegen eine die Täuschung über Prüfungsleistungen betreffende Regelung einer Hochschulprüfungsordnung verstößt, handelt ordnungswidrig. Die Ordnungswidrigkeit kann mit einer Geldbuße von bis zu 50.000,00 € geahndet werden. Zuständige Verwaltungsbehörde für die Verfolgung und Ahndung von Ordnungswidrigkeiten ist der Kanzler/die Kanzlerin der Technischen Universität Dortmund. Im Falle eines mehrfachen oder sonstigen schwerwiegenden Täuschungsversuches kann der Prüfling zudem exmatrikuliert werden. (§ 63 Abs. 5 Hochschulgesetz - HG -)

Die Abgabe einer falschen Versicherung an Eides statt wird mit Freiheitsstrafe bis zu 3 Jahren oder mit Geldstrafe bestraft.

Die Technische Universität Dortmund wird gfls. elektronische Vergleichswerkzeuge (wie z.B. die Software „turnitin“) zur Überprüfung von Ordnungswidrigkeiten in Prüfungsverfahren nutzen.

Die oben stehende Belehrung habe ich zur Kenntnis genommen:

Ort, Datum | Unterschrift